Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(6), 454-460
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76059

Hans 汉斯

Gol’dberg-Grinshtein Type Logarithmic Derivative Estimation

Sheng Li, Baoqin Chen

Faculty of Mathematics and Computer Science, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong
Email: lish_ls@qq.com, cbqchen@126.com

Received: Oct. 27th, 2017; accepted: Nov. 10th, 2017; published: Nov. 14th, 2017

Abstract

By applying the improved Kolokolniov lemma to investigate the Gol’dberg-Grinshtein type logarithmic derivative estimation, the constant in the existing results are improved to 4.5206. In particularly, for the case that all zeros and poles of the meromorphic function are real numbers, the constant is improved to 3.8018.

Keywords

Meromorphic Functions, Nevanlinna Theory, Logarithmic Derivatives

Gol’dberg-Grinshtein型对数导数估计

李　升，陈宝琴

广东海洋大学数学与计算机学院，广东　湛江
Email: lish_ls@qq.com, cbqchen@126.com

收稿日期：2017年10月27日；录用日期：2017年11月10日；发布日期：2017年11月14日

摘　要

通过应用改进的Kolokolniov引理，考虑Gol'dberg-Grinshtein型对数导数估计，将现有结果中的常数改进为4.5206。特别地，对零点和极点都是实数的亚纯函数，将相应的常数改进为3.8018。

关键词

亚纯函数，Nevanlinna理论，对数导数

文章引用: 李升, 陈宝琴. Gol’dberg-Grinshtein 型对数导数估计[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 454-460.
DOI: 10.12677/pm.2017.76059

1. 引言

在下文中，将使用 Nevanlinna 理论[1] [2] [3]的标准记号。对数导数引理刻画了对数导数的均值函数的上界，是亚纯函数值分布理论的核心定理之一。早在 1976 年，Gol'dberg 和 Grinshtein [4]就研究了对数导数的均值函数的上界。他们得到了如下估计式：

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le \log^{+}\left(\frac{T(\rho,f)}{r}\frac{\rho}{\rho-r}\right)+5.8501 \tag{1}$$

其中 $\rho>r$， $f(z)$ 是一个亚纯函数且满足 $f(0)=1$。

形如式(1)的不等式称为 Gol'dberg-Grinshtein 型对数导数估计。其应用及如何改进常数 5.8501，一直受到国内外专家学者的关注。Benbourenane 和 Korhonen [5]，Kondratyuk 和 Kshanovskyy [6]先后将不等式(1)中的常数 5.8501 改进为 5.3078 和 4.8517。Heittokangas 等人[7]则得到了不等式(1)包含高阶导数的形式。

我们首先证明如下的一般性结果：

定理 1：设 $f(z)$ 在 $\{z\in C:|z|<R\}$ 内亚纯且 $f(0)=1$，其中 $0<R\le\infty$，则对所有满足 $0<r<\rho<R$ 的 r 和 ρ 有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le \log^{+}\left(\frac{T(\rho,f)}{r}\frac{\rho}{\rho-r}\right)+4.5206$$

对于零点和极点都是实数的亚纯函数，我们将常数 4.5206 进一步缩小为 3.8018，也就是如下定理：

定理 2：设 $f(z)$ 在 $\{z\in C:|z|<R\}$ 内亚纯且 $f(0)=1$，其中 $0<R\le\infty$。如果 $f(z)$ 的所有零点和极点都是实数，那么对所有满足 $0<r<\rho<R$ 的 r 和 ρ 有

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)\le \log^{+}\left(\frac{T(\rho,f)}{r}\frac{\rho}{\rho-r}\right)+3.8018$$

2. 引理

引理 1：[5]如果 $0\le d\le 1$， $0<\alpha<1$， C_1,C_2 为非负实数，那么

$$C_1(1-d)^{\alpha}+C_2d^{\alpha}\le\left(C_1^{\frac{1}{1-\alpha}}+C_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$$

引理 2：[8]假设 $R<\infty$， $F(z)$ 在 $\{z\in C:|z|<R\}$ 解析，对 $0\le\theta\le 2\pi$，定义 $u(\theta)$ 如下：

$$u(\theta):=\liminf_{z\to Re^{i\theta},|z|<R}|F(z)|^{1-\alpha}$$

如果 $\mathrm{Re}(F(z))$ 或 $\mathrm{Im}(F(z))$ 不变号，那么对任意满足 $0<\alpha<1$ 的 α 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\theta)^{\alpha}\,\mathrm{d}\theta\le\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)|F(0)|^{\alpha}$$

