Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(5), 408-416
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.75053

Hans汉斯

Global Attractivity for a Linear Dynamic Equation with a Distributed Delay on Time Scales

Mingchun Shu[1], Zhenkun Huang[2]

[1]Chengyi College University, Jimei University, Xiamen Fujian
[2]School of Science, Jimei University, Xiamen Fujian
Email: mcshu@jmu.edu.cn, hzk974226@jmu.edu.cn

Received: Sep. 8th, 2017; accepted: Sep. 22nd, 2017; published: Sep. 28th, 2017

Abstract

In this paper, we consider a linear dynamic equation with a distributed delay on time scales. By using Lyapunov function method, we obtain a novel sufficient condition for global attractivity of the linear delayed dynamic equation. And the linear dynamic equation with mixed delays on time scales is also discussed. Some examples are given to illustrate our results.

Keywords

Global Attractivity, Distributed Delay on Time Scales, Mixed Time Delays, Linear Dynamic Equation

时标上一类分布时滞线性动力方程的全局吸引性

舒明春[1]，黄振坤[2]

[1]集美大学 诚毅学院，福建 厦门
[2]集美大学 理学院，福建 厦门
Email: mcshu@jmu.edu.cn, hzk974226@jmu.edu.cn

收稿日期：2017年9月8日；录用日期：2017年9月22日；发布日期：2017年9月28日

摘 要

本文研究时标上一类具有分布时滞的线性动力方程，利用Lyapunov函数方法，得到了该方程全局吸引性

文章引用: 舒明春, 黄振坤. 时标上一类分布时滞线性动力方程的全局吸引性[J]. 理论数学, 2017, 7(5): 408-416.
DOI: 10.12677/pm.2017.75053

的一个充分条件，并且进一步分析了具有混合时滞的线性动力方程在时标上的全局吸引性。最后文章给出了几个例子予以说明。

关键词

全局吸引性，时标上分布时滞，混合时滞，线性动力方程

1. 引言

动力方程模型在从经济到工业各个领域中都发挥了重要作用，比如管道中水的流动变化，一年中鱼群数量的变化，具有有限次出入的交通流量变化等等。这其中有的是连续过程，有的是离散过程，有的兼有连续和离散。连续过程和离散过程在以往要分别利用微分方程和差分方程来进行研究，得出一些相似而又有差异的结果。而如今由 Stefan Hilger [1]创立的时标理论能将这些结果统一起来，并同时揭示了这些结果的差异。而且更有意义的是它不局限于单纯的连续或离散，它能很好地解决诸多兼有连续和离散的模型。这在以前是不可能做到的。时标理论近年来正受到越来越广泛的关注。而对于时标上的动力方程的研究也正吸引了不少眼球，许多前沿的结果被推广到时标上(参看[1]-[4])。其中时标上的一阶线性动力方程 $x^{\Delta}(t)+q(t)x(t)=f(t)$ 得以详细讨论。

实际上不容忽视的是动力系统往往存在时滞现象，而时滞可能给系统带来不确定的影响，需要给予充分的考虑，Yu, J.S.和 Cheng, S.S.曾在[5]中讨论过一类时滞差分方程 $\Delta x_n+q(t)x_{n-\tau}=0$，2009 年周展、李红娟在[6]中就时标上一类时滞微分方程 $x^{\Delta}(t)+q(t)x(t-\tau)=0$ 的全局吸引性做了研究，给出了相关条件。

现实中，时滞还可能不仅仅来自于过去某一点，而是可表达为过去某一段时间上状态变量的积分，即分布时滞。许多学者在动力系统研究中逐步开始把分布时滞考虑进来(参看文献[7] [8] [9])。本文首次就如下具分布时滞线性动力方程的全局吸引性做了讨论：

$$x^{\Delta}(t)+q(t)\int_0^{\tau}K(u)x(t-u)\Delta u=0,\ t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}} \tag{1}$$

