Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(3), 159-162
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73020

Affine Type Groups and Flag-Transitive 6-(v, k, 3) Designs

Xiaolian Liao, Guohua Chen

Department of Mathematics and Finance, Hunan Institute of Humanities Science and Technology, Loudi Hunan
Email: hnldlxl2005@126.com

Received: Apr. 28th, 2017; accepted: May 12th, 2017; published: May 16th, 2017

Abstract

The classification of flag-transitive designs is an important subject on algebraic combinatorics. And the automorphism groups of a flag-transitive 6-(v, k, 3) design are 3-homogeneous. Therefore, using the classification theorem of 3-homogeneous permutation groups, the classification of flag-transitive 6-(v, k, 3) designs can be discussed, and we prove that the automorphism groups of a flag-transitive 6-(v, k, 3) design are not isomorphic to affine type groups.

Keywords

Flag-Transitive, 3 -Homogeneous Groups, Permutation Group, Affine Group

仿射型群与旗传递6-(v, k, 3)设计

廖小莲，陈国华

湖南人文科技学院数学与金融学院，湖南 娄底
Email: hnldlxl2005@126.com

收稿日期：2017年4月28日；录用日期：2017年5月12日；发布日期：2017年5月16日

摘　要

对旗传递设计进行分类是代数组合的重要课题。由于旗传递6-(v, k, 3)设计的自同构群是3-齐次的，我们利用3-齐次本原置换群分类定理来研究旗传递6-(v, k, 3)设计的自同构分类问题，并证明了旗传递6-(v, k, 3)设计的自同构群不同构于仿射型群。

文章引用: 廖小莲, 陈国华. 仿射型群与旗传递 6-(v, k, 3)设计[J]. 理论数学, 2017, 7(3): 159-162.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.73020

关键词

旗传递，3-齐次置换群，自同构群，仿射型群

1. 引言

一个 t-(v, k, λ)设计 D = (X, B, I)是由 v 个点的集合 X 和它的一些 k 元子集(称为区)组成的集合 B，且满足对于 X 的任意 t 子集，恰好有λ个区包含它。D 的自同构群 G 是 Sym(X)的子群，满足对任意 $g \in G, B \in \mathrm{B}$，有 $B^g \in \mathrm{B}$。设计 D = (X, B, I)的一个旗是指一个点区对(x, B)，这里 $x \in X, B \in \mathrm{B}$ 且 $(x, B) \in I$。如果 G 作用在 D 的区集合(点集合，旗集合)上是传递的，则称 G 是区–传递(点–传递，旗–传递)的[1]。对具有特殊传递性的区组设计的自同构群进行分类是组合数学的一个重要课题，目前，对参数较小的旗传递设计的自同构群的分类工作取得了较完善的成果，但当参数比较大时，研究进展明显要慢得多。我们知道，如果一个非平凡 $t-(v,k,\lambda)$ 设计是旗–传递的，那么参数 $t \le 6$ [2]。因此，我们可以考虑旗传递 6-(v, k, 3)设计的自同构群的分类问题。

主要定理： 设 D 是一个非平凡旗–传递 $6-(v,k,3)$ 设计，G 是 D 的自同构群，则 G 的基柱不同构于仿射型群。

2. 预备知识

引理 2.1 ([2])设 $D=(X,B,I)$ 是一个 $t-(v,k,\lambda)$ 设计且 $\lambda \ge 2$，则下面之一成立：

(1) 如果 D 的自同构群 G 区–传递地作用于 D 上，则 G 必点 $\lfloor t/2 \rfloor$-齐次地作用于 D 上;

(2) 如果 D 的自同构群 G 旗–传递地作用于 D 上，则 G 必点 $\lfloor (t+1)/2 \rfloor$-齐次地作用于 D 上。

引理 2.2 设 $D=(X,B,I)$ 为一个 $t-(v,k,\lambda)$ 设计，则：

(1) $bk = vr$；

(2) $\binom{v}{t}\lambda = b\binom{k}{t}$;

(3) 如果 $t=6$，那么 $r(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)=\lambda(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)(v-5)$.