以下引理是 Kolokolniov 引理(见[9])的改进形式。

引理 3： [5]假设 $R<\infty$，$\{c_k\}\subseteq\{z\in C:|z|<R\}$ 内的有限复数列。对每个 k，假设 $\delta_k=\pm1$ 并定义

$$H(z):=\sum_k\frac{\delta_k}{z-c_k}$$

则对任意满足 $0<\alpha<1$ 的 α，$0<r<R$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|H\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha}\mathrm{d}\theta\le\left(2^{\frac{1}{1-\alpha}}+2^{\frac{2}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{n(R,H)}{r}\right)^{\alpha}$$

注意到，如果对每个 k，c_k 为实数，那么 $\varphi_k=\arg(c_k)\in[0,\pi]$，$q_k=\delta_k\sin(\varphi_k)=0$，参考引理 3 的证明，可以得到以下结果。

引理 4： 假设 $\{c_k\}$ 为有限实数列。对每个 k，假设 $\delta_k=\pm1$ 并定义

$$H(z):=\sum_k\frac{\delta_k}{z-c_k}$$

则对任意满足 $0<\alpha<1$ 的 α，$0<r<R$ 有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|H\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha}\mathrm{d}\theta\le 2^{2-\alpha}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{n(R,H)}{r}\right)^{\alpha}$$

下面的引理是 Jensen 不等式的推论，证明见 Kondratyuk [6]。

引理 5： 如果在 $[0,T]$，$u(t)\ge0$ 且 $I=\frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$ 存在，那么

$$\frac{1}{T}\int_0^T\log^+u(t)\mathrm{d}t\le\max\{1,\log I\}$$

3. 定理 1 的证明

设 $s=\beta r+(1-\beta)\rho$，其中 $0<\beta<1$。则 $\rho-s=\beta(\rho-r)$ 且 $s-r=(1-\beta))(\rho-r)$。将 $f(z)$ 在 $\{z:|z|<s\}$ 内的所有零点、极点分别记为 $a_1,\cdots,a_p$ 和 $b_1,\cdots,b_q$，计算重数。由 Poision-Jensen 引理可得

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\int_0^{2\pi}\frac{2se^{i\varphi}}{\left(se^{i\varphi}-z\right)^2}\log\left|f\left(se^{i\varphi}\right)\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}+\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{\bar{a}_j}{s^2-\bar{a}_jz}+\frac{1}{z-a_j}\right)-\sum_{j=1}^{q}\left(\frac{\bar{b}_j}{s^2-\bar{b}_jz}+\frac{1}{z-b_j}\right)$$

对在圆周 $|z|=s$ 上的零点和极点的细节处理，见文[10]的第 11 页。

对上式取模可得

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\le\int_0^{2\pi}\frac{2s}{\left|se^{i\varphi}-z\right|^2}\left|\log\left|f\left(se^{i\varphi}\right)\right|\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}+\left|\sum_{j=1}^{p}\frac{\bar{a}_j}{s^2-\bar{a}_jz}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\bar{b}_j}{s^2-\bar{b}_jz}\right|+\left|\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z-a_j}-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{z-b_j}\right|$$

注意到 $0<\alpha<1$ 和 d_j，有

$$\left(\sum_j d_j\right)^{\alpha}\le\sum_j d_j^{\alpha}\tag{2}$$

故由上述两个不等式可得

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|^{\alpha}\le\left(\int_0^{2\pi}\frac{2s}{\left|se^{i\varphi}-z\right|^2}\left|\operatorname{logg}\left|f\left(se^{i\varphi}\right)\right|\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\right)^{\alpha}+\left|\sum_{j=1}^{p}\frac{\bar{a}_j}{s^2-\bar{a}_jz}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\bar{b}_j}{s^2-\bar{b}_jz}\right|^{\alpha}+\left|\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z-a_j}-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{z-b_j}\right|^{\alpha}$$

