Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(6), 471-477
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.76062

The Fixed Points of the Solutions and Their Derivatives of Second Order Linear Differential Equation in the Unit Disc

Yu Chen

Institute of Mathematics and Information Science, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: chenyugyi@sina.com

Received: Oct. 30th, 2017; accepted: Nov. 11th, 2017; published: Nov. 17th, 2017

Abstract

The properties of the fixed points of the solutions and their derivatives of a type of second order linear differential equation $f''+A(z)f'+B(z)f=0$, where $A(z)$ and $B(z)$ are analytic functions in the unit disc $\Delta=\{z:|z|<1\}$, are investigated. We obtain some precise estimates of the fixed points of the solutions and their 1st, 2nd derivatives of the equations.

Keywords

Linear Differential Equation, Unit Disc, Analytic Functions, Fixed Points, Hyper Order

单位圆内二阶线性微分方程解的导数的不动点

陈　玉

江西师范大学数学与信息科学学院，江西　南昌
Email: chenyugyi@sina.com

收稿日期：2017年10月30日；录用日期：2017年11月11日；发布日期：2017年11月17日

摘　要

本文研究了一类二阶线性微分方程 $f''+A(z)f'+B(z)f=0$ 的解及其导数的不动点性质，其中 $A(z)$ 和 $B(z)$ 是单位圆 $\Delta=\{z:|z|<1\}$ 内的解析函数，得到了解及其一阶、二阶导数的不动点的精确估计。

文章引用: 陈玉. 单位圆内二阶线性微分方程解的导数的不动点[J]. 理论数学, 2017, 7(6): 471-477.
DOI: 10.12677/pm.2017.76062

关键词

线性微分方程，单位圆，解析函数，不动点，超级

1. 引言与主要结果

本文使用单位圆 $\Delta=\{z:|z|<1\}$ 和复平面 $\mathbb{C}$ 上亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论的基本结果和标准符号(见文[1] [2] [3])。我们回顾或引入以下定义。

定义 1 [3]：单位圆 Δ 内亚纯函数 f 的级定义为

$$\sigma(f)=\varlimsup_{r\to1^-}\frac{\log^+T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}$$

对于 Δ 内解析函数 f，其级定义为

$$\sigma_M(f)=\varlimsup_{r\to1^-}\frac{\log^+\log^+M(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}$$

其中 $M(r,f)$ 是 $f(z)$ 的最大模。

注 1 [4]：如果 f 在 Δ 内解析，那么 $\sigma(f)\le\sigma_M(f)\le\sigma(f)+1$。如果 $\sigma(f)=\infty$，则 $\sigma(f)=\sigma_M(f)$。

定义 2 [5]：单位圆 Δ 内亚纯函数 f 的超级定义为

$$\sigma_2(f)=\varlimsup_{r\to1^-}\frac{\log^+\log^+T(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}$$

定义 3 [6]：对于单位圆 Δ 内解析函数 f，定义

$$\sigma_{M,2}(f)=\varlimsup_{r\to1^-}\frac{\log^+\log^+\log^+M(r,f)}{\log\frac{1}{1-r}}$$

定义 4 [7]：单位圆 Δ 内亚纯函数 f 在 Δ 内的 a-值点 $(a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\})$ 序列的超级收敛指数定义为

$$\lambda_2(f-a)=\varlimsup_{r\to1^-}\frac{\log^+\log^+N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log\frac{1}{1-r}}$$

且 $\overline{\lambda}_2(f-a)$，$\Delta$ 内亚纯函数 f 在 Δ 内判别的 a-值点 $(a\in\mathbb{C}\cup\{\infty\})$ 序列的超级收敛指数定义为

$$\overline{\lambda}_2(f-a)=\varlimsup_{r\to1^-}\frac{\log^+\log^+\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{\log\frac{1}{1-r}}$$

注 2：若 $a=0$，则 $\lambda_2(f)$ 和 $\overline{\lambda}_2(f)$ 分别表示 f 在 Δ 内零点序列和判别零点序列的超级收敛指数。

注 3 [6]：1)设 f 在单位圆 Δ 内解析，则 $\sigma_2(f)=\sigma_{M,2}(f)$，这与复平面 $\mathbb{C}$ 上整函数的超级的结果一样。因此不失一般性，下文仅用符号 $\sigma_2(f)$。

