Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(6), 447-453
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76058

The Estimation of Growth of Solutions of a Class of Higher Order Complex Differential Equations

Zhigao Qin, Jianren Long*

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou
Email: *longjianren2004@163.com

Received: Oct. 26th, 2017; accepted: Nov. 9th, 2017; published: Nov. 14th, 2017

Abstract

We study the growth of solutions of higher order complex differential equations by using Nevanlinna theory of meromorphic functions. Some estimations of growth of solutions of the equation are obtained which are improvements of previous results.

Keywords

Complex Differential Equations, Entire Function, Lower Order, Higher Order, Infinite Order

一类高阶复微分方程解的增长性的估计

覃智高，龙见仁*

贵州师范大学，数学科学学院，贵州 贵阳
Email: *longjianren2004@163.com

收稿日期：2017年10月26日；录用日期：2017年11月9日；发布日期：2017年11月14日

摘　要

本文利用亚纯函数的Nevanlinna理论研究了高阶复微分方程解的增长性，得到了方程解的增长性的一些估计，这些结果推广了已有的结果。

*通讯作者。

文章引用: 覃智高, 龙见仁. 一类高阶复微分方程解的增长性的估计[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 447-453.
DOI: 10.12677/pm.2017.76058

关键词

复微分方程，整函数，下级，超级，无穷级

1. 引言和主要结果

本文使用亚纯函数的 Nevanlinna 理论的标准记号，具体细节参看文献[1] [2] [3]。对复平面上的亚纯函数 $f(z)$，用 $\rho(f), \mu(f)$ 分别表示亚纯函数 $f(z)$ 的级、下级，回顾具体定义如下：

定义 1：设 $f(z)$ 为复平面上的亚纯函数，则 $f(z)$ 的级、下级分别定义如下：

$$\rho(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}, \quad \mu(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ T(r,f)}{\log r}$$

为了更加精确刻画快速增长的亚纯函数的增长性，超级是一个常用的度量。

定义 2：设 $f(z)$ 为复平面上的亚纯函数，则 $f(z)$ 的超级、下超级分别定义为：

$$\rho_2(f) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{\log r}, \quad \mu_2(f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\log^+ \log^+ T(r,f)}{\log r}$$

另外，我们还需要下面的定义。

定义 3：集合 $E \subset [0,+\infty)$，则 E 的 Lebesgue 线性测度为 $m(E) = \int_E \mathrm{d}t$，集合 $F \subset [1,+\infty)$，则 F 的对数测度为 $m_l(F) = \int_F \frac{\mathrm{d}t}{t}$。集合 $E \subset [0,+\infty)$ 的上密度和下密度定义如下：

$$\overline{\mathrm{dens}}E = \limsup_{r\to\infty} \frac{m(E\cap[0,r])}{r}, \quad \underline{\mathrm{dens}}E = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(E\cap[0,r])}{r}$$

集合 $F \subset [1,+\infty)$ 的上对数密度和下对数密度定义如下：

$$\overline{\log\mathrm{dens}}F = \limsup_{r\to\infty} \frac{m_l(F\cap[1,r])}{\log r}, \quad \underline{\log\mathrm{dens}}F = \liminf_{r\to\infty} \frac{m_l(F\cap[1,r])}{\log r}$$

本文主要研究线性微分方程，

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z) f^{(k-1)} + \cdots + A_1(z) f' + A_0(z) f = 0 \tag{1.1}$$

解的增长性问题，其中 $A_j(z)$ 是整函数， $j = 0,1,\cdots,k-1$。下面先回顾两个典型的结果。

定理 A [4]：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j = 0,1,\cdots,k-1$，若 $\max\{\rho(A_j): j \neq 0\} < \rho(A_0)$，则方程(1.1)的任意非平凡解是无穷级。

定理 B [5]：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j = 0,1,\cdots,k-1$，若存在一个 $s \in \{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $\max\{\rho(A_j): j \neq s\} < \rho(A_s) \le \frac{1}{2}$，则方程(1.1)的任意非平凡解是无穷级。