受文献[9]和[10]的启发，接下来综合考虑离散时滞和分布时滞的双重作用，对如下具混合时滞的线性动力方程的全局吸引性也做了探讨：

$$x^{\Delta}(t)+p(t)x(t-\zeta)+q(t)\int_0^{\tau}K(u)x(t-u)\Delta u=0,\ t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{T}$ 表示某一无界时标，$t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}=[t_0,+\infty)\cap\mathbf{T}$，$x(t)$ 表示 t 时刻的系统状态，函数 $p(t)$ 和 $q(t)$ 非负有界并且右密连续，$\overline{p}=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbf{T}}}p(t)$，$\overline{q}=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbf{T}}}q(t)$。$\zeta$ 和 τ 为非负常数，并且 $t\pm\zeta\in\mathbf{T}$。$\mu(t)$ 是 $\mathbf{T}$ 的距离函数，$\overline{\mu}=\sup_{t\in\mathbf{T}}\mu(t)$。$K(u):[0,\tau]_{\mathbf{T}}\to[0,+\infty)$ 右连续且满足

$$\int_0^{\tau}K(u)\Delta u=1 \tag{3}$$

利用 Lyapunov 函数方法和引理 1，本文得到方程(1)和(2)全局吸引的两个充分条件即定理 1 和定理 2。

2. 预备知识

首先给出时标上一些基本定义和有关引理(参看文献[1]和[2])，时标 $\mathbf{T}$ 是实数 $\mathbf{R}$ 上任一非空子集。对于任何 $t\in\mathbf{T}$，定义 t 的前跳算子为 $\sigma(t)=\{s\in\mathbf{T}:s>t\}$。若 $\sigma(t)>t$，称 t 为右扩散；若 $\sigma(t)=t$ 且 $t<\sup\mathbf{T}$，称 t 为右稠密。定义距离函数 $\mu(t)=\sigma(t)-t$。此外集合 $\mathbf{T}^k$ 定义如下：如果 $\mathbf{T}$ 的最大点为左扩散点 $\mathbf{T}^k=\mathbf{T}-\{m\}$；否则，$\mathbf{T}^k=\mathbf{T}$。若函数 $f:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ 在每个右稠密点处连续，并且在右稠密点处存在左极限，则称 f 为右稠密连续，简称右密连续。

定义 1：设 $f:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$，当且仅当对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 t 的一个邻域 U，使得

$$\left|f(\sigma(t))-f(s)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)\right|\le\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|,\forall s\in U\cap T,t\in T^k$$

成立，则称 f 在 t 处 delta 可导，记为 $f^{\Delta}(t)$。

可以证得：

1) 若 f 在 t 处连续且 t 为右扩散点，则 $f^{\Delta}(t)=\dfrac{f(\sigma(t))-f(t)}{\sigma(t)-t}$；

2) 若 f 在 t 处连续且 t 为右稠密点，则 $f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\dfrac{f(s)-f(t)}{s-t}$。

假设函数 $f,g:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ 在 $t\in\mathbf{T}^k$ 处 delta 可导，则乘积函数 fg、和函数 $f\pm g$ 也都在 t 处 delta 可导，即

$$(fg)^{\Delta}=f^{\Delta}(t)f(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

$$(f(t)\pm g(t))^{\Delta}=f^{\Delta}(t)\pm g^{\Delta}(t)$$

定义 2：函数 $F:\mathbf{T}^k\to\mathbf{R}$ 被称为 $f:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ 的 delta 原函数，如果对所有的 $t\in\mathbf{T}^k$ 有 $F^{\Delta}(t)=f(t)$ 成立，于是可以定义 f 的积分为

$$\int_0^t f(s)\Delta s=F(t)-F(a),\quad t\in\mathbf{T}^k$$

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s=f(t)\mu(t),\quad t\in\mathbf{T}^k$$

定义 3：对于任一初始值，方程(1)的解 $x(t)$ 都有 $\lim_{t\to+\infty}x(t)=x_0$ 成立，则 x_0 称为方程(1)的全局吸引子，方程(1)的解 $x(t)$ 是全局吸引的。

