Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(3), 149-154
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73018

Radial Solutions for Generalized Quasilinear Schrödinger Equations

Qing Li, Yangxin Yao*

Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 13609702684@163.com, *mayxyao@scut.edu.cn

Received: Apr. 27th, 2017; accepted: May 12th, 2017; published: May 16th, 2017

Abstract

By using the ODE method, we study the existence result of radial solutions for generalized quasilinear Schrödinger equations arising from mathematical physics.

Keywords

Schrödinger Equations, Radial Solutions, Contraction Mappings, Continuation Theorem

广义拟线性Schrödinger方程的径向解

李　青，姚仰新*

华南理工大学数学学院，广东　广州
Email: 13609702684@163.com, *mayxyao@scut.edu.cn

收稿日期：2017年4月27日；录用日期：2017年5月12日；发布日期：2017年5月16日

摘　要

利用ODE方法，本文讨论数学物理中一类广义拟线性Schrödinger方程径向解的存在性。

关键词

Schrödinger方程，径向解，压缩映像原理，延拓定理

*通讯作者。

文章引用: 李青, 姚仰新. 广义拟线性 Schrödinger 方程的径向解[J]. 理论数学, 2017, 7(3): 149-154.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73018

1. 引言

本文研究下列一类广义拟线性 Schrödinger 方程：

$$-\mathrm{div}\left(g^2(u)\nabla u\right)+g(u)g'(u)|\nabla u|^2+\lambda u=|u|^{p-2}u,\ x\in R^N, \tag{1.1}$$

其中 div 为散度算子，$N\geq 3$，$P>2$，$g(t):R\to R$ 为光滑有正下界的偶函数。

方程(1.1)来源于对以下拟线性 Schrödinger 方程驻波解的研究：

$$\mathrm{i}\varphi_t=-\Delta\varphi-\Delta\left(l\left(|\varphi|^2\right)\right)l'\left(|\varphi|^2\right)\varphi-|\varphi|^{p-2}\varphi,\ x\in R^N, \tag{1.2}$$

其中 $\varphi:R^N\times R\to C$，l 是实函数。对于不同形式的非线性项 l，方程(1.2)对应了不同的物理现象模型。例如：当 $l(s)=s$ 时，方程(1.2)是凝波函数在超流体膜中时间演变的模型。当 $l(s)=\sqrt{1+s}$ 时，方程(1.2)是大功率超短激光在物质中传输的模型。令 $\varphi(x,t)=\mathrm{e}^{-i\lambda t}u(x)$，其中 $\lambda>0$，u 为实函数，$g(u)=\sqrt{1+\frac{\left[\left(l\left(|u|^2\right)\right)'\right]^2}{2}}$。把 $\varphi(x,t)$ 和 $g(u)$ 代入方程(1.2)后消去含 t 的项，便得到方程(1.1)。

当 $l(s)=s$ 时，文献[1] [2]通过约束极小化讨论了(1.1)解的存在性。当 $l(s)=\sqrt{1+s}$ 时，文献[3]证明了(1.1)非平凡解的存在性。对于一般的 l 的研究，可参考文献[4]。

若进一步，当 $g(t)$ 关于 $|t|$ 非减时，利用山路定理，文献[4]证明了(1.1)非平凡解的存在性。本文在 g 没有非减这一条件下，拟利用 ODE 方法研究方程(1.1)径向解的存在性。本文的主要结论为：

定理 1：在 g 的条件下，方程(1.1)存在径向解，且解是有界的。

2. 定理的证明

令 $v=G(u)=\int_0^u g(t)\mathrm{d}t$，根据 g 的条件，反函数 $u=G^{-1}(v)$ 存在。

把 $u=G^{-1}(v)$ 代入方程(1.1)，则有：

$$-\Delta v+\lambda\frac{G^{-1}(v)}{g\left(G^{-1}(v)\right)}=\frac{\left|G^{-1}(v)\right|^{P-2}G^{-1}(v)}{g\left(G^{-1}(v)\right)},x\in R^N, \tag{2.1}$$