2) 当 f 在 Δ 内亚纯，则 $\sigma(f)=\sigma\left(f^{(j)}\right)$ 和 $\sigma_2(f)=\sigma_2\left(f^{(j)}\right)$，其中 $j\in\mathbb{N}$。

自从 J. Heittokangas 在[3]中研究单位圆 Δ 内微分方程解的增长性以来，近年来国内外有了不少这方面的研究(如文[5]-[11])。曹廷彬与仪洪勋在[6]中研究了单位圆内微分方程解的增长性，改进了[3] [5]的结果，并进一步研究了单位圆内二阶线性微分方程解的不动点性质，得到

定理 A [6]：假设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 为 Δ 内解析函数，且满足 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)$ 或 $\sigma(A)<\sigma(B)$，则方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{1.1}$$

的每个解 $f\not\equiv 0$ 满足 $\overline{\lambda}_2(f-z)=\sigma_2(f)$。

文[7]研究了相应的单位圆内高阶微分方程解的增长性及不动点问题。

文[8]进一步研究了方程

$$f''+A(z)f=0 \tag{1.2}$$

的解的导数的不动点问题，得到

定理 B [8]：设 $A(z)$ 是单位圆内可允许的解析函数，$\sigma_M(A)=\sigma<+\infty$，则方程(1.2)的所有解 $f\not\equiv 0$ 及其 f', f'' 都有无穷个不动点且不动点收敛指数满足

$$\tau(f)=\tau(f')=\tau(f'')=\sigma_M(f)=+\infty,\ \tau_2(f)=\tau_2(f')=\tau_2(f'')=\sigma_{M,2}(f)=\sigma$$

注 4：不动点收敛指数 $\tau(f)$ 即 $\lambda(f-z)$，不动点二级收敛指数 $\tau_2(f)$ 即 $\lambda_2(f-z)$。

本文进一步讨论了在定理 A 的条件下方程(1.1)解的各阶导数的不动点性质，得到以下结果。

定理 1：假设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 为 Δ 内解析函数，且满足 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)<\infty$ 或 $\sigma(A)<\sigma(B)<\infty$，则方程(1.1)的每个解 $f\not\equiv 0$ 满足

$$\overline{\lambda}_2(f'-z)=\lambda_2(f'-z)=\overline{\lambda}_2(f''-z)=\lambda_2(f''-z)=\sigma_2(f)$$

定理 2：假设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 为 Δ 内解析函数，且满足 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)$ 或 $\sigma(A)<\sigma(B)$，如果 $\sigma_2(B)<\infty$，则方程(1.1)的每个解 $f\not\equiv 0$ 满足

$$\overline{\lambda}_2(f-z)=\overline{\lambda}_2(f'-z)=\lambda_2(f'-z)=\overline{\lambda}_2(f''-z)=\lambda_2(f''-z)=\sigma_2(f)$$

推论 1：假设 $A(z)$ 和 $B(z)$ 为 Δ 内解析函数，且满足 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)=\infty$ 或 $\sigma(A)<\sigma(B)=\infty$，如果 $\sigma_2(B)<\infty$，则方程(1.1)的每个解 $f\not\equiv 0$ 满足

$$\overline{\lambda}_2(f-z)=\overline{\lambda}_2(f'-z)=\lambda_2(f'-z)=\overline{\lambda}_2(f''-z)=\lambda_2(f''-z)=\sigma_2(f)$$

注 5：定理 1 是定理 A 与定理 B 的推广，定理 2 是文[7]结果(见后面的引理 6)当 $k=2$ 时的改进与推广。

2. 引理

引理 1 [6]：设 $A_1(z)$ 和 $A_0(z)$ 为 Δ 内解析函数且满足 1) $\sigma_M(A_1)<\sigma_M(A_0)$，或 2) $D_M(A_1)<\infty$ 而 $D_M(A_0)=\infty$，则方程(1.1)的所有解 $f\not\equiv 0$ 都满足 $\sigma(f)=\infty$ 且 $\sigma_2(f)=\sigma_M(A_0)$。