3. 主要结果

首先证明一个时标上的二重变上限积分的求导公式如下：

引理 1：设函数 $f:\mathbf{T}\to\mathbf{R}$ 在 $t\in\mathbf{T}^k$ 处 delta 可导，则

$$\left(\int_a^t\int_u^t f(s)\Delta s\Delta u\right)^{\Delta}=\int_0^t f(t)\Delta u+\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s,\ t\in\mathbf{T}^k$$

证明：设函数 $F:\mathbf{T}^k\to\mathbf{R}$ 是 f 的 delta 原函数，由定义 1 和 2 可得

$$\int_a^t\int_u^t f(s)\Delta s\Delta u=\int_a^t(F(t)-F(u))\Delta u,\ t\in\mathbf{T}^k$$

和

$$\left(\int_a^t\int_u^t f(s)\Delta s\Delta u\right)^\Delta = \left(\int_a^t \big(F(t)-F(u)\big)\Delta u\right)^\Delta$$
$$= \left(\int_a^t F(t)\Delta u\right)^\Delta - \left(\int_a^t F(u)\Delta u\right)^\Delta$$
$$= \big(F(t)(t-a)\big)^\Delta - F(t)$$
$$= f(t)(t-a)+F(\sigma(t))-F(t)$$
$$= \int_a^t f(t)\Delta u + \int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s$$

引理得证。

下面给出方程(1)的全局吸引性的一个充分条件。

定理 1：如果

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u > \left(\tau+\frac{\overline{\mu}}{2}\right)\overline{q}^2,\ t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$$

成立，其中函数 $q(\cdot)$ 非负有界并且右稠密连续，$\overline{q}=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbf{T}}} q(t)$，函数 $K(u):[0,\tau]_{\mathbf{T}}\to[0,+\infty)$ 右连续且满足 $\int_0^\tau K(u)\Delta u=1$，则方程(1)的解是全局吸引的。

证明：将(1)式变形可得

$$\left(x(t)-\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)x(s)\Delta s\Delta u\right)^\Delta = -x(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u,\ t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}} \tag{4}$$

设

$$y(t)=x(t)-\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)x(s)\Delta s\Delta u \tag{5}$$

则有

$$y^\Delta(t)=-x(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u,\ t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}} \tag{6}$$

构造 Lyapunov 函数 $V(t)$ 如下：

$$V(t)=y^2(t)+J(t)$$

其中

$$J(t)=\int_0^\tau \overline{q}K(u)\left[\int_{t-u}^t\left(\int_s^t q(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta s\right]\Delta u$$

显然 $V(t)\ge 0$，由(5)和(6)式得

$$\big(y^2(t)\big)^\Delta = y^\Delta(t)y(t)+y(\sigma(t))y^\Delta(t)$$
$$=\mu(t)\left[y^\Delta(t)\right]^2+2y^\Delta(t)y(t)$$
$$=\mu(t)x^2(t)\left(\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\right)^2-2x^2(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u$$
$$+2x(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\cdot\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)x(s)\Delta s\Delta u$$

由不等式 $2ab\le a^2+b^2$ 和(3)式，上式可以推得

$$\begin{aligned}\left(y^2(t)\right)^\Delta &\le \bar{\mu}x^2(t)\left(\int_0^\tau K(t)\bar{q}\Delta u\right)^2 - 2x^2(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u \\ &\quad + \int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u \cdot \int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t q(s+u)\left(x^2(t)+x^2(s)\right)\Delta s\right)\Delta u \\ &\le \bar{\mu}x^2(t)\bar{q}^2 - 2x^2(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u \\ &\quad + \bar{q}\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t q(s+u)\left(x^2(t)+x^2(s)\right)\Delta s\right)\Delta u\end{aligned}$$