因此，对方程(1.1)径向解的研究可以转化成对方程(2.1)的径向解的研究。

事实上，(1.1)等价于

$$-g(u)g'(u)|\nabla u|^2-g^2(u)\Delta u+\lambda u=|u|^{p-2}u. \tag{2.2}$$

由于 $g(u)>0$，(2.2)两边除以 $g(u)$，得：

$$-g'(u)|\nabla u|^2-g(u)\Delta u+\lambda\frac{u}{g(u)}=\frac{|u|^{p-2}u}{g(u)}. \tag{2.3}$$

由于 $\Delta v=g'(u)|\nabla u|^2+g(u)\Delta u$，把 $G^{-1}(v)$ 代入方程(2.3)便可以得到(2.1)。反之，把 $u=G^{-1}(v)$ 代入(2.2)便得到(2.1)。

为了简化符号，记 $h(v)=\lambda\frac{G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}-\frac{|G^{-1}(v)|^{p-2}G^{-1}(v)}{g(G^{-1}(v))}$，则方程(2.1)写成如下形式：

$$-\Delta v+h(v)=0 \tag{2.4}$$

引理 2.1： 在 g 的条件下，$h(v)$ 关于 v 是局部利普希茨连续的。

证明： 由于 g 光滑，故 $g'(t)$ 是局部有界的，即，对于任意的 R_0，存在 $K_1>0,R_1>0$ 使得 $|g'(t)|<K_1,\forall t\in C^2([R_0,R_1])$。另一方面，由于 $g\geq M>0$，故 $G^{-1}(t)$ 也是局部有界的。则对上述 R_0，存在 $K_2>0,R_2>0$ 使得 $|G^{-1}(t)|<K_2,\forall t\in C^2([R_0,R_2])$。由 $h(t)$ 的表达式可知，$h(t)$ 是局部有界的。即对上述 R_0，存在 $K_3>0,R_3>0$ 使得 $|h(t)|<K_3,\forall t\in C^2([R_0,R_3])$。令 $R=\min\{R_1,R_2,R_3\},\forall v_1,v_2\in C^2([R_0,R])$：

$$|h(v_1)-h(v_2)|\leq\lambda\underbrace{\left|\frac{G^{-1}(v_1)}{g(G^{-1}(v_1))}-\frac{G^{-1}(v_2)}{g(G^{-1}(v_2))}\right|}_{h_1}+\underbrace{\left|\frac{|G^{-1}(v_2)|^{p-2}G^{-1}(v_2)}{g(G^{-1}(v_2))}-\frac{|G^{-1}(v_1)|^{p-2}G^{-1}(v_1)}{g(G^{-1}(v_1))}\right|}_{h_2}.$$

对于(h_1)，利用中值定理可知：

$$\begin{aligned}
h_1&\leq\left|\frac{G^{-1}(v_1)-G^{-1}(v_2)}{g(G^{-1}(v_1))}\right|+\left|\frac{1}{g(G^{-1}(v_1))}-\frac{1}{g(G^{-1}(v_2))}\right||G^{-1}(v_2)|\\
&\leq\frac{1}{M}|G^{-1}(v_1)-G^{-1}(v_2)|+\frac{|g(G^{-1}(v_1))-g(G^{-1}(v_2))|}{M^2}|G^{-1}(v_2)|\\
&\leq\frac{1}{M}\frac{1}{|g(G^{-1}(\xi_1))|}|v_1-v_2|+\left|\frac{g'(G^{-1}(\xi_2))}{g(G^{-1}(\xi_2))M^2}\right||v_1-v_2||G^{-1}(v_2)|\\
&\leq\left(\frac{1}{M^2}+\frac{|g'(G^{-1}(\xi_2))|}{M^3}|G^{-1}(v_2)|\right)|v_1-v_2|\leq\left(\frac{1}{M^2}+\frac{K_1K_2}{M^3}\right)|v_1-v_2|.
\end{aligned}$$

