Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(5), 363-367
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.75046

Maximal Subgroups Containing Root Subgroups in Linear Groups over Commutative Ring

Xin Hou*, Shangzhi Li

School of Mathematics and Systems Science, Beihang University, Beijing
Email: *houge19870512@126.com

Received: Aug. 3rd, 2017; accepted: Aug. 17th, 2017; published: Aug. 21st, 2017

Abstract

The maximality of three types of subgroups containing root subgroups in linear groups is verified in this paper. And the possible types of maximal subgroups containing root subgroups in linear groups over commutative ring are discussed.

Keywords

Maximal Subgroups, Root Subgroups, Linear Groups, Commutative Ring

交换环上线性群中含根子群的极大子群

侯　欣*，李尚志

北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京
Email: *houge19870512@126.com

收稿日期：2017年8月3日；录用日期：2017年8月17日；发布日期：2017年8月21日

摘　要

本文验证了交换环上线性群中三种含根子群的子群的极大性，并讨论了交换环上线性群中含根子群的极大子群的可能类型。

*通讯作者。

文章引用: 侯欣, 李尚志. 交换环上线性群中含根子群的极大子群[J]. 理论数学, 2017, 7(5): 363-367.
DOI: 10.12677/pm.2017.75046

关键词

极大子群，根子群，线性群，交换环

1. 引言

典型群的极大子群是群论研究的一个重要课题。作为一类特殊的极大子群，含根子群的极大子群也得到了广泛的研究。文献[1]中作者给出了域上线性群中含根子群的几类子群的极大性证明，并证明了域上线性群中含根子群的极大子群必属于这几类极大子群之一。辛群中含根子群的极大子群的研究可参见[2] [3] [4]。酉群中含根子群的极大子群的研究可参见[5] [6]。正交群中含根子群的极大子群的研究可参见[7]。本文主要研究交换环上线性群中含根子群的极大子群。

设 R 是含幺交换环，$\mathrm{GL}(n,R)$，$\mathrm{SL}(n,R)$ 分别是 R 上的一般线性群和特殊线性群。设 I 是单位阵，E_{ij} 表示第 (i,j) 位置为 1，其余位置为 0 的 n 阶方阵，一般线性群 $\mathrm{GL}(n,R)$ 中的所有初等平延

$$T_{ij}(b)=I+bE_{ij}\left(i\neq j,0\neq b\in R\right)$$

生成一个子群 $\mathrm{E}(n,R)$，它是 $\mathrm{SL}(n,R)$ 的一个子群。事实上，域 F 上有 $\mathrm{E}(n,F)=\mathrm{SL}(n,F)$。容易验证

$$T_{ij}=\left\{T_{ij}(b)\middle|i\neq j,b\in R\right\}$$

也是 $\mathrm{GL}(n,R)$ 的一个子群，我们把这样的子群以及它们在 $\mathrm{GL}(n,R)$ 中的共轭子群称为根子群。

设 S 是 R 的极大理想，则 $F=R/S$ 是域。对每个 $a\in R$，定义

$$\phi(a)=a+S\in R/S$$

为 a 所在的模 S 的同余类，则

$$\phi_S:R\to F=R/S$$

是环同态。设 $\mathrm{E}(n,R)\leq G\leq \mathrm{GL}(n,R)$，对每个 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}\in G$ 定义

$$f_S(A)=\left(\phi\left(a_{ij}\right)\right)_{n\times n}\in \mathrm{GL}(n,F). \tag{*}$$

则

$$f_S:G\to G_0=\mathrm{GL}(n,F)$$

是群同态。对任意正整数 m，r，记

$$S^{m\times r}=\left\{\left(a_{ij}\right)_{m\times r}\middle|a_{ij}\in S\right\}.$$

则同态核

$$K=\mathrm{Ker}\,f_S=\left\{A\in G\middle|f_S(A)=I\right\}=\left\{A\in G\middle|A-I\in S^{n\times n}\right\}.$$

本文的主要结论如下：

定理 1.1 设 R 是含幺交换环，$\mathrm{E}(n,R)\le G\le \mathrm{GL}(n,R)$，如果以下子群 M 与 $\mathrm{E}(n,R)$ 生成 G，则 M 及其在 G 中的共轭都是 G 的含根子群的极大子群。特别地，$M\cap \mathrm{E}(n,R)$ 及其共轭是 $\mathrm{E}(n,R)$ 的含根子群的极大子群。