从定理 A 和定理 B，方程(1.1)解的增长性遗留的主要问题是：若主导系数为 $A_s(z)$ 且

$\rho(A_s)>\frac{1}{2}, s\in\{1,2,\cdots,k-1\}$，方程(1.1)的任意非平凡解是否为无穷级?国内外很多学者关注了这个问题，并且获得了很多结果。参看文献[6]-[13]等。这里我们陈述几个与本文相关的结果。

陈宗煊和杨重俊 2000 年在文献[12]中估计了方程(1.1)无穷级解的超级。

定理 C [12]：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j=0,1,\cdots,k-1$，若 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0\}<\rho(A_0)<+\infty$，则方程(1.1)的任意非平凡解 f 满足 $\rho_2(f)=\rho(A_0)$。

定理 D [12]：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j=0,1,\cdots,k-1$，若存在一个 $s\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $\max\{\rho(A_j): j\neq s\}<\rho(A_s)<\frac{1}{2}$，则方程(1.1)的任意非平凡解 f 满足 $\rho_2(f)=\rho(A_s)$。

在文献[13]中涂金等人证明了下列结论：

定理 E [13]：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j=0,1,\cdots,k-1$，若 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0\}<\mu(A_0)<\rho(A_0)<+\infty$，则方程(1.1)的任意非平凡解 f 满足 $\mu(A_0)=\mu_2(f)\leq\rho_2(f)=\rho(A_0)$。

特别地，若 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0\}<\mu(A_0)=\rho(A_0)<+\infty$，则方程(1.1)的任意非平凡解 f 满足 $\mu_2(f)=\rho_2(f)=\rho(A_0)$。

定理 F [13]：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j=0,1,\cdots,k-1$，若存在 $s\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0,s\}<\mu(A_0)<\frac{1}{2}$ 且 $A_s(z)$ 有一个有穷亏值，则方程(1.1)的任意非平凡解 f 满足 $\mu(A_0)\leq\rho_2(f)=\max\{\rho(A_0),\rho(A_s)\}$。

定理 F 使用了系数的下级增长性去刻画方程解的增长性。根据 $A_s(z)$ 有一个有穷亏值，知 $\mu(A_s)\geq\frac{1}{2}$，从而表明 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0,s\}<\mu(A_0)<\frac{1}{2}\leq\mu(A_S)$。

最近文献[14]采用了两个系数的下级增长性去研究复微分方程解的增长性，本文利用这个思路研究了方程(1.1)解的增长性，得到了相比[14]更广泛的结果。

定理 1：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j=0,1,\cdots,k-1$，若存在 $s\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0,s\}<\mu(A_0)$ 且 $\mu(A_s)<\mu(A_0)$，则方程(1.1)的任意非平凡解 f 满足 $\rho_2(f)\geq\mu(A_0)$。

定理 2：设 $A_j(z)$ 是整函数， $j=0,1,\cdots,k-1$，若存在 $s\in\{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0,s\}<\mu(A_0)<\mu(A_s)<\frac{1}{2}$，则方程(1.1)的任意非平凡解 f 是无穷极。

注：定理 1 和定理 2 表明方程(1.1)的任意非平凡解为无穷级，同时也表明主导系数的级大于 $\frac{1}{2}$ 是可能的。

2. 引理

引理 1 [15]：设 $f(z)$ 是超越亚纯函数， $\alpha>1$ 是常数，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在对数测度有穷的集合 $E_1\subset[1,+\infty)$ 和常数 $B>0$，B 依赖于 α 和整数 m,n，$0\leq m<n$，使得对任意满足 $|z|=r\notin[0,1]\cup E_1$ 的 z 有：

$$\left|\frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)}\right|\leq B\left(\frac{T(\alpha r,f)}{r}\left(\log^{\alpha} r\right)\log T(\alpha r,f)\right)^{n-m}$$

引理 2 [15]：设 f 是级为有穷的超越亚纯函数，对任意给定的实常数 $\varepsilon>0$，及两个整数 k,j，且 $k>j\geq 0$，则下列结论成立：

1) 存在对数测度有穷的集合 $E\subset(0,+\infty)$，使得对任意满足 $|z|\notin E$ 的 z 有，

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \le |z|^{(k-j)(\rho(f)-1+\varepsilon)}$$