由引理 1 得

$$\begin{aligned}J^\Delta(t) &= \int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t \bar{q}q(t+u)x^2(t)\Delta s\right)\Delta u \\ &\quad + \int_0^\tau K(u)\left(\int_t^{\sigma(t)} \bar{q}q(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta u \\ &\quad - \int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^{\sigma(t)} \bar{q}q(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta u \\ &= \int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t \bar{q}q(t+u)x^2(t)\Delta s\right)\Delta u \\ &\quad - \int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t \bar{q}q(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta u\end{aligned}$$

而 $V^\Delta(t) = \left(y^2(t)\right)^\Delta + J^\Delta(t)$，所以有

$$\begin{aligned}V^\Delta(t) &\le \bar{\mu}x^2(t)\bar{q}^2 - 2x^2(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u \\ &\quad + \bar{q}\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t q(s+u)x^2(t)\Delta s\right)\Delta u \\ &\quad + \int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t \bar{q}q(t+u)x^2(t)\Delta s\right)\Delta u \\ &= x^2(t)\left[\bar{\mu}\bar{q}^2 - 2\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u + \bar{q}\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t q(s+u)\Delta s\right)\Delta u\right] \\ &\quad + x^2(t)\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t \bar{q}q(t+u)\Delta s\right)\Delta u \\ &\le x^2(t)\left[\bar{\mu}\bar{q}^2 - 2\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u + 2\bar{q}\int_0^\tau K(u)u\Delta u\right] \\ &\le x^2(t)\left[\bar{\mu}\bar{q}^2 - 2\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u + 2\bar{q}^2\tau\right]\end{aligned}$$

如果 $\lim_{t\to+\infty}\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u = L > \left(\tau+\frac{\bar{\mu}}{2}\right)\bar{q}^2$，则 $V^\Delta(t)<0$ 当 $t\to+\infty$。根据单调有界准则(参看[11])，当 $t\to+\infty$ 时 $V(t)$ 的极限存在，可以记为 $\lim_{t\to+\infty}V(t)=\rho\ge 0$。

令 $\alpha = L-\left(\tau+\frac{\bar{\mu}}{2}\right)\bar{q}^2$，则 $\alpha>0$，对充分大的 t，有 $V^\Delta(t)\le -\alpha x^2(t)$。设 T^* 充分大，使得

$$\int_{T^*}^{+\infty} V^\Delta(t)\Delta t \le -\int_{T^*}^{+\infty}\alpha x^2(t)\Delta t$$

于是

$$\int_{T^*}^{+\infty}\alpha x^2(t)\Delta t < V(T^*) - \rho < +\infty$$

所以有 $\lim_{t\to\infty}x(t)=0$，定理得证。

接下来给出方程(2)的全局吸引性的一个充分条件。

定理 2：如果对于 $t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}$ 有

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u>\left(\bar{\mu}+\frac{\tau+1}{2}\right)\bar{q}^2+\tau\bar{q}^3$$

$$\lim_{t\to+\infty}p(t+\zeta)>\left(\bar{\mu}+\frac{\zeta^2}{2}+\zeta+\frac{\tau}{2}\right)\bar{p}^2$$

成立，其中 $p(\cdot),q(\cdot)$ 为非负有界函数并且右稠密连续，$\bar{p}=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbf{T}}}p(t)$，$\bar{q}=\sup_{t\in[0,+\infty)_{\mathbf{T}}}q(t)$。$\zeta$ 和 τ 为非负常数，并且 $t\pm\zeta\in\mathbf{T}$。$\bar{\mu}=\sup_{t\in\mathbf{T}}\mu(t)$。$K(u):[0,\tau]_{\mathbf{T}}\to[0,+\infty)$ 右稠密连续且满足 $\int_0^\tau K(u)\Delta u=1$，则方程(2)的解是全局吸引的。

证明：(2)式变形可得：

$$\begin{aligned}&\left(x(t)-\int_{t-\zeta}^t p(s+\zeta)x(s)\Delta s-\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)x(s)\Delta s\Delta u\right)^\Delta\\&=-p(t+\zeta)x(t)-x(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u,\ t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}\end{aligned}\tag{7}$$