1) $1\le r\le n-1$，

$$M=\left\{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\in G \middle| A_{12}\in S^{r\times(n-r)}\right\},$$

2) $n=mr$， $2\le r\le n/2$，

$$M=\left\{g=\left(A_{ij}\right)_{m\times m}\in G \middle| A_{kj}\in S^{r\times r},\forall j\ne j_k,\text{对某个排列}\left(j_1,\cdots,j_m\right)\right\},$$

3) $n=2m$，

$$H=\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O\end{pmatrix},\quad M=\left\{A\in G \middle| AHA^{\mathrm{T}}-aH\in S^{n\times n},a\in R^*\right\}.$$

定理 1.2 设 R 是含幺交换环，G 是 $\mathrm{GL}(n,R)$ 的子群，M 是 G 中含根子群的极大子群，则 M 是以下两种类型之一：

1) 存在 R 的某个极大理想 S，使 $f_S(M)$ 是域 $F=R/S$ 上线性群 $f_S(G)\ge \mathrm{SL}(n,F)$ 的极大子群。当 $F\ne F_2$ 时，M 一定是定理 1 的 3 类子群之一。

2) 对 R 的每个极大理想都有

$$f_S(M)=f_S(G)\ge \mathrm{SL}(n,F),$$

且 $M\cap \mathrm{Ker}\, f_S$ 是 $\mathrm{Ker}\, f_S$ 的极大子群。

2. 定理的证明

在定理 1.1 的证明中，我们要先用群同态 f_S 来映到域 F 上处理。所以我们先介绍域上的相关结论。从[1]定理 1 以及[8]定理 3.6.1、3.7.2a 容易得出以下引理。

引理 2.1 设 $\mathrm{SL}(n,F)\le G\le \mathrm{GL}(n,F)$，如果以下子群 M 与 $\mathrm{SL}(n,F)$ 生成 G，则 M 及其在 G 中的共轭都是 G 的含根子群的极大子群。特别的，$M\cap \mathrm{SL}(n,F)$ 及其共轭是 $\mathrm{SL}(n,F)$ 的含根子群的极大子群。

1) $1\le r\le n-1$，

$$M=\left\{\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\in G \middle| A_{11}\in F^{r\times r},A_{21}\in F^{(n-r)\times r},A_{22}\in F^{(n-r)\times(n-r)}\right\},$$

2) $n=mr$， $2\le r\le n/2$，

$$M=\left\{g=\left(A_{ij}\right)_{m\times m}\in G \middle| A_{kj}=O,\forall j\ne j_k,\text{对某个排列}\left(j_1,\cdots,j_m\right)\right\},$$

3) $n=2m$，

$$H=\begin{pmatrix} O & I_m \\ -I_m & O\end{pmatrix},\quad M=\left\{A\in G \middle| AHA^{\mathrm{T}}=aH,a\in F^*\right\}.$$

反过来，$F\ne F_2$ 时，G 中不包含 $\mathrm{SL}(n,F)$ 的任一含根子群的极大子群必为上面所列子群之一。

注记 文献[1]定理 1 以及[8]定理 3.7.2a 中第 2 类极大子群中有两个例外情形，很显然两个例外情形不满足“M 与 $\mathrm{SL}(n,F)$ 生成 G”这一假设，不在我们讨论之列。

下面，我们依次来给出本文两个定理的证明。

定理 1.1 的证明 设 S 是 R 的极大理想，定义 f_S 如(*)式，它的同态核 $K \le M$，设 G 的子群 X 真包含 M，则 $f_S(X)$ 真包含 $f_S(M)$，由引理 2.1 知，$f_S(M)$ 是 $f_S(G)$ 的极大子群，因此有

$$f_S(X) = f_S(G).$$

对每个 $g \in G$，有

$$f_S(g) \in f_S(X) = f_S(G),$$

因而存在 $z \in X$ 使得

$$f_S(g) = f_S(z) \in f_S(X).$$

这时有

$$f_S\left(gz^{-1}\right) = f_S(g) f_S(z)^{-1} = I,$$

$$gz^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f_S < M < X.$$

X 包含 gz^{-1} 及 z，从而包含它们的乘积 $g = \left(gz^{-1}\right)z \in X$，这说明了 G 中所有的 $g \in X$。从而 $X = G$。这证明了 M 是 G 的极大子群。