记 $z=re^{i\theta}$ 并在上式左右两边分别对 θ 积分，有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right|^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\le&\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{2s}{\left|se^{i\varphi}-re^{i\theta}\right|^2}\left|\log\left|f\left(se^{i\varphi}\right)\right|\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\right)^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\\&+\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{re^{i\theta}-a_j}-\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{re^{i\theta}-b_j}\right|^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\\&+\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=1}^{p}\frac{\bar{a}_j}{s^2-\bar{a}_jre^{i\theta}}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\bar{b}_j}{s^2-\bar{b}_jre^{i\theta}}\right|^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\\=:&I_1+I_2+I_3\end{aligned}\tag{3}$$

对 I_1 应用 HÖlder 不等式并改变积分顺序可得

$$\begin{aligned}I_1^{\frac{1}{\alpha}}&\le\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{2s}{\left|se^{i\varphi}-re^{i\theta}\right|^2}\left|\log\left|f\left(se^{i\varphi}\right)\right|\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\\&=2s\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|se^{i\varphi}-re^{i\theta}\right|^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)\left|\log\left|f\left(se^{i\varphi}\right)\right|\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}\end{aligned}$$

对常数函数 1 应用 Poisson 引理，得到

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\left|se^{i\varphi}-re^{i\theta}\right|^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}=\frac{1}{s^2-r^2}$$

注意到 $s-r=(1-\beta)(\rho-r)$ 且

$$\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(se^{i\varphi}\right)\right|\right|\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\pi}=m(s,f)+m\left(s,\frac{1}{f}\right)$$

即可进一步得到

$$I_1\le\left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\rho}{r(\rho-r)}\right)^{\alpha}\left(m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha}\tag{4}$$

下面考虑 I_2。记 $\xi_{1j}=\mathrm{Re}\left(a_j\right),\xi_{2j}=\mathrm{Im}\left(a_j\right),\eta_{1j}=\mathrm{Re}\left(b_j\right),\eta_{2j}=\mathrm{Im}\left(b_j\right)$，则有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{p}\frac{\bar{a}_j}{s^2-\bar{a}_jz}-\sum_{j=1}^{q}\frac{\bar{b}_j}{s^2-\bar{b}_jz}\\&=\left(\sum_{\xi_{1j}>0}\frac{\xi_{1j}}{s^2-\bar{a}_jz}-\sum_{\eta_{1j}<0}\frac{\eta_{1j}}{s^2-\bar{b}_jz}\right)-\left(\sum_{\xi_{1j}\le0}\frac{-\xi_{1j}}{s^2-\bar{a}_jz}-\sum_{\eta_{1j}\ge0}\frac{-\eta_{1j}}{s^2-\bar{b}_jz}\right)\\&\quad-i\left(\sum_{\xi_{2j}>0}\frac{\xi_{2j}}{s^2-\bar{a}_jz}-\sum_{\eta_{2j}<0}\frac{\eta_{2j}}{s^2-\bar{b}_jz}\right)+i\left(\sum_{\xi_{2j}\le0}\frac{-\xi_{2j}}{s^2-\bar{a}_jz}-\sum_{\eta_{2j}\ge0}\frac{-\eta_{2j}}{s^2-\bar{b}_jz}\right)\\&=:h_1(z)-h_2(z)-ih_3(z)+ih_4(z)\end{aligned}$$

由(2)，可得

$$I_2\le\sum_{j=1}^{4}\left(\int_0^{2\pi}\left|h_j\left(re^{i\theta}\right)\right|^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\right)$$

由于 $s>r$，故 $\operatorname{Re}\left(s^2-\bar{a}_j re^{i\theta}\right)>0$ 且 $\operatorname{Re}\left(s^2-\bar{b}_j re^{i\theta}\right)>0$。因此我们可以应用引理 3，得到

$$I_2 \le \sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\sum_{j=1}^{4}\left|h_j(0)\right|^{\alpha} \le \frac{\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{s^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{2}\left[\left(\sum_{\xi_{kj}>0}\left|\xi_{kj}\right|+\sum_{\eta_{kj}<0}\left|\eta_{kj}\right|\right)^{\alpha}+\left(\sum_{\xi_{kj}\le 0}\left|\xi_{kj}\right|+\sum_{\eta_{kj}\ge 0}\left|\eta_{kj}\right|\right)^{\alpha}\right]$$