引理 2 [6]：设 f 和 g 为 Δ 内亚纯函数，$n\in\mathbb{N}$，则

1) $\sigma_n(f)=\sigma_n\left(\dfrac{1}{f}\right), \sigma_n(a\cdot f)=\sigma_n(f)\left(a\in\mathbb{C}-\{0\}\right)$；

2) $\sigma_n(f)=\sigma_n(f')$；

3) $\max\{\sigma_n(f+g),\sigma_n(f\cdot g)\}\le\max\{\sigma_n(f),\sigma_n(g)\}$；

4) 如果 $\sigma_n(f)<\sigma_n(g)$，那么 $\sigma_n(f+g)=\sigma_n(g)$，$\sigma_n(f\cdot g)=\sigma_n(g)$。

引理 3 [6]：设 $f(z)$ 是方程

$$L(f)=f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=F(z)(k\in\mathbb{N})$$

的一个亚纯解，其中 $A_0,\cdots,A_{k-1},F\not\equiv 0$ 是 Δ 内的亚纯函数。若

$$\max\{\sigma_i(F),\sigma_i(A_j)(j=0,\cdots,k-1)\}:=b<\sigma_i(f):=\sigma$$

这里 $i=1,2$，则有 $\bar{\lambda}_i(f)=\lambda_i(f)=\sigma_i(f)$，其中 $\bar{\lambda}_1(f),\lambda_1(f)$ 和 $\sigma_1(f)$ 分别表示为 $\bar{\lambda}(f),\lambda(f)$ 和 $\sigma(f)$。

引理 4 [6]：设 f 和 g 为 Δ 内解析函数，$n\in\mathbb{N}$，则

1) $\sigma_{M,n}(a\cdot f)=\sigma_{M,n}(f)(a\in\mathbb{C}-\{0\})$；

2) $\sigma_{M,n}(f)=\sigma_{M,n}(f')$；

3) $\max\{\sigma_{M,n}(f+g),\sigma_{M,n}(f\cdot g)\}\le\max\{\sigma_{M,n}(f),\sigma_{M,n}(g)\}$；

4) 如果 $\sigma_{M,n}(f)<\sigma_{M,n}(g)$，那么 $\sigma_{M,n}(f+g)=\sigma_{M,n}(g)$。

引理 5 [6]：设 $A_1(z)$ 和 $A_0(z)$ 为 Δ 内解析函数且满足(i) $\sigma(A_1)<\sigma(A_0)$，或(ii) $D(A_1)<\infty$ 而 $D(A_0)=\infty$，则方程(1.1)的所有解 $f\not\equiv 0$ 都满足 $\sigma(f)=\infty$ 且 $\alpha_M\ge\sigma_2(f)\ge\sigma(A_0)$，其中 $\alpha_M=\max\{\sigma_M(A_0),\sigma_M(A_1)\}$。

引理 6 [7]：设方程

$$L(f)=f^{(k)}+A_{k-1}(z)f^{(k-1)}+\cdots+A_0(z)f=0(k\in\mathbb{N})\tag{2.1}$$

的系数 $A_0(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 在 Δ 内解析，$\max\{\sigma_M(A_j):j=1,\cdots,k-1\}<\sigma_M(A_0)$ 或 $\max\{\sigma(A_j):j=1,\cdots,k-1\}<\sigma(A_0)$。如果 $\sigma_2(A_j)<\infty(j=0,\cdots,k-1)$，那么(2.1)式的每个解 $f\not\equiv 0$ 满足 $\bar{\lambda}_2(f-z)=\sigma_2(f)$。

引理 7 [7]：设(2.1)式的系数 $A_0(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 在 Δ 内解析，如果 $\max\{\sigma_M(A_j):j=1,\cdots,k-1\}<\sigma_M(A_0)$，那么(2.1)式的所有解 $f\not\equiv 0$ 都满足 $\sigma_M(A_0)=\sigma_2(f)\ge\sigma(A_0)$。

引理 8 [7]：设 Δ 内解析的函数 $A_0(z),\cdots,A_{k-1}(z)$ 是(2.1)式的系数，如果 $\max\{\sigma(A_j):j=1,\cdots,k-1\}<\sigma(A_0)$，那么(2.1)式的所有解 $f\not\equiv 0$ 都满足 $\sigma(A_0)\le\sigma_2(f)\le\alpha_M$，其中 $\alpha_M=\max\{\sigma_M(A_j):j=0,\cdots,k-1\}$。