设

$$y(t)=x(t)-\int_{t-\zeta}^t p(s+\zeta)x(s)\Delta s-\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)x(s)\Delta s\Delta u\tag{8}$$

则有

$$y^\Delta(t)=-p(t+\zeta)x(t)-x(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u,\ t\in[t_0,+\infty)_{\mathbf{T}}\tag{9}$$

构造 Lyapunov 函数 $V(t)$ 如下：

$$V(t)=y^2(t)+R(t)+W(t)$$

其中

$$R(t)=(\zeta+1)\int_{t-\zeta}^t\int_s^t p^2(u+\zeta)x^2(u)\Delta u\Delta s$$

$$W(t)=\int_0^\tau(\bar{q}+1)K(u)\left[\int_{t-u}^t\left(\int_s^t q^2(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta s\right]\Delta u$$

显然 $V(t)\geq 0$，由(7)和(8)式得

$$\begin{aligned}\left(y^2(t)\right)^\Delta&=\mu(t)\left[y^\Delta(t)\right]^2+2y^\Delta(t)y(t)\\&=\mu(t)x^2(t)\left(p(t+\zeta)+\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\right)^2-2x^2(t)p(t+\zeta)\\&\quad-2x^2(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u+2x(t)p(t+\zeta)\int_{t-\zeta}^t p(s+\zeta)x(s)\Delta s\\&\quad+2x(t)p(t+\zeta)\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)x(s)\Delta s\Delta u\\&\quad+2x(t)\int_{t-\zeta}^t p(s+\zeta)x(s)\Delta s\cdot\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\\&\quad+2x(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\cdot\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)x(s)\Delta s\Delta u\end{aligned}$$

由不等式 $2ab\leq a^2+b^2$ 和(3)式，上式可以推得

$$
\begin{aligned}
\left(y^2(t)\right)^\Delta \le\ & 2\mu(t)x^2(t)\left(\int_0^\tau K(t)q(t+u)\Delta u\right)^2+2\mu(t)x^2(t)p^2(t+\zeta) \\
& -2x^2(t)p(t+\zeta)-2x^2(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u \\
& +\int_{t-\zeta}^t\left(p^2(t+\zeta)x^2(t)+p^2(s+\zeta)x^2(s)\right)\Delta s \\
& +\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t\left(p^2(t+\zeta)x^2(t)+q^2(s+u)x^2(s)\right)\Delta s\right)\Delta u \\
& +x^2(t)\left(\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\right)^2+\left(\int_{t-\zeta}^t p(s+\zeta)x(s)\Delta s\right)^2 \\
& +\overline{q}\int_0^\tau K(u)\int_{t-u}^t q(s+u)\left(x^2(t)+x^2(s)\right)\Delta s\Delta u
\end{aligned}
$$

由引理 1 得

$$
\begin{aligned}
R^\Delta(t)=\ & (\zeta+1)\left[\int_{t-\zeta}^t p^2(t+\zeta)x^2(t)\Delta s+\int_t^{\sigma(t)}p^2(u+\zeta)x^2(u)\Delta u\right. \\
& \left.-\int_{t-\zeta}^{\sigma(t)}p^2(u+\zeta)x^2(u)\Delta u\right] \\
=\ & (\zeta+1)\left[\zeta p^2(t+\zeta)x^2(t)-\int_{t-\zeta}^t p^2(u+\zeta)x^2(u)\Delta u\right]
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
W^\Delta(t)=\ & (\overline{q}+1)\left[\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t q^2(t+u)x^2(t)\Delta s\right)\Delta u+\int_0^\tau K(u)\left(\int_t^{\sigma(t)}q^2(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta u\right. \\
& \left.-\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^{\sigma(t)}q^2(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta u\right] \\
=\ & (\overline{q}+1)\left[\int_0^\tau K(u)q^2(t+u)x^2(t)u\Delta u-\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t q^2(v+u)x^2(v)\Delta v\right)\Delta u\right]
\end{aligned}
$$

