**Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(4), 349-355**
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74044

Hans汉斯

# Module Analytic Functions and Its Properties

**Chuanhua Jiang, Xiaohua Liang**

Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
Email: haoniuzai375588198@qq.com

Received: Jul. 6th, 2017; accepted: Jul. 20th, 2017; published: Jul. 25th, 2017

## Abstract

**In this paper, the finite number $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)|}{|\Delta z|}$ is called the module derivative of complex function $f(z)$. And if $f(z)$ exists module derivative at any point $z_0$ of some field $D$, then $f(z)$ is module analytic function over field $D$. Let $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ be a complex function, then we give a necessary condition, such that $f(z)$ is a module analytic function as follows: $u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$ which can be called module Cauchy-Riemann equation or shortly by M-*C.R.* equation. Furthermore, for module analytic function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ of field $D$, we get the necessary and sufficient conditions: (1) $u(x,y)$, $v(x,y)$ satisfies the M-*C.R.* equation within the field $D$. (2) $u(x,y)$, $v(x,y)$ satisfies the equation $u_xu_y=-v_xv_y$ within the field $D$. Finally, the correlations between module analytic function and several preexisting functions are discussed, including analysis function, semi-analytic function, and conjugate analytic function.**

## Keywords

**Analysis Function, Cauchy-Riemann Equation, Module Analytic Function, Module Cauchy-Riemann Equation**

# 模解析函数及其性质

**蒋传华，梁小华**

广西师范大学，广西 桂林
Email: haoniuzai375588198@qq.com

收稿日期：2017年7月6日；录用日期：2017年7月20日；发布日期：2017年7月25日

文章引用: 蒋传华, 梁小华. 模解析函数及其性质[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 349-355.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74044

## 摘　要

**若复变函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 处满足如下极限存在(有限) $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)|}{|\Delta z|}$ 称函数 $f(z)$ 于点 $z_0$ 模可导；若 $f(z)$ 在 $z_0$ 的某个邻域内的任一点模可导，则称 $f(z_0)$ 在 $z_0$ 模解析。如果函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内任一点模解析，则称 $f(z)$ 为区域 $D$ 内模解析函数。我们给出了一个复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 模解析的如上定义，并导出了模解析函数的必要条件：$u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$。我们称此为模柯西－黎曼方程(简称模 *C.-R.*方程)。进一步，我们给出了模解析的充分必要条件：(1) $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足模 *C.-R.* 方程；(2) $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足 $u_xu_y=-v_xv_y$。最后，我们讨论了模解析函数与已有的各类复变函数，如解析函数，半解析函数，共轭解析函数之间的关系。**



## 关键词

**解析函数，柯西－黎曼方程，模解析函数，模柯西－黎曼方程**




## 1. 模解析函数

**定义 1.1：** 设函数 $w=f(x)$ 在点 $z_0$ 的邻域内或包含 $z_0$ 的区域 $D$ 内有定义，如果当 $z$ 按任意方式趋于 $z_0$ 时，即当 $\Delta z$ 按任意方式趋于零时，比值

$$\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}=\frac{|f(z_0+\Delta z)-f(z_0)|}{|\Delta z|},\quad (\Delta z\neq 0)$$

的极限都存在(有限)，则称此极限为函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 的模导数(记为 $f^{||}(z_0)$)，此时称函数 $f(z)$ 于点 $z_0$ 模可导。若 $f(z)$ 在 $z_0$ 的某个邻域内的任一点模可导，则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 模解析。如果函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内任一点模解析，则称 $f(z)$ 为区域 $D$ 内模解析函数。或称 $f(z)$ 在区域 $D$ 内模解析。

**例 1.1：** 试证明函数 $f(z)=\overline{z}$ 在 $z$ 平面上不解析，但是在 $z$ 平面上模解析。

**证明：** 由 $u(x,y)=x$，$v(x,y)=-y$，得 $u_x=1$，$v_x=0$，$u_y=0$，$v_y=-1$。又 $u_x\neq v_y$，即此函数不满足 *C.-R.*方程，在 $z$ 平面上不解析。但

$$\frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}=\frac{|\overline{z+\Delta z}-\overline{z}|}{|\Delta z|}=\frac{|\overline{z}+\overline{\Delta z}-\overline{z}|}{|\Delta z|}=\frac{|\overline{\Delta z}|}{|\Delta z|}=\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=1$$