3. 定理 1 的证明

下面证 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)<\infty$ 的情形。

设 $f\not\equiv 0$ 为方程(1.1)的解，由引理 1 知，

$$\sigma(f)=\infty,\sigma_2(f)=\sigma_M(B)\tag{3.1}$$

1) 首先考虑 $f'(z)$ 的不动点。假设 $g_1(z)=f'(z)-z,z\in\Delta$，由(3.1)，有

$$\sigma(g_1)=\sigma(f')=\infty,\sigma_2(g_1)=\sigma_2(f')=\sigma_2(f),\bar{\lambda}_2(g_1)=\bar{\lambda}_2(f'-z)\tag{3.2}$$

微分(1.1)，得

$$f''' + Af'' + (A' + B) f' + B'f = 0 \tag{3.3}$$

由(1.1)，有

$$f = -\frac{f'' + Af'}{B} \tag{3.4}$$

将(3.4)代入(3.3)，得

$$f''' + D_1(z) f'' + D_0(z) f' = 0 \tag{3.5}$$

将 $f' = g_1 + z$ 代入(3.5)，得

$$g_1'' + D_1(z) g_1' + D_0(z) g_1 = D(z) \tag{3.6}$$

其中，

$$D_1(z) = A - \frac{B'}{B} \tag{3.7}$$

$$D_0(z) = A' + B - A\frac{B'}{B} \tag{3.8}$$

$$D(z) = -\left(D_1(z) + zD_0(z)\right) \tag{3.9}$$

下证 $D(z) \not\equiv 0$，若 $D(z) \equiv 0$，由(3.9)，有

$$D_1(z) + zD_0(z) = 0 \tag{3.10}$$

令 $f_1' = z$，由(3.5)、(3.10)知，f_1 为(3.5)的解。因此，方程(1.1)有解 f_1 满足 $f_1' = z$ 且 $\sigma(f_1) < \infty$。这与(3.1)矛盾。故 $D(z) \not\equiv 0$。由注 1 知，$\sigma(A) \le \sigma_M(A) < \infty$，$\sigma(B) \le \sigma_M(B) < \infty$，从而由(3.7)~(3.9)与引理 2 可知 $\sigma(D_0(z)) < \infty$，$\sigma(D_1(z)) < \infty$，$\sigma(D(z)) < \infty$，从而由(3.1)、(3.2)得

$$\max\left\{\sigma_2(D_0(z)), \sigma_2(D_1(z)), \sigma_2(D(z))\right\} < \sigma_2(g_1) = \sigma_2(f) \tag{3.11}$$

由(3.6)与引理 3 得 $\bar{\lambda}_2(g_1) = \lambda_2(g_1) = \sigma_2(g_1)$，从而

$$\bar{\lambda}_2(f' - z) = \bar{\lambda}_2(g_1) = \lambda_2(f' - z) = \lambda_2(g_1) = \sigma_2(g_1) = \sigma_2(f)$$

2) 再次考虑 $f''(z)$ 的不动点。假设 $g_2(z) = f''(z) - z, z \in \Delta$，由(3.1)，有

$$\sigma(g_2) = \sigma(f'') = \infty, \sigma_2(g_2) = \sigma_2(f'') = \sigma_2(f), \bar{\lambda}_2(g_2) = \bar{\lambda}_2(f'' - z) \tag{3.12}$$

微分(3.3)，得

$$f^{(4)} + Af''' + (2A' + B) f'' + (A'' + 2B') f' + B''f = 0 \tag{3.13}$$

下证 $D_0(z) \not\equiv 0$。假设 $D_0(z) \equiv 0$，由(3.8)，得 $A' + B - A\frac{B'}{B} = 0$，或 $A'B - AB' = -B^2$。因此，$\left(\frac{A}{B}\right)' = -1$，可得

$$\frac{A}{B} = -z + C \tag{3.14}$$

其中 C 为任意常数。则 $A = (C - z)B$，$B = \frac{A}{C - z}$。又因为 $\sigma_M(C - z) = \sigma_M\left(\frac{1}{C - z}\right) = 0$，从而由引理 4 可知

$$\sigma_M(A)\le\max\{\sigma_M(C-z),\sigma_M(B)\}=\sigma_M(B),\quad \sigma_M(B)\le\max\left\{\sigma_M\left(\frac{1}{C-z}\right),\sigma_M(A)\right\}=\sigma_M(A)$$