$$\le \frac{\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{s^{\alpha}}\sum_{k=1}^{2}\left[\left(\sum_{\xi_{kj}>0}1+\sum_{\eta_{kj}<0}1\right)^{\alpha}+\left(\sum_{\xi_{kj}\le 0}1+\sum_{\eta_{kj}\ge 0}1\right)^{\alpha}\right]=\frac{\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{s^{\alpha}}\sum_{k=1}^{2}\left(\gamma_k^{\alpha}+\left(1-\gamma_k\right)^{\alpha}\right)\left(n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha}$$

其中

$$\gamma_k=\frac{\sum_{\xi_{kj}>0}1+\sum_{\eta_{kj}<0}1}{n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)}\in[0,1]$$

由引理 1，得

$$I_2 \le 2^{2-\alpha}\frac{\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{s^{\alpha}}\left(n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha} \le 2^{2-\alpha}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)}{r}\right)^{\alpha}$$

由

$$\begin{aligned} n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right) &= \frac{\rho}{\rho-s}\int_s^{\rho}\frac{\mathrm{d}t}{\rho}\left(n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)\right) \\ &\le \frac{\rho}{\rho-s}\int_s^{\rho}\left(n(t,f)+n\left(t,\frac{1}{f}\right)\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &\le \frac{\rho}{\rho-s}\left(N(\rho,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right) \end{aligned} \tag{5}$$

和 $\rho-s=\beta(\rho-r)$，得到

$$I_2 \le \frac{2^{2-\alpha}}{\beta^{\alpha}}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{\rho}{r(\rho-r)}\right)^{\alpha}\left(N(\rho,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha} \tag{6}$$

类似地，由(5)和引理 3 可得

$$\begin{aligned} I_3 &\le \left(2^{\frac{1}{1-\alpha}}+2^{\frac{2}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)}{r}\right)^{\alpha} \\ &\le \frac{\left(2^{\frac{1}{1-\alpha}}+2^{\frac{2}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}}{\beta^{\alpha}}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{\rho}{r(\rho-r)}\right)^{\alpha}\left(N(\rho,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha} \end{aligned} \tag{7}$$

由定理条件 $f(0)=1$ 和 Nevanlinna 第一基本定理，可知 $T(\rho,f)=T(\rho,1/f)$。结合(3)，(4)，(6)和(7)，有

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right|^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\le I_1+I_2+I_3$$

$$\le\left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\rho}{r(\rho-r)}\right)^{\alpha}\left(m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha}$$

$$+\frac{2^{2-\alpha}+\left(2^{\frac{1}{1-\alpha}}+2^{\frac{2}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}}{\beta^{\alpha}}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{\rho}{r(\rho-r)}\right)^{\alpha}\left(N(\rho,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha}$$

$$=\left(\frac{T(\rho,f)}{r}\frac{\rho}{\rho-r}\right)^{\alpha}\left[C_1(\alpha,\beta)\left(1-d_{\rho}\right)^{\alpha}+C_2(\alpha,\beta)d_{\rho}^{\alpha}\right]$$

其中

$$C_1(\alpha,\beta)=\left(\frac{2}{1-\beta}\right)^{\alpha}，C_2(\alpha,\beta)=\frac{4+\left(2^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}+2^{\frac{2+\alpha}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}}{\beta^{\alpha}}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right),$$

$$d_{\rho}=\frac{N(\rho,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)}{2T(\rho,f)}\in[0,1]$$

再次应用引理 1，得

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{f'\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right)}\right|^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\le C(\alpha,\beta)\left(\frac{T(\rho,f)}{r}\frac{\rho}{\rho-r}\right)^{\alpha}\tag{8}$$

其中

$$C(\alpha,\beta)=\left(C_1(\alpha,\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}+C_2(\alpha,\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha}$$

对不等式(8)应用引理 5，有

$$m\left(\frac{f'}{f}\right)\le\log^{+}\left(\frac{T(\rho,f)}{r}\frac{\rho}{\rho-r}\right)+\frac{\log C(\alpha,\beta)}{\alpha}$$