即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}=\frac{|\overline{\Delta z}|}{|\Delta z|}=1$$

因此，函数 $f(z)=\overline{z}$ 在 $z$ 平面上处处模解析。

**例 1.2**：试证明函数 $f(z)=x+y-(y-x)i$ 在 $z$ 平面上不解析，但是在 $z$ 平面上模解析。

**证明**：由 $u(x,y)=x+y$，$v(x,y)=-y$，得 $u_x=1$，$v_x=1$，$u_y=1$，$v_y=-1$。又 $u_x\neq v_y$，即此函数不适合 *C.-R.*方程，在 $z$ 平面上不解析。但

$$\frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}=\frac{\left|x+\Delta x+y+\Delta y-\left[y+\Delta y-(x+\Delta x)\right]i-\left[x+y-(y-x)i\right]\right|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$=\frac{\left|(\Delta x+\Delta y)-(\Delta y-\Delta x)i\right|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\sqrt{2\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\sqrt{2}$$

即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}=\sqrt{2}$$

因此，函数 $f(z)=\bar{z}$ 在 $z$ 平面上处处模解析。

## 2. 主要定理及证明

如果函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是模可微的，它的实部 $u(x,y)$ 与虚部 $v(x,y)$ 应当不是互相独立的，而必须适合一定的条件，类似于解析函数柯西－黎曼方程，我们也可以探讨这种条件。

若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点 $z=x+iy$ 模可微，即

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|f(z+\Delta z)-f(z)|}{|\Delta z|} \tag{1}$$

存在，设 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，$f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta u+i\Delta v$，其中：

$$\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y),$$

$$\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y),$$

代入，则(1)可以改写为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\Delta u+i\Delta v|}{|\Delta x+i\Delta y|} \tag{2}$$

存在，因为当 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 无论按什么方式趋于零时，(2)总是成立的。不妨设 $\Delta y=0$，$\Delta x\to 0$，即变点 $z+\Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋于点 $z$ (见图 1)，此时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta u+i\Delta v|}{|\Delta x|}=\frac{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{|\Delta x|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{u_x^2+v_x^2} \tag{3}$$

成立。同样，不妨设 $\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$，即变点 $z+\Delta z$ 沿
平行于虚轴的方向趋于点 $z$，此时有

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{|\Delta u+i\Delta v|}{|i\Delta y|}=\frac{\sqrt{\Delta u^2+\Delta v^2}}{|\Delta y|}=\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta y}\right)^2}=\sqrt{u_y^2+v_y^2}, \tag{4}$$

成立。综合(3)和(4)得

$$\sqrt{u_x^2+v_x^2}=\sqrt{u_y^2+v_y^2}\ \text{或者}\ u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2 \tag{5}$$

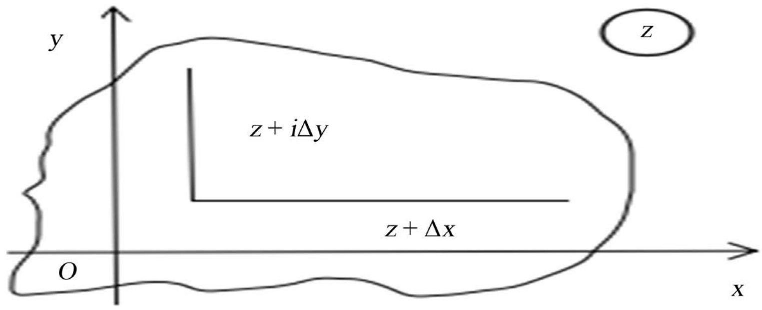


**Figure 1.** $z+\Delta z$ tend to $z$)
**图 1.** $z+\Delta z$ 趋于点 $z$

我们称(5)为模柯西－黎曼方程(简记为模 *C.-R.*方程)。

由以上的讨论可以得到如下定理：

**定理 2.1：(模解析的必要条件)**设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内有定义，且在 $D$ 内模解析，则必有：

(1) 偏导数 $u_x$， $u_y$， $v_x$， $v_y$ 在区域 $D$ 内存在；

(2) $u(x,y)$， $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足模 *C.-R.*方程。