其中 ξ_1,ξ_2 介于 v_1 与 v_2 之间。

对于 h_2，同样利用中值定理可知：

$$\begin{aligned}
h_2&\leq\left|\frac{|G^{-1}(v_2)|^{P-2}G^{-1}(v_2)-|G^{-1}(v_1)|^{P-2}G^{-1}(v_1)}{M}\right|+|G^{-1}(v_1)|^{P-1}\left|\frac{1}{g(G^{-1}(v_2))}-\frac{1}{g(G^{-1}(v_1))}\right|\\
&\leq\frac{1}{M}|G^{-1}(v_2)|^{P-2}|G^{-1}(v_2)-G^{-1}(v_1)|+\frac{1}{M}|G^{-1}(v_2)|\left||G^{-1}(v_2)|^{P-2}-|G^{-1}(v_1)|^{P-2}\right|\\
&\quad+|G^{-1}(v_1)|^{P-1}\left|\frac{g'(G^{-1}(\eta_1))}{g(G^{-1}(v_1))g(G^{-1}(v_2))g(G^{-1}(\eta_1))}\right||v_1-v_2|\\
&\leq\frac{1}{M}\frac{1}{|g(G^{-1}(\eta_2))|}|G^{-1}(v_2)|^{P-2}|v_1-v_2|+\frac{1}{M|g(G^{-1}(\eta_3))|}|G^{-1}(v_1)|(p-2)|G^{-1}(\eta_3)|^{p-3}|v_1-v_2|\\
&\quad+|G^{-1}(v_1)|^{P-1}\left|\frac{g'(G^{-1}(\eta_1))}{g(G^{-1}(v_1))g(G^{-1}(v_2))g(G^{-1}(\eta_1))}\right||v_1-v_2|\\
&\leq\left[\frac{(p-1)K_2^{P-2}}{M^2}+\frac{K_1K_2^{P-1}}{M^3}\right]|v_1-v_2|.
\end{aligned}$$

其中η_1,η_2,η_3介于介于v_1与v_2之间。

由此可知：

$$\left|h(v_1)-h(v_2)\right|\le\left\{\lambda\left(\frac{1}{M^2}+\frac{K_1K_2}{M^3}\right)+\left[\frac{(P-1)K_2^{P-2}}{M^2}+\frac{K_1K_2^{P-1}}{M^3}\right]\right\}\left|v_1-v_2\right|$$

故$h(v)$关于v是局部利普希茨连续的。

由于本文研究方程(2.4)的径向解，故方程(2.4)可以写成如下的形式：

$$v''+\frac{N-1}{r}v'-h(v)=0,\ r\ge 0. \tag{2.5}$$

由于$v\in C_{loc}^2\left(R^N\right)$，因此$v'(0)=0$。对函数$v$限定一个初始条件，不妨令$v(0)=a,a\in R$。因此对问题(2.4)径向解的研究转化成研究如下的柯西问题：

$$\begin{cases} v''+\dfrac{N-1}{r}v'-h(v)=0,r\ge 0,\\ v(0)=a,v'(0)=0.\end{cases} \tag{2.6}$$

定理 2.2：对于任意的$a\in R$，存在常数$\varepsilon>0$，使得问题(2.6)有唯一的解

$$v_a\in C^2\left([0,\varepsilon)\right)$$

证明：方程$v''+\dfrac{N-1}{r}v'-h(v)=0$可以写成如下的形式：

$$\left(v'r^{N-1}\right)'=h(v)r^{N-1}. \tag{2.7}$$

对(2.7)两边两次积分可得

$$v(r)=\frac{r^2h(v)}{2N}+a. \tag{2.8}$$

显然对(2.8)进行微分可以得到(2.7)。

根据引理 2.1，存在$R_1>0,M_1>0$，使得$\left|h(v(r_1))-h(v(r_2))\right|\le M_1\left|v(r_1)-v(r_2)\right|,\forall r_1,r_2\in[0,R_1]$；$h(v)$是局部有界的，存在$R_2>0,M_2>0$，使得$\left|h(v(r))\right|\le M_2,\forall r\in[0,R_2]$。取$R<\min\left\{\sqrt{\dfrac{3}{M_1}},\dfrac{3}{4M_2},R_1,R_2\right\}$，则对于任意$r_1,r_2<R$，有：