2) 存在对数测度有穷的集合 $F \subset (0,+\infty)$，使得对任意满足 $|z| \notin F$ 的 z 有，

$$\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\right| \le |z|^{(k-j)(\rho(f)+\varepsilon)}$$

引理 3 [14]：设 $T:(0,+\infty)\to(1,+\infty)$ 是下级 μ 为有穷且单调递增的非常数函数，即

$$\mu = \liminf_{r\to\infty}\frac{\log T(r)}{\log r} < +\infty$$

对 $\mu_1 > \mu$，定义

$$E(\mu_1) = \left\{ r \ge 1 : T(r) < r^{\mu_1} \right\}$$

则 $\overline{\log\text{dens}}(E(\mu_1)) > 0$。

引理 4：设 $A_j(z)$ 是整函数，$j = 0,1,\cdots,k-1$，若存在 $s \in \{0,1,\cdots,k-1\}$，使得 $a = \max\{\rho(A_j): j \ne 0,s\} < \mu(A_0)$ 且 $\mu(A_s) < \mu(A_0)$。令 $b = \max\{a,\mu(A_s)\}$，则对任意给定的 $\varepsilon \in \left(0,\frac{\mu(A_0)-b}{2}\right)$，存在一个上对数密度大于 0 的集合 $E \subset [1,+\infty)$，使得对任意的 $r \in E$ 有：

$$T(r,A_s) < r^{b+\varepsilon} \tag{2.1}$$

$$T(r,A_j) < r^{b+\varepsilon},\ j \ne 0,s \tag{2.2}$$

$$T(r,A_0) > r^{\mu(A_0)-\varepsilon} \tag{2.3}$$

证明：对任意给定的 $\varepsilon \in \left(0,\frac{\mu(A_0)-b}{2}\right)$，由 $\rho(A_j) < b,\ j \ne 0,s$，及级的定义知，存在常数 $r_0 > 1$，使得当 $r > r_0$ 时，有

$$T(r,A_j) < r^{b+\varepsilon},\ j \ne 0,s$$

又 $\mu(A_s) < b$，对上述给定的 ε，由引理 3，存在集合 $E(b) = \left\{ r \ge 1 : T(r,A_s) < r^{b+\varepsilon} \right\}$，满足 $\overline{\log\text{dens}}(E(b)) > 0$。

对 A_0 由下级的定义，对上述给定的 ε，存在常数 $r_1 > 1$，使得当 $r > r_1$ 时，有

$$T(r,A_0) > r^{\mu(A_0)-\varepsilon}$$

令 $E = (r_0,+\infty)\cap(r_1,+\infty)\cap E(b)$，则 $\overline{\log\text{dens}}(E) > 0$，且当 $r \in E$ 时(2.1) (2.2)和(2.3)成立，结论得证。

引理 5 [16]：设 $f(z)$ 是下级 $\mu(f) \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ 整函数，记

$$A(r) = \inf_{|z|=r}\log|f(z)|, \qquad B(r) = \sup_{|z|=r}\log|f(z)|$$

则对任意 $\alpha \in \left(\mu(f),\frac{1}{2}\right)$，有

$$\overline{\log\text{dens}}\left(\left\{ r \ge 1 : A(r) > \cos(\pi\alpha)B(r) \right\}\right) > 1 - \frac{\mu(f)}{\alpha}$$

引理 6 [12]：设 $f(z)$ 是超越整函数，则存在对数测度有穷的集合 $E\subset(0,+\infty)$，使得对任意的 z 满足 $|z|=r\notin E$ 且 $|f(z)|=M(r,f)$ 及任意的正整数 j，有

$$\left|\frac{f(z)}{f^{(j)}(z)}\right|\le 2r^{j}$$

3. 定理的证明

定理 1 的证明：令 $a=\max\{\rho(A_j): j\neq 0,s\}<\mu(A_0),\mu(A_s)<\mu(A_0)$，$b=\max\{a,\mu(A_s)\}<\mu(A_0)$。设 f 是方程(1.1)的任一非平凡解，由引理 1，存在对数测度有穷的集合 $E_1\subset[1,+\infty)$，对任意满足 $|z|\notin E_1\cup[0,1]$ 的 z 有，