同时利用不等式$(A_1+A_2+\cdots+A_n)^2\le n\left(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2\right)$有

$$
\begin{aligned}
V^\Delta(t)\le\ & 2\mu(t)x^2(t)\left(\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\right)^2+2\mu(t)x^2(t)p^2(t+\zeta) \\
& -2x^2(t)p(t+\zeta)-2x^2(t)\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u \\
& +\left(\zeta^2+2\zeta\right)p^2(t+\zeta)x^2(t)+\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t p^2(t+\zeta)x^2(t)\Delta s\right)\Delta u \\
& +x^2(t)\left(\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u\right)^2+\overline{q}\int_0^\tau K(u)\left(\int_{t-u}^t q^2(s+u)x^2(t)\Delta s\right)\Delta u \\
& +(\overline{q}+1)\int_0^\tau K(u)q^2(t+u)x^2(t)u\Delta u \\
\le\ & x^2(t)\left[2\overline{\mu}\overline{q}^2+2\overline{\mu}\overline{p}^2-2p(t+\zeta)-2\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u+\left(\zeta^2+2\zeta\right)\overline{p}^2\right. \\
& \left.+\overline{p}^2\int_0^\tau K(u)u\Delta u+\overline{q}^2+\overline{q}^3\int_0^\tau K(u)u\Delta u+\left(\overline{q}^2+\overline{q}^3\right)\int_0^\tau K(u)u\Delta u\right] \\
\le\ & x^2(t)\left[\left(2\overline{\mu}+\zeta^2+2\zeta\right)\overline{p}^2+\overline{p}^2\int_0^\tau K(u)u\Delta u-2p(t+\zeta)\right] \\
& +x^2(t)\left[-2\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u+2\overline{\mu}\overline{q}^2+\overline{q}^2+\left(2\overline{q}^3+\overline{q}^2\right)\int_0^\tau K(u)u\Delta u\right]
\end{aligned}
$$

如果$\lim_{t\to+\infty}\int_0^\tau K(u)q(t+u)\Delta u=M>\left(\overline{\mu}+\frac{\tau+1}{2}\right)\overline{q}^2+\tau\overline{q}^3$，而且

DOI: 10.12677/pm.2017.75053

$\lim_{t\to+\infty} p(t+\zeta)=N>\left(\bar{\mu}+\frac{\zeta^2}{2}+\zeta+\frac{\tau}{2}\right)\bar{p}^2$ 则 $V^{\Delta}(t)<0$ 当 $t\to+\infty$。根据单调有界准则(参看[11])，当 $t\to+\infty$ 时 $V(t)$ 的极限存在，可以记为 $\lim_{t\to+\infty} V(t)=\rho\ge 0$。

令 $\alpha=M+N-\left[\left(\bar{\mu}+\frac{\tau+1}{2}\right)\bar{q}^2+\tau\bar{q}^3\right]-\left(\bar{\mu}+\frac{\zeta^2}{2}+\zeta+\frac{\tau}{2}\right)\bar{p}^2$，则 $\alpha>0$，对充分大的 t，有 $V^{\Delta}(t)\le-\alpha x^2(t)$。设 T^* 充分大，使得

$$\int_{T^*}^{+\infty} V^{\Delta}(t)\Delta t\le-\int_{T^*}^{+\infty}\alpha x^2(t)\Delta t$$

于是

$$\int_{T^*}^{+\infty}\alpha x^2(t)\Delta t<V(T^*)-\rho<+\infty$$

所以有 $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$，定理得证。

4. 一些例子

在这一部分，文章给出两个例子以验证结论的有效性，并展示了在时标上讨论动力方程的优势。

例 1 对方程(1)，设 $\tau=1$，$q(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{t}$，$K(u)=1$，

1) 考虑 $\mathbf{T}=\mathbf{R}$，则原方程为

$$x'(t)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{t}\right)\int_0^1 x(t-u)\mathrm{d}u=0 \tag{10}$$