$$\begin{aligned}\left|v(r_1)-v(r_2)\right|&=\left|\frac{r_1^2h(v(r_1))}{2N}-\frac{r_2^2h(v(r_2))}{2N}\right|\\&\le\frac{r_1^2}{6}\left|h(v(r_1))-h(v(r_2))\right|+\frac{\left|h(v(r_2))\right|}{6}(r_1+r_2)\left|r_1-r_2\right|\\&\le\frac{r_1^2M_1}{6}\left|v(r_1)-v(r_2)\right|+\frac{M_2}{6}(r_1+r_2)\left|r_1-r_2\right|\\&\le\frac{1}{2}\left|v(r_1)-v(r_2)\right|+\frac{1}{4}\left|r_1-r_2\right|\end{aligned} \tag{2.9}$$

由(2.9)知，对任意$r_1,r_2<R$，有$\left|v(r_1)-v(r_2)\right|\le\frac{1}{2}\left|r_1-r_2\right|$。利用压缩映像原理可知方程(2.8)有唯一的解$v\in C\left([0,\varepsilon)\right)$。故问题(2.6)有唯一的解$v_a\in C^2\left([0,\varepsilon)\right)$。

类似地，有

引理 2.3： 对于任意的 $R>0$，a,b 为实数，存在常数 $\varepsilon>0$，使得

$$\begin{cases} v''+\dfrac{N-1}{r}v'-h(v)=0, r\geq R, \\ v(R)=a, v'(R)=b. \end{cases} \tag{2.10}$$

有唯一的解 $v_{a,b}\in C^2([R,R+\varepsilon))$。

下面研究 $r\in[0,+\infty)$ 上的整体解。为了研究局部解和整体解的关系，首先给出延拓的定义。

定义 2.1： 设函数 $v\in C^2([0,\varepsilon))$ 是问题(2.6)的解。若存在函数 $v'\in C^2([0,\varepsilon_0))$，其中 $\varepsilon_0>\varepsilon$，使得对于 $r\in[0,\varepsilon)$，有 $v'(r)=v(r)$，那么称函数 $v'\in C^2([0,\varepsilon_0))$ 为 v 的延拓。

下面引理的证明可参看文献[5] [6]。

引理 2.4： 设 $h(v)$ 对变量 v 是局部利普希茨连续的，$v_a\in C^2([0,\varepsilon))$ 是问题(2.6)的解。则局部解有唯一的延拓 v_a' 需满足下列条件之一：

(1) v_a' 是整体解；

(2) 存在一点 r_0，使得：

$$\limsup_{r\to r_0-0}|v_a'(r)|=\infty, \limsup_{r\to r_0-0}|v_a'(r)|=\infty$$

定理的证明： 由引理 2.1，定理 2.2 知方程(1.1)具有局部解。下面证明此局部解可以延拓成为整体解。令

$$H(t)=\int_0^t\left[\lambda\frac{G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))}+\frac{|G^{-1}(s)|^{p-2}G^{-1}(s)}{g(G^{-1}(s))}\right]\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\lambda G^{-1}(t)^2-\frac{1}{p}|G^{-1}(t)|^p.$$