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f(z)}\right|\le B\cdot T(2r,f)^{2j},\quad j=1,2,\cdots,k-1 \tag{3.1}$$

其中 B 为常数且 $B>0$。

由引理 4，对任意给定的 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\mu(A_0)-b}{2}\right)$，存在集合 $E_2\subset[1,+\infty)$，满足 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E_2)>0$，对任意的 $r\in E_2$，(2.1)~(2.3)成立，由方程(1.1)得，

$$|A_0(z)|\le\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)}\right|+\ldots+|A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \tag{3.2}$$

令 $E=E_2\setminus(E_1\cup[0,1])$，则 $\overline{\log\mathrm{dens}}(E)>0$。因此，存在序列 $\{r_j\}\subset E$，满足当 $j\to\infty$ 时，$r_j\to\infty$，对 $|z|=r_j$ 的 z 有(2.1)~(2.3)和(3.1)成立，再结合(3.2)得：

$$r_j^{\mu(A_0)-\varepsilon}<T(r_j,A_0)\le KB\cdot T(2r_j,f)^{2k}\left(1+kr_j^{b+\varepsilon}\right) \tag{3.3}$$

由 $b+\varepsilon<\mu(A_0)-\varepsilon$ 知，当 j 充分大时，有

$$\rho_2(f)\ge\mu(A_0)$$

定理 2 的证明：假设方程(1.1)存在一个解 f 使得 $\rho(f)<\infty$，由方程(1.1)可得，

$$\begin{aligned}|A_s(z)|\le&\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\cdots+|A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\\&+|A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+|A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+|A_0(z)|\left|\frac{f(z)}{f(z)}\right|\\\le&\left|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+|A_{k-1}(z)|\left|\frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\cdots+|A_{s+1}(z)|\left|\frac{f^{(s+1)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|+\left|\frac{f(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\\&\times\left\{|A_{s-1}(z)|\left|\frac{f^{(s-1)}(z)}{f(z)}\right|+|A_{s-2}(z)|\left|\frac{f^{(s-2)}(z)}{f(z)}\right|+\cdots+|A_1(z)|\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|+|A_0(z)|\right\}\end{aligned} \tag{3.4}$$

由引理 2(1)，对任意的 $\varepsilon>0$，存在对数测度有穷的集合 $E_0\subset[1,+\infty)$，对任意满足 $|z|=r\notin E_0\cup[0,1]$ 的 z 有，

$$\left|\frac{f^{(j)}(z)}{f^{(s)}(z)}\right|\le|z|^{k\rho(f)},\quad j>s \tag{3.5}$$

令 $\mu(A_0)<b<\mu(A_s)$，由 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0,s\}<\mu(A_0)<\mu(A_s)<\frac{1}{2}$，对任意 $\varepsilon>0$，由 $\max\{\rho(A_j): j\neq 0,s\}<b$ 及级的定义知，存在 $r_0>1$，当 $|z|=r>r_0$ 时，有

$$\left|A_j(z)\right|\leq \exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\},\ j\neq 0,s \tag{3.6}$$

由 $\mu(A_s)<\frac{1}{2}$，应用引理 5，存在一个上对数密度大于 $1-\frac{\mu(A_s)}{\alpha}$ 的集合 $E_1\subset[1,+\infty)$，$\alpha\in\left(\mu(A_s),\frac{1}{2}\right)$，使得对任意满足 $|z|=r\in E_1\setminus[0,r_1]$ 的 z 有，

$$\left|A_s(z)\right|\geq \exp\left\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\} \tag{3.7}$$

令 $E_a=\{E_1\cap[a,+\infty)\}\setminus\{[0,a]\cup E_0\}, a=\max\{r_0,r_1\}$，由(3.4)~(3.7)，对所有满足 $|z|=r\in E_a$ 的 z 有，

$$\exp\left\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\}\leq\left|A_s(z)\right|\leq(k-s)\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}|z|^{k\rho(f)}+\left|\frac{f}{f^s(z)}\right|\left\{(s-2)\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}|z|^{k\rho(f)}+\left|A_0(z)\right|\right\} \tag{3.8}$$