显然有 $\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\tau}K(u)q(t+u)\Delta u=\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{t+u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{3}>\left(\tau+\frac{\bar{\mu}}{2}\right)\bar{q}^2$，根据定理 1，(10)的解是全局吸引的。

2) 考虑 $\mathbf{T}=\mathbf{Z}$，在原方程为

$$x^{\Delta}(t)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{t}\right)\int_0^1 x(t-u)\mathrm{d}u=0 \tag{11}$$

显然有 $\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\tau}K(u)q(t+u)\Delta u=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{t+u}\right)=\frac{1}{3}>\left(\tau+\frac{\bar{\mu}}{2}\right)\bar{q}^2$，根据定理 1，(11)的解是全局吸引的。

例 2 对于方程(2)，考虑 $\mathbf{T}=[2k,2k+1]$，$k=0,1,2,\cdots$，设 $\tau=1$，$\zeta=2$，$K(u)=1$，$p(t)=\frac{1}{6}-\frac{1}{t^2}$，$q(t)=\frac{1}{5}-\frac{1}{t}$，则原方程为

$$x^{\Delta}(t)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{t^2}\right)x(t-\zeta)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{t}\right)\int_0^1 x(t-u)\mathrm{d}u=0 \tag{12}$$

于是有

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\tau}K(u)q(t+u)\Delta u=\begin{cases}\lim\limits_{t\to+\infty} q(t)=\frac{1}{5} & t\in[2k+1,2k+2)\\ \lim\limits_{t\to+\infty}\int_t^{t+1}q(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{5} & t\in[2k,2k+1)\end{cases}$$

可见 $\frac{1}{5} > \left(\bar{\mu} + \frac{\tau+1}{2}\right)\bar{q} + \tau\bar{q}^3$，且 $\lim_{t\to+\infty} p(t+\zeta) = \frac{1}{6} > \left(\bar{\mu} + \frac{\zeta^2}{2} + \zeta + \frac{\tau}{2}\right)\bar{p}^2$，由定理 2，可知(12)是全局吸引的。

基金项目

本文由福建省中青年教师教育科研项目基金资助(JA15649)。

参考文献 (References)

[1] Bohner, M. (2002) and Peterson, A. Advances in Dynamic Equations on Time Scale. Birkhauser, Boston.

[2] Bohner, M. and Peterson, A. (2001) Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction Applications. Birkhauser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0201-1

[3] Dahal, R. (2009) Dynamic Equations on Time Scales. *Dissertations & Theses, Gradworks*, **38**, 253-256.

[4] Xu, Y.J. and Xu, Z.T. (2009) Oscillation Criteria for Two-Dimensional Dynamic Systems on Time Scales. *Computational & Applied Mathematics*, **225**, 9-19. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.06.010

[5] Yu, J.S. and Cheng, S.S. (1994) A Stability Criterion for a Neutral Difference Equation with Delay. *Applied Mathematics Letters*, **7**, 75-80. https://doi.org/10.1016/0893-9659(94)90097-3

[6] 周展，李红娟. 一类时标上时滞动力方程的全局吸引性[J]. 广州大学学报(自然科学版), 2009, 8(6): 1-4.

[7] Tan, Y.X. and Huang, Z.K. (2016) Synchronization of Drive-Response Networks with Delays on Time Scales. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, **PP**, 1-10.

[8] Matsumoto, A., Szidarovszky, F. and Yoshida, H. (2011) Dynamics in Linear Cournot Duopolies with Two Time Delays. *Computational Economics*, **38**, 311-327. https://doi.org/10.1007/s10614-011-9295-6

[9] Ruan, S.G. and Filil, R. (2004) Dynamics of a Two-Neuron System with Discrete and Distributed Delays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **191**, 323-342. https://doi.org/10.1016/j.physd.2003.12.004

[10] 杨小婧，陈斯养. 具有混合时滞血液模型的 Hopf 分支与数值分析[J]. 计算机工程与应用, 2010, 46(31): 139-142.

[11] Rudin, W. 数学分析原理[M]. 第 3 版. 北京：机械工业出版社, 2004.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org