则存在常数 $C>0$ 使得成立不等式

$$H(t)\leq C, \forall t\in R. \tag{2.11}$$

此外，

$$\lim_{|t|\to\infty}H(t)=-\infty \tag{2.12}$$

假设 v_a 是问题(2.6)的局部解。在 $v_a''+\dfrac{N-1}{r}v_a'-h(v_a)=0$ 两边同时乘以 v_a'，并在 $[0,R]$ 上进行积分，可以得到：

$$\begin{aligned} &\int_0^R v_a''(r)v_a'(r)\mathrm{d}r+\int_0^R\frac{N-1}{r}v_a'(r)v_a'(r)\mathrm{d}r-\int_0^R h(v_a)v_a'(r)\mathrm{d}r \\ &=\int_0^R\left(\frac{1}{2}|v_a'(r)|^2\right)'\mathrm{d}r+(N-1)\int_0^R\frac{1}{r}|v_a'(r)|^2\mathrm{d}r-\int_0^R h(v_a(r))\mathrm{d}(v_a(r)) \\ &=\frac{1}{2}|v_a'(R)|^2+(N-1)\int_0^R\frac{1}{r}|v_a'(r)|^2\mathrm{d}r+H(v_a(0))-H(v_a(R)) \\ &=\frac{1}{2}|v_a'(R)|^2+(N-1)\int_0^R\frac{1}{r}|v_a'(r)|^2\mathrm{d}r+H(a)-H(v_a(R))=0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

定义函数 $E:R^+\to R$：

$$E(R)=\frac{1}{2}|v_a'(R)|^2-H(v_a(R)). \tag{2.14}$$

由 $v_a''+\frac{N-1}{r}v_a'-h(v_a)=0$ 可知

$$\begin{aligned}E'(R)&=v_a''(R)v_a'(R)-h(v_a(R))v_a'(R)\\&=v_a''(R)v_a'(R)-\left[v_a''(R)+\frac{N-1}{R}v_a'(R)\right]v_a'(R)\\&=-\frac{N-1}{R}\left[v_a'(R)\right]^2\leq 0\end{aligned}$$

因此 E 是非增函数。故

$$E(R)\leq E(0)=\frac{1}{2}\left|v_a'(0)\right|^2-H(v_a(0))=-H(v_a(0))=-H(a). \tag{2.15}$$

由(2.11)，(2.14)和(2.15)可知：

$$\frac{1}{2}\left|v_a'(R)\right|^2=E(R)+H(v_a(R))\leq -H(a)+H(v_a(R))\leq C-H(a)$$

因此 v_a' 是有界的。根据引理 2.4 可知，局部解 v_a 可以延拓成为整体解。
根据公式(2.14)和(2.15)可知：

$$E(R)=\frac{1}{2}\left|v_a'(0)\right|^2-H(v_a(R))\leq -H(a)$$

即 $H(v_a(R))\geq H(a)$。如果公式(2.12)成立，由 $H(v_a)$ 的有下界性可以得出 v_a 的有界性。

参考文献 (References)

[1] Liu, J.Q. and Wang, Z.Q. (2002) Soliton Solutions for Quasilinear Schrödinger Equations I. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **131**, 441-448. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06783-7

[2] Poppenberg, M., Schmitt, K. and Wang, Z.Q. (2002) On the Existence of Soliton Solutions to Quasilinear Schrödinger Equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, **14**, 329-344. https://doi.org/10.1007/s005260100105

[3] Shen, Y.T. and Wang, Y.J. (2016) Standing Waves for a Class of Quasilinear Schrödinger Equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **61**, 817-842. https://doi.org/10.1080/17476933.2015.1119818

[4] Shen, Y.T. and Wang, Y.J. (2013) Soliton Solutions for Generalized Quasilinear Schrödinger Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **80**, 194-201. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.10.005

[5] Sobolev, G. (1964) Non-Linear Differential Equations. Pergamon Press, Oxford.

[6] Kuzin, I. and Pohozaev, S. (1997) Entire Solutions of Semilinear Elliptic Equations. Birkhauser, Basel, Boston and Berlin.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究