Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(6), 461-463
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76060

A Note on the Judgment of Limit Cycles

Zhihong Kong

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kzh196408@126.com

Received: Oct. 28th, 2017; accepted: Nov. 8th, 2017; published: Nov. 15th, 2017

Abstract

Isolation in isolated periodic solutions implies that the system neither exists other periodic solutions nor exists singular points of the system in its neighborhood. We give examples to illustrate that the closed trajectories in an annular region are not all limit cycles, although the right-side functions are analytic functions. In our case, there are singular points in the periodic solution.

Keywords

Analytic Vector Field, Annular Region, Limit Cycles, Singular Points, Isolated Periodic Solutions

关于极限环判断的一个注记

孔志宏

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: kzh196408@126.com

收稿日期：2017年10月28日；录用日期：2017年11月8日；发布日期：2017年11月15日

摘 要

孤立的周期解中的孤立意味着，在它的邻域内既不存在别的周期解，也不存在系统的奇点。文中举例说明了在平面驻定系统右端函数是解析的情形下，环域中的闭轨并不都是极限环。所举的例子中，周期解上存在奇点。

关键词

解析向量场，环域，极限环，奇点，孤立的周期解

文章引用: 孔志宏. 关于极限环判断的一个注记[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 461-463.
DOI: 10.12677/pm.2017.76060

1. 引言

Poincaré-Bendixson 环域定理[1]说明了，只要能构造出一个有界的环形闭域 D，在其上沿有奇点，且在其边界上轨线均进入(或离开)该域，自然，进入(或离开)该域的解均不会再离开(或进入)域 D，那么可以肯定在域 D 内必存在周期解(闭轨线)。如果这周期解(闭轨线)是孤立的，那么它就是极限环，这样，可以通过构造特殊的环域来寻求极限环，并大致确定其位置，如果环域越狭小，则极限环的位置就越准确。

在实际判断时有文献(如[1])指出，对于平面驻定系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y) \tag{1}$$

当它是解析向量场，即右端函数 X，Y 是解析函数时，环域中的闭轨(如果存在的话)都是孤立的，因而它们都是极限环。事实上，这个结论是有问题的。

2. 例子与相关结果

例 1. 确定系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-9\right)-y\left(x^2+y^2-2x-8\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-9\right)+x\left(x^2-y^2-2x-8\right)\end{cases} \tag{2}$$

的周期解、极限环，并讨论极限环的稳定性。

解：易检验 $\dfrac{\partial X}{\partial x}+\dfrac{\partial Y}{\partial y}$ 在系统(2)的定义区域内是变号的，于是不能否定系统(2)存在周期解或极限环[2]。

取极坐标变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ 后，(2)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r\left(r^2-1\right)\left(r^2-9\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r^2-2r\cos\theta-8\end{cases} \tag{3}$$

方程组(3)有三个平衡解 $r=0$，$\theta=8(t_0-t)$；$r=1$，$\theta=\theta(t)$；$r=3$，$\theta=\theta(t)$。

当 $r<1$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r\left(r^2-1\right)\left(r^2-9\right)>0$，$r$ 单调增加，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r^2-2r\cos\theta-8$，$r^2-2r\cos\theta$ 的最大值为 r^2+2r，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}<r^2+2r-8=(r+1)^2-9<4-9=-5<0$，$\theta$ 单调减少；当 $1<r<2$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r\left(r^2-1\right)\left(r^2-9\right)<0$，$r$ 单调减少，同样，$r^2-2r\cos\theta$ 的最大值为 r^2+2r，此时 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r^2+2r-8=(r+1)^2-9<9-9=0$，$\theta$ 单调减少；当 $2<r<3$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r\left(r^2-1\right)\left(r^2-9\right)<0$，$r$ 单调减少，$\max\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=(r+1)^2-9>0$，$\min\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=r^2-2r-8=(r-1)^2-9<0$，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ 变号；当 $r>3$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r\left(r^2-1\right)\left(r^2-9\right)>0$，$r$ 单调增加，$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

变号。

从上面的讨论可知，在圆 $r=1$ 的内部，轨线沿顺时针方向盘旋地逐渐增大趋于 $r=1$；在圆 $r=1$ 之外、圆 $r=2$ 之内，轨线沿顺时针方向盘旋地逐渐减小趋于 $r=1$。$r=1$ 是系统的一个周期解(闭轨线)。又，系统(2)的右端函数是解析的，且在圆 $r=1$ 的邻域内不含有(2)的奇点，故 $r=1$ 是周期为 2π 的一个孤立的周期解，即它是一个稳定的极限环。在圆 $r=3$ 之内、圆 $r=2$ 之外，轨线一会儿沿逆时针方向逐渐减小地远离 $r=3$，一会儿沿顺时针方向逐渐减小地远离 $r=3$。在圆 $r=3$ 外的邻域内，轨线也都是变换方向地逐渐增大远离 $r=3$。所以 $r=3$ 是一个周期解(闭轨线)，但是由联立方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2-9=0 \\ x^2+y^2-2x-8=0 \end{cases} \tag{4}$$

解得 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt{35}}{2}$。

这两个点 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{35}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{35}}{2}\right)$ 都是系统的奇点，且它们位于圆 $r=3$ 上，所以 $r=3$ 不是系统的极限环。

例 2. 系统的一般情形

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-n\right)-y\left(x^2+y^2-2x-n+1\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-n\right)+x\left(x^2+y^2-2x-n+1\right) \end{cases} \tag{5}$$

其中 $n>1$，$n\in R$。

同样地，$r=\sqrt{n}$ 是系统(5)的一个周期解(闭轨线)，但是(5)有两个位于圆 $r=\sqrt{n}$ 上的奇点 $\left(\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{4n-1}}{2}\right)$，所以 $r=\sqrt{n}$ 不是系统(5)的极限环。

例 3. 又一种一般的情况

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-n\right)-y\left(x^2+y^2-2y-n+1\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(x^2+y^2-1\right)\left(x^2+y^2-n\right)+x\left(x^2+y^2-2y-n+1\right) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $n>1$，$n\in R$。

类似地，$r=\sqrt{n}$ 是系统(6)的一个周期解(闭轨线)，但是(6)有两个位于圆 $r=\sqrt{n}$ 上的奇点 $\left(\pm\dfrac{\sqrt{4n-1}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，所以 $r=\sqrt{n}$ 不是系统(6)的极限环。

3. 结语

作为极限环的定义的“孤立的周期解”中，孤立的含义是，在它(周期解)的邻域内既没有其它的闭轨线，也没有系统的奇点。切不可顾及了一个方面而忽视了另一个方面。

参考文献 (References)

[1] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004: 270-272.

[2] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 等. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006: 295-297.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org