**例 2.1：**试证明函数 $f(z)=x+y$ 在 $z$ 平面上满足定理 2.1 中的条件，但在 $z$ 平面上不是模解析函数。

**证明：**因为 $u(x,y)=x+y$，$v(x,y)=0$，易知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是可微函数。易得 $u_x=1$，$u_y=1$，$v_x=0$，$v_y=0$。可知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的偏导数在区域 $D$ 内存在，满足 $u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$，所以适合模 *C.-R.*方程。但

$$\frac{|f(z+\Delta z)-f(z)|}{|\Delta z|}=\frac{|x+\Delta x+y+\Delta y-(x+y)|}{\left|\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right|}=\frac{|\Delta x+\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

在 $\Delta z\to 0$ 时极限不存在。这只要让 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 沿射线 $\Delta y=k\Delta x(\Delta x>0)$ 随 $\Delta x\to 0$ 而趋于零，即知上述比值是一个与 $k$ 有关的值，即 $\frac{1+k}{\sqrt{1+k^2}}$。所以函数 $f(z)=x+y$ 在 $z$ 平面上不是模解析函数。下面我们给出判定一个复变函数是否模解析的充要条件：

**定理 2.2：(模解析的充要条件)**设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内有定义，其在区域 $D$ 内模解析的充分必要条件是：

(1) $u(x,y)$， $v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足模 $C.-R.$ 方程；

(2) 偏导数 $u_x$， $u_y$， $v_x$， $v_y$ 在区域 $D$ 内存在且 $u_xu_y=-v_xv_y$。

**证明：**设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，由极坐标变换 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$， $z=re^{i\theta}$，于是对任意 $\Delta z'=\Delta re^{i\theta'}$，有 $\frac{|\Delta f(z)|}{|\Delta z|}=\frac{|\Delta f(z)|}{|\Delta z'|}$，上式表明 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta f(z)|}{|\Delta z|}$ 与 $\theta$ 的取值无关。

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta f(z)|}{|\Delta z|}&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta u+i\Delta v|}{|\Delta z|}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta u+i\Delta v|}{\Delta^2 r}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta^2 u+\Delta^2 v}{\Delta^2 r}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta r}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta r}\right)^2\\
&=\left(u_xx_r+u_yy_r\right)^2+\left(v_xx_r+v_yy_r\right)^2\\
&=\left(u_x\cos\theta+u_y\sin\theta\right)^2+\left(v_x\cos\theta+v_y\sin\theta\right)^2\\
&=u_x^2\cos^2\theta+u_y^2\sin^2\theta+2u_xu_y\sin\theta\cos\theta+v_x^2\cos^2\theta+v_y^2\sin^2\theta+2v_xv_y\sin\theta\cos\theta\\
&=\left(u_x^2+v_x^2\right)\cos^2\theta+\left(u_y^2+v_y^2\right)\sin^2\theta+\left(u_xu_y+v_xv_y\right)\sin 2\theta
\end{aligned}$$

由于此极限与 $\theta$ 的取值无关，即函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内模解析充要条件为

$$u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2 \text{ 且 } u_xu_y+v_xv_y=0.$$

综上，定理 2.2 得证。

**例 2.2**：试证明函数 $f(z)=\overline{z^2}$ 在 $z$ 平面上模解析。

**证明**：令 $z=x+iy$，于是 $f(z)=\overline{z^2}=x^2-y^2-2xyi$，易得

$$u_x=2x, u_y=-2y, v_x=-2y, v_y=-2x.$$

满足 $u_xu_y=-v_xv_y$，且 $u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$，适合模 *C.-R.*方程，由定理 2.2 知 $f(z)$ 在 $z$ 平面上模解析，并且

$$f^{|\prime|}(z)=\sqrt{u_x^2+v_x^2}=\sqrt{4x^2+4y^2}=2\sqrt{x^2+y^2}.$$

**例 2.3**：讨论函数 $f(z)=x^2-iy$ 的模解析性。

**解**：因为 $u(x,y)=x^2$，$v(x,y)=-y$，故：

$$u_x=2x, u_y=0, v_x=0, v_y=-1,$$

满足 $u_xu_y=-v_xv_y$，若要 $u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$，须 $x=\pm\frac{1}{2}$。故仅在直线 $x=\pm\frac{1}{2}$ 上满足模 *C.-R.*方程，从而仅在直线 $x=\pm\frac{1}{2}$ 上 $f(z)$ 模可导，但在 $z$ 平面上，$f(z)$ 却处处不模解析。