引理 2.3 ([2])在有限 3-齐次置换群中，仿射型群分为如下三类：

(1) $G \cong AGL(1,8), A\Gamma L(1,8)$ 或 $A\Gamma L(1,32)$

(2) $G \cong SL(d,2), d \ge 2$；

(3) $G \cong A_7, v = 2^4$。

引理 2.4 ([2])设 $D=(X,B,I)$ 是一个 $t-(v,k,\lambda)$ 设计，这里 $t \ge 3$，如果 $G \le Aut(D)$ 在 D 上旗传递，那么 G 在 D 上是 2-传递的

引理 2.5 ([3])设 $D=(X,B,I)$ 是一个 $t-(v,k,\lambda)$ 设计，则

$$\lambda(v-t+1) \ge (k-t+1)(k-t+2),\quad t>2.$$

我们将 $t=6, \lambda=3$ 代入引理 2.5 的不等式中，化简可得：

推论 2.6 设 $D=(X,B,I)$ 是一个非平凡的 $6-(v,k,3)$ 设计，则参数 k 满足下面的不等式

$$k \le \left\lfloor \sqrt{3v-\frac{59}{4}}+\frac{9}{2} \right\rfloor$$

引理 2.7 ([4])如果 $D=(X,B,I)$ 是一个非平凡的 $t-(v,k,\lambda)$ 设计，那么不等式 $v>k+t$ 成立。

引理 2.8 ([3])设 $D=(X,B,I)$ 一个 $t-(v,k,\lambda)$ 设计。如果 $G\le Aut(D)$ 旗-传递地作用于 D 上，则对任意的 $x\in X$，都有 $r\|G_x|$ 成立。

引理 2.9 ([5])若 ε_i 表示向量空间 $V=V(d,2)$ 的标准基的第 i 个向量，且 $V_1=\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\rangle$，则 $GL(d,2)=SL(d,2)$ 点-传递地作用于 $V\setminus V_1$ 上。

引理 2.10 ([2])设 $D=(X,B,I)$ 是一个 $t-(v,k,\lambda)$ 设计，则对于每一个正整数 $s\le t$，都有

$$\lambda\binom{v-s}{t-s}\equiv 0\left(\bmod \binom{k-s}{t-s}\right)$$

成立。

3. 主要定理的证明

设 $D=(X,B,I)$ 是一个非平凡的旗-传递 $6-(v,k,3)$ 设计，G 是 D 的自同构群旗-传递自同构群。根据**引理** 2.2，我们知道 G 是一个有限 3-齐次置换群。因此，我们可以利用 3-齐次置换群分类定理讨论 G 的类型。又由设计 D 的非平凡性，我们有 $k>6$。下面讨论 G 是仿射型群的情形。根据**引理 2.3**，只需分三种情形进行讨论：

情形(1): $G\cong AGL(1,8),A\Gamma L(1,8)$ 或 $A\Gamma L(1,32)$

如果 $v=8$，由引理 2.4 可以推出：$k<8-6=2$，这与 $k>6$ 矛盾。

如果 $v=32$，利用推论 2.6，我们得到：$k\le 14$。于是 k 的可能取值只能是 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 和 14。由**引理** 2.7，得：

$$r(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)=3\times 31\times 30\times 29\times 28\times 27$$

代入上述每一个参数 k 的值，相应地可以求出每一个 r 值。只有当 $k=8$ 时，$r=31\times 29\times 27$ 是一个正整数，可能满足条件；而当 $k=7,9,10,11,12,13,14$ 时，对应的 r 值不是整数。又由于 $|G_x|=6(v-1)=6\times 31$，于是 r 不能整除 $|G_x|$，这与**引理** 2.8 矛盾。因此，旗-传递 $6-(v,k,3)$ 设计的自同构群不能是群 $AGL(1,8),A\Gamma L(1,8)$ 或 $A\Gamma L(1,32)$。

情形(2): $G\cong SL(d,2),d\ge 2$。

这里 $v=2^d,d\ge 2$。若 $d=2,3$，即 $v=4,8$，由情形(1)的证明可知，此时不存在任何非平凡 6-设计。以下假设 $d>3$。设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_d$ 是向量空间 $V=V(d,2)$ 一组标准基，记 $V_1=\langle\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3\rangle$ 为线性空间 V 的一个三维子空间。由非平凡设计的定义，我们有 $v>k+t$，即 $2^d>12$，于是 $d>3$。现任取子空间 V_1 的一个 6-子集 S，由于 $0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3$ 是 V_1 的六个互异的元素，不失一般性，记 $S=\{0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2+\varepsilon_3\}$。同时，假设 B_1,B_2,B_3 是由集合 S 生成的三个不同的区组，并记 $\Phi=B_1\cap B_2\cap B_3$。由于 $GL(d,2)=SL(d,2)$ 点-传递地作用在集合 $V\setminus V_1$ 上(引理 2.9)。因此，对于 $V\setminus V_1$ 中的某个点 α，如果 $\alpha\in B_1\cup B_2\cup B_3$，那么必有