这个不等式的所有的 $\alpha,\beta\in(0,1)$ 成立。经数学软件 Lingo 运算可知，$\left(\log C(\alpha,\beta)\right)/\alpha$ 的最小值为 4.5206，在 $\alpha\approx0.7813$ 和 $\beta\approx0.9497$ 处取得。定理 1 证明完毕。

4. 定理 2 的证明

仿照定理 1 的证明，可知不等式(4)仍然成立。由于 a_j,b_j 均为实数，故对 I_2 的估计式中的 $\xi_{2j}=\mathrm{Im}\left(a_j\right)=\eta_{2j}=\mathrm{Im}\left(b_j\right)=0$，从而 $h_3(z)=h_4(z)\equiv0$。这就给出

$$I_2\le\frac{2^{1-\alpha}}{\beta^{\alpha}}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{\rho}{r(\rho-r)}\right)^{\alpha}\left(N(\rho,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha}\tag{9}$$

对 I_3 应用引理 4，可得

$$I_3 \le 2^{2-\alpha}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{n(s,f)+n\left(s,\frac{1}{f}\right)}{r}\right)^{\alpha}$$
$$\le \frac{2^{2-\alpha}}{\beta^{\alpha}}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\left(\frac{\rho}{r(\rho-r)}\right)^{\alpha}\left(N(\rho,f)+N\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right)^{\alpha} \tag{10}$$

再次应用引理 1，结合(4)，(9)和(10)，可以推出

$$m\left(\frac{f'}{f}\right) \le \log^{+}\left(\frac{T(\rho,f)}{r}\frac{\rho}{\rho-r}\right)+\frac{\log C(\alpha,\beta)}{\alpha} \tag{11}$$

其中

$$C(\alpha,\beta)=\left(C_1(\alpha,\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}+C_2(\alpha,\beta)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{1-\alpha},$$
$$C_1(\alpha,\beta)=\left(\frac{2}{1-\beta}\right)^{\alpha},\ C_2(\alpha,\beta)=\frac{6}{\beta^{\alpha}}\sec\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

不等式(11)对所有的 $\alpha,\beta\in(0,1)$ 成立。经数学软件 Lingo 运算可知，$\left(\log C(\alpha,\beta)\right)/\alpha$ 的最小值为 3.8018，在 $\alpha\approx 0.7679,\beta\approx 0.9081$ 处取得。定理 2 证明完毕。

致　谢

本论文得到广东省高等学校优秀青年教师培养计划项目(YQ2015089)，广东自然科学基金项目(2015A030313620)，广东海洋大学优秀青年教师培养计划项目(2014007，HDYQ2015006)，广东海洋大学创新强校工程项目(gdou2016050209，gdou2016050206)的资助。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Laine, I. (1993) Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations. W.de Gruyter, Berlin. https://doi.org/10.1515/9783110863147

[3] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[4] Gol'dberg, A. and Grinshtein, V. (1976) The Logarithmic Derivative of a Meromorphic Function. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the Ussr*, **19**, 320-323. https://doi.org/10.1007/BF01156790

[5] Benbourenane, D. and Korhonen, R.G. (2002) On the Growth of the Logarithmic Derivative. *Computational Methods and Function Theory*, **1**, 301-310. https://doi.org/10.1007/BF03320992

[6] Kondratyuk, A.A. and Kshanovskyy, I.P. (2004) On the Logarithmic Derivative of a Meromorphic Function. *Matematychni studii*, **21**, 98-100.

[7] Heittokangas, J., Korhonen, R.G. and Rättyä, J. (2004) Generalized Logarithmic Derivative Estimates of Gol'dberg-Grinshtein Type. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **36**, 105-114. https://doi.org/10.1112/S0024609303002649

[8] Korhonen, R.G. (2006) Sharp Forms of Nevanlinna Error Terms in Differential Equations. *Symposium on Complex Differential & Functional Equations*, 117-133.

[9] Kolokolnikov, A. (1974) On the Logarithmic Derivative of a Meromorphic Function. *Matematicheskie Zametki*, **15**, 711-718. https://doi.org/10.1007/BF01152778

[10] Cherry, W. and Ye, Z. (2001) Nevanlinna's Theory of Value Distribution. The Second Main Theorem and Its Error Terms. Springer-Verlag, Berlin.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org