## 3. 模解析函数与其它函数类的关系

**定理 3.1** 解析函数一定是模解析函数，模解析函数不一定是解析函数。

**证明**：设函数 $f(z)$ 是在区域 $D$ 内是解析函数，若任一点 $z_0\in D$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ 存在，必有 $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ 极限存在，于是函数 $f(z)$ 在区域 $D$ 内模解析。所以解析函数一定是模解析函数。反之，模解析函数不一定是解析函数。

**例 3.1**：函数 $f(z)=\overline{z}$ 在 $z$ 平面上模解析，但在 $Z$ 平面上不是解析函数。

**例 3.2**：函数 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y)$ 在 $Z$ 平面上是模解析也是解析函数。

**证明**：因 $f(z)=\mathrm{e}^x(\cos y+i\sin y)$，于是有

$$u_x=\mathrm{e}^x\cos y, u_y=-\mathrm{e}^x\sin y, v_x=\mathrm{e}^x\sin y, v_y=\mathrm{e}^x\cos y.$$

适合 $u_xu_y=-v_xv_y$ 且 $u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$，满足定理 2.2 中的条件，所以 $f(z)$ 在 $z$ 平面上是模解析函数，其在 $z$ 平面上也是解析函数。

文献[1]给出了半解析函数的定义如下：假定 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内连续，若对于每一点 $(x,y)\in D$，都有 $u_x=v_y$，则称 $f(z)$ 在 $D$ 内是第一类半解析函数；若对于每一点 $(x,y)\in D$，都有 $u_y=-v_x$，则称 $f(z)$ 在 $D$ 内是第二类半解析函数，第一类半解析函数和第二类半解析函数统称为半解析函数[1]。

**定理 3.2**：模解析函数不一定是半解析函数，半解析函数也不一定是模解析函数。

**证明**：模解析函数的条件 $u_xu_y=-v_xv_y$ 且 $u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$ 与半解析函数的条件 $u_x=v_y$ 或者 $u_y=-v_x$ 进行比较即可的定理结论。

**例 3.3**：函数 $f(z)=\overline{z^2}$ 在 $z$ 平面上是模解析函数，但不是半解析函数。

**证明**：由例 2.2 知，函数 $f(z)=\overline{z^2}$ 是模解析函数，令 $z=x+iy$，于是

$$f(z)=\overline{z^2}=x^2-y^2-2xyi\,,$$

易得

$$u_x=2x\,,u_y=-2y\,,v_x=-2y\,,v_y=-2x\,.$$

$u_x=-v_y$，$u_y=v_x$。根据半解析函数的定义，得 $f(z)=\overline{z^2}$ 不是半解析函数。

**例 3.4**：函数 $f(z)=x^2y+ixy^2$ 在 $z$ 平面上是半解析函数，但不是模解析函数。

**证明**：因 $f(z)=x^2y+ixy^2$，则 $u(x,y)=x^2y$，$v(x,y)=xy^2$。易得

$$u_x=2xy\,,u_y=x^2\,,v_x=y^2\,,v_y=2xy\,.$$

于是 $u_x=v_y$，根据半解析函数的定义，所以 $f(z)=x^2y+ixy^2$ 是半解析函数，但 $u_x^2+v_x^2\neq u_y^2+v_y^2$，所以根据定理 2.2 知 $f(z)=x^2y+ixy^2$ 不是模解析函数。

文献[2]给出了共轭解析函数的充要条件如下：

(1) 二元函数 $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在区域 $D$ 内可微；

(2) $u(x,y)$，$v(x,y)$ 在区域 $D$ 内满足共轭解析条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$；

则(1)和(2)称为函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内共轭解析的充分必要条件[2]。

**定理 3.3：(共轭解析一定模解析)**共轭解析函数一定是模解析函数，但模解析函数不一定是共轭解析函数。

**证明**：若函数 $f(z)$ 是共轭解析的，在 $z$ 平面上则有 $\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{\Delta f}{\overline{\Delta z}}$ 存在，所以：

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f}{\overline{\Delta z}}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f\,\Delta z}{\overline{\Delta z}\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f\,\Delta z}{|\Delta z|^2}$$