证毕。

定理 1.2 的证明 设 S 是 R 的极大理想，定义 f_S 如(*)式，首先，考虑到 M 的每个根子群

$$T_{ij} = \left\{T_{ij}(b) \mid i \ne j, b \in R\right\}$$

在群同态 f_S 下的象为

$$f_S\left(T_{ij}\right) = \left\{T_{ij}(s) \middle| s \in F\right\},$$

它是 $\mathrm{SL}(n,F)$ 的根子群。因此 $f_S(M)$ 是 $f_S(G)$ 的含根子群的子群。如果存在 $f_S(G)$ 的真子群 Y 真包含 $f_S(M)$，则

$$X = f_S^{-1}(Y) = \left\{g \in G \middle| f_S(g) \in Y\right\}$$

是 G 的真子群且真包含 M，与 M 的极大性矛盾。

因此只有两种可能的情形：情形 1. $f_S(M)$ 是 $f_S(G)$ 的极大子群；情形 2. $f_S(M) = f_S(G)$。

情形 1. 如果 M 不包含 $\mathrm{Ker}\, f_S$，此时 M 与 $\mathrm{SL}(n,F)$ 生成 G，则

$$f_S^{-1}(M) = M\mathrm{Ker}\, f_S$$

是 G 的真子群且包含 M，与 M 的极大性矛盾。因此，此时 $M \ge \mathrm{Ker}\, f_S$。当 $F \ne F_2$ 时，由引理 2.1 知 $f_S(M)$ 是 $f_S(G)$ 的 3 类极大子群之一，于是 M 是定理 1.1 所说的 3 类子群之一。

情形 2. $f_S(M) = f_S(G)$。

对每个 $g \in G$，存在 $z \in M$ 使得

$$f_S(g) = f_S(z),$$

从而

$$f_S\left(gz^{-1}\right) = f_S(g) f_S(z)^{-1} = I, \quad gz^{-1} \in \mathrm{Ker}\, f_S.$$

如果 $M \ge \mathrm{Ker}\, f_S$，则由 M 包含 gz^{-1} 及 z 可知 M 包含它们的乘积 $\left(gz^{-1}\right)z = g$。这导致 $M = G$，与 M 是 G 的极大子群矛盾。因此 M 不能包含 $\mathrm{Ker} f_S$，$M \cap \mathrm{Ker}\, f_S$ 是 M 的真子群。如果存在 $\mathrm{Ker} f_S$ 的真子群 K_1

真包含 $M \cap \mathrm{Ker}\, f_S$，则 MK_1 是 G 的真子群且真包含 M，与 M 的极大性矛盾。这迫使 $M \cap \mathrm{Ker}\, f_S$ 是 $\mathrm{Ker}\, f_S$ 的极大子群。

证毕。

注记 我们猜想情形 2 中 $\mathrm{Ker}\, f_S$ 的极大子群 $M \cap \mathrm{Ker}\, f_S$ 具有以下形式：

$$M \cap \mathrm{Ker}\, f_S = \left\{ A \in G \middle| A - I \in L^{n\times n} \right\},$$

其中，L 是 R 中真包含于 S 的某个极大理想。此结论有待探究。

参考文献 (References)

[1] 李尚志. $\mathrm{PSL}(n,F)$ 中几类极大子群[J]. 数学学报, 1983, 26(5): 613-621.

[2] 李尚志, 查建国. 射影辛群 $\mathrm{PSp}(2n,F)$ 中几类极大子群[J]. 中国科学(A 辑), 1982(6): 3-7.

[3] Li, S. (1987) Maximal Subgroups Containing Short-Root Subgroups in $\mathrm{PSp}(2n,F)$. *Acta Mathematica Sinica*, **3**, 82-91. https://doi.org/10.1007/BF02564948

[4] 李尚志, 查建国. $\mathrm{Sp}(2n,F_2)$ 中含长根子群的极大子群系[J]. 数学研究与应用, 1985, 5(2): 45-48.

[5] 李尚志, 查建国. 有限域上射影特殊酉群的几类极大子群[J]. 中国科学(A 辑), 1982(2): 125-131.

[6] 李尚志. $\mathrm{PSU}(n,K,f)(\nu(f)\geq 1)$ 中含根子群的极大子群[J]. 中国科学(A 辑), 1986, 29(5): 632-641.

[7] 李尚志. $\mathrm{P}\Omega(n,F,Q)$ 中含根子群的极大子群[J]. 中国科学(A 辑), 1985, 15(3): 193-205.

[8] 李尚志. 典型群的子群结构[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1998.