$$\alpha^{G_{V_1}}\subseteq B_1\cup B_2\cup B_3\text{，且 }V\setminus V_1\subseteq\big((B_1\setminus\Phi)\cup(B_2\setminus\Phi)\cup(B_3\setminus\Phi)\big)\subseteq(B_1\cup B_2\cup B_3\setminus\Phi)$$

因此 $3(k-t)=3k-18\ge v-8=2^d-8$，即 $k\ge\dfrac{2^d+10}{3}$。由**引理 2.6**:

$$k \le \left[\sqrt{3v}+\frac{9}{2}\right] \le \left[\sqrt{3\cdot 2^d}+\frac{9}{2}\right] \le 2\cdot 2^{\frac{d}{2}}+5$$

于是 $\frac{2^d+10}{3} \le 2\cdot 2^{\frac{d}{2}}+5$，解得：$3-\sqrt{14} \le 2^{\frac{d}{2}} \le 3+\sqrt{14}$。而 $d>3$，故 $d=4$。

当 $d=4$ 时，$v=2^d=16$。再由**引理 2.4** 可以推出 $k=7,8,9$。

当 $k=7$ 时，取 $s=5$，则 $3\binom{16-5}{6-5} \equiv 1\left(\bmod \binom{7-5}{6-5}\right)$，与引理 2.10 矛盾，因此不存在非平凡的 6 − (16, 7, 3)设计。

当 $k=8$ 时，取 $s=2$，则 $3\binom{16-2}{6-2} \equiv 3\left(\bmod \binom{8-2}{6-2}\right)$，与引理 2.10 矛盾，因此不存在非平凡的 6 − (16, 8, 3)设计。

当 $k=9$ 时，取 $s=5$，则 $3\binom{16-5}{6-5} \equiv 1\left(\bmod \binom{9-5}{6-5}\right)$，与引理 2.10 矛盾，因此不存在非平凡的 6 − (16,9, 3)设计。

因此，旗－传递 6 − (v, k, 3)设计的自同构群 G 不同构于群 $SL(d,2), d \ge 2$。

情形(3): $G_0 \cong A_7, v=2^4$

由于 G 具有旗-传递性，根据引理 **2.8**，我们有 $r \| G_0|$。再由**引理** 2.2(3)，有：

$$r=\frac{3v(v-1)(v-2)(v-3)(v-4)}{(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)} \tag{1}$$

由**引理** 2.4 知 $k<16-6=10$，因此 $k=7,8,9$。由条件 $G_0 \cong A_7$ 有 $|G_0|=|A_7|=\frac{7!}{2}=2520$。将 $k=7,8,9$ 及 $v=2^4$ 代入式(1)求得 r，容易验证 r 不整除 $|G_0|$，矛盾。因此，这种情形可以排除。

综上所述，一个非平凡的旗-传递 $6-(v,k,3)$ 设计的自同构群的基柱不同构于仿射型群。

基金项目

湖南省教育厅科学研究项目(16C0829)资助。

参考文献 (References)

[1] Biggs, N.L. and Whit, E.A.T. (1979) Permutation Groups and Combinatorial Structures. Peking University Press, Beijing, 2-32. https://doi.org/10.1017/cbo9780511600739

[2] Cameron, P.J. and Praeger, C.E. (1992) Block-Transitive *t*-Designs. *Finite Geometry and Combinatorics*, **191**, 103-119.

[3] Beth, T., Jungnickel, D. and Lenz, H. (1999) Design Theory. Cambridge University Press, Cambridge, 3-28.

[4] Huber, M. (2007) A Sensus of Highly Symmetric Combinatorial Designs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, **26**, 453-476. https://doi.org/10.1007/s10801-007-0065-4

[5] 徐向红，章静. 3-齐次群与旗传递 5-(v,k,3)设计[J]. 数学理论与应用, 2009, 32(04): 5-11.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org