极限存在，则必有 $\lim\limits_{\Delta z\to0}\left|\dfrac{\Delta f\,\Delta z}{|\Delta z|^2}\right|$ 存在，易得到 $\lim\limits_{\Delta z\to0}\left|\dfrac{\Delta f}{|\Delta z|}\right|=\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{|\Delta f|}{|\Delta z|}$ 也存在，因而函数 $f(z)$ 是模解析函数. 所以共轭解析函数一定是模解析函数。反之，模解析函数不一定是共轭解析函数。

**例 3.5**：函数 $f(z)=\overline{z}$ 在 $z$ 平面上模解析，同时也是共轭解析函数。

证明：由例 2.1 知 $f(z)=\overline{z}$ 是模解析函数，令 $z=x+iy$，可得 $u_x=1$，$u_y=0$，$v_x=0$，$v_y=-1$，因而满足共轭解析条件 $u_x=-v_y$，$u_y=v_x$。所以函数 $f(z)=\overline{z}$ 在 $z$ 平面上共轭解析。

**例 3.6**：函数 $f(z)=z^2$ 在 $Z$ 平面上是模解析函数，但不是共轭解析函数。

**证明**：函数 $f(z)=z^2$，令 $z=x+iy$，得 $f(z)=z^2=x^2-y^2+2xyi$，于是得

$$u_x=2x\,,u_y=-2y\,,v_x=2y\,,v_y=2x$$

满足 $u_xu_y=-v_xv_y$ 且 $u_x^2+v_x^2=u_y^2+v_y^2$，根据定理 3.2 知 $f(z)=z^2$ 是模解析函数，但不满足 $u_x=-v_y$，$u_y=v_x$，不适合共轭解析条件，所以此函数不是共轭解析函数。

**定理 3.4**：函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 既是共轭解析也是半解析函数必须满足下面条件之一：(1) $u_x=v_y=0$。(2) $u_y=v_x=0$。

**证明**：设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 是共轭解析函数，则 $u_x=-v_y$ 且 $u_y=v_x$。

若 $w=f(z)$ 是第一类半解析函数，则 $u_x=v_y$，所以有 $u_x=-v_y$ 且 $u_x=v_y$，于是 $u_x=v_y=0$。

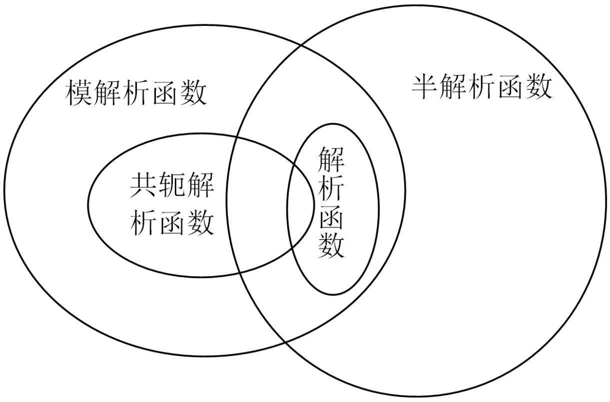


**Figure 2.** The diagram of inclusion relation
**图 2.** 包含关系图

若 $w=f(z)$ 是第二类半解析函数，则 $u_y=-v_x$，所以有 $u_y=v_x$ 且 $u_y=-v_x$，于是 $u_y=v_x=0$。

**推论 3.1**：模解析函数与解析函数，半解析函数，共轭解析函数的包含关系，如图 2 所示。

本文所涉及到基本概念和已知结论在参考文献[2] [3] [4] [5] [6]里。

## 参考文献 (References)

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析下册(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 119.

[2] 杜迎雪, 许小艳. 复变函数的可导性与解析性[J]. 中国科技信息, 2006(13): 287.

[3] 王海英. 复变函数共轭可微的又一充要条件及应用[J]. 吉林师范大学学报(自然科学版), 2008, 29(2): 82-83.

[4] 王见定, 著. 半解析函数共轭解析函数[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1988: 1, 23.

[5] 王见定. 半解析函数, 共轭解析函数及其在力学中的初步应用[J]. 北京: 北京工业大学分校, 1997, 27(2): 259-262.

[6] 钟玉泉. 复变函数(第四版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014: 46-55.