由引理 6，存在常数 $R>0$，使得对任意 $r>R$，存在序列 $\{z_r\},|z_r|=r$ 有，

$$\left|\frac{f(z_r)}{f^{(s)}(z_r)}\right|\leq 2r^s \tag{3.9}$$

联立(3.8)和(3.9)，存在集合 $E=E_a\cap[R,+\infty)$，由上有 $\overline{\log\text{dens}}(E)=\overline{\log\text{dens}}(E_a)>0$ 使得对任意的 $|z|=r\in E$ 的 z 有，

$$\exp\left\{r^{\mu(A_s)-\varepsilon}\right\}\leq\left|A_s(z)\right|\leq kr^s\cdot\exp\left\{r^{b+\varepsilon}\right\}\cdot|z|^{k\rho(f)}+2r^s\left|A_0(z)\right| \tag{3.10}$$

由(3.10)当 r 充分大时，有 $\mu(A_s)<\mu(A_0)$，与已知矛盾。故方程(1.1)的任意非平凡解 f 是无穷级。

基金项目

国家自然科学基金(编号：11501142)资助；贵州省科学技术基金(编号：黔科合 J 字[2015]2112 号)资助；贵州师范大学 2016 年博士科研启动项目资助；2016 年度贵州省“千”层次创新型人才项目资助。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W.K. (1964) Meromorphic Functions. Qxford Mathematical Monographs Clarendon press, Oxford.

[2] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. Walter de Gruyter, Berlin.

[3] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin.

[4] Frei, M. (1961) Über die Losungen Linearer Differential Gleichungen mit Ganzen Funktionen als Koeffizienten. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **35**, 201-222. https://doi.org/10.1007/BF02567016

[5] Hellerstein, S., Miles, J. and Rossi, J. (1992) On the Growth of Solutions of Certain Linear Differential Equations. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, **17**, 343-365. https://doi.org/10.5186/aasfm.1992.1723

[6] Long, J.R., Qiu, C.H. and Wu, P.C. (2014) On the Growth of Solutions of a Class of Higher Order Linear Differential Equations with Extremal Coefficients. *Abstract and Applied Analysis*, Article ID: 305710, 7 pages.

[7] Tu, J. and Long, T. (2009) Oscillation of Complex High Order Linear Differential Equations with Coefficients of Finite Iterated Order. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **66**, 1-13. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2009.1.66

[8] Bernal, L.G. (1987) On Growth k-Order of Solutions of a Complex Homogeneous Linear Differential Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **101**, 317-322.

[9] Laine, I. (2008) Complex Differential Equations. In: *Handbook of Differential Equations*, *Ordinary Differential Equa-*

tions, Vol. 4, Elsevier, Amsterdam.

[10] Long, J.R., Zhu, J. and Li, X.M. (2013) Growth of Solutions to Some Higher-Order Linear Differential Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **33**, 401-408.

[11] Tu, J. and Deng, G.T. (2008) Growth of Solutons of Certain Higher Order Linear Differential Equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **53**, 2693-2703.

[12] Chen, Z.X. and Yang, C.C. (2000) Quantitative Estimations on the Zeros and Growth of Entire Solutions of Linear Differential Equations. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **42**, 119-133. https://doi.org/10.1080/17476930008815277

[13] Zhang, C.Y. and Tu, J. (2010) Growth of Solutions to Linear Differential Equations with Entire Coefficients of Slow Growth. *Electronic Journal of Differential Equations*, **43**, 1-12.

[14] Long, J.R., Hettokangas, J. and Ye, Z. (2016) On the Relationship between the Lower Order of Coefficients and the Growth of Solutions of Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **444**, 153-166. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.06.030

[15] Gundersen, G.G. (1988) Estimates for the Logarithmic Derivative of a Meromorphic Function, plus Similar Estimate. *Journal of the London Mathematical Society*, **37**, 88-104. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-37.121.88

[16] Barry, P.D. (1970) Some Theorems Related to the $\cos\pi\rho$ Theorem. *London Mathematical Society*, **21**, 334-360. https://doi.org/10.1112/plms/s3-21.2.334