即 $\sigma_M(A)=\sigma_M(B)$，与题设矛盾。故 $D_0(z)\not\equiv 0$ 。由(3.5)得

$$f'=\frac{1}{D_0(z)}\left(-f'''-D_1(z)f''\right) \tag{3.15}$$

将(3.4)、(3.15)代入(3.13)，得

$$f^{(4)}+B_2(z)f'''+B_1(z)f''=0 \tag{3.16}$$

其中，

$$B_1(z)=\left(2A'+B-\frac{B''}{B}\right)-\frac{d_1(z)}{d_2(z)}\left(A-\frac{B'}{B}\right) \tag{3.17}$$

$$B_2(z)=A-\frac{d_1(z)}{d_2(z)} \tag{3.18}$$

$$d_1(z)=A''+2B'-\frac{B''}{B}A \tag{3.19}$$

$$d_2(z)=A'+B-\frac{B'}{B}A \tag{3.20}$$

将 $f''=g_2+z$ 代入(3.16)，得

$$g_2''+B_2(z)g_2'+B_1(z)g_2=B(z) \tag{3.21}$$

其中

$$B(z)=-B_2(z)-zB_1(z) \tag{3.22}$$

下证 $B(z)\not\equiv 0$ 。假设 $B(z)\equiv 0$ ，由(3.22)，得

$$B_2(z)+zB_1(z)=0 \tag{3.23}$$

令 $f_2''=z$，由(3.16)、(3.23)，可知 f_2 为(3.16)的一个解。因此，方程(1.1)有解 f_2 满足 $f_2''=z$ 且 $\sigma(f_2)<\infty$ 。这与(3.1)矛盾。故 $B(z)\not\equiv 0$。由注 1 知，$\sigma(A)\le\sigma_M(A)<\infty$，$\sigma(B)\le\sigma_M(B)<\infty$，故由(3.17)~(3.20)、(3.22)与引理 2，易知 $\sigma(B_1(z))<\infty$， $\sigma(B_2(z))<\infty$， $\sigma(B(z))<\infty$ 。从而由(3.12)得

$$\max\{\sigma_2(B_1(z)),\sigma_2(B_2(z)),\sigma_2(B(z))\}<\sigma_2(g_2)=\sigma_2(f) \tag{3.24}$$

由(3.21)与引理 3 得 $\overline{\lambda}_2(g_2)=\lambda_2(g_2)=\sigma_2(g_2)$， 从而

$$\overline{\lambda}_2(f''-z)=\overline{\lambda}_2(g_2)=\lambda_2(f''-z)=\lambda_2(g_2)=\sigma_2(g_2)=\sigma_2(f)$$

综上所述，在 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)<\infty$ 的情形下，有

$$\overline{\lambda}_2(f'-z)=\lambda_2(f'-z)=\overline{\lambda}_2(f''-z)=\lambda_2(f''-z)=\sigma_2(f)$$

在 $\sigma(A)<\sigma(B)<\infty$ 的情形下，结合引理 5，类似可证得结论也成立。

4. 定理 2 的证明

由引理 6 并注意到当 $\sigma(A)<\sigma(B)=\infty$ 或 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)=\infty$ 时， $\sigma_2(A)\le\sigma_2(B)$，可知在定理 2 的

条件下，方程(1.1)的每个解 $f \not\equiv 0$ 满足 $\overline{\lambda}_2(f-z)=\sigma_2(f)$。

由引理 7 及引理 8 知，$\sigma_2(f)\ge\sigma(B)$。

1) 若 $\sigma(B)<\infty$，则 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)<\infty$ 或 $\sigma(A)<\sigma(B)<\infty$，由定理 1 知，定理 2 结论成立。

2) 若 $\sigma(B)=\infty$，由 $\sigma_2(f)\ge\sigma(B)$ 知，$\sigma_2(f)=\infty$。由 $\sigma_M(A)<\sigma_M(B)=\infty$ 或 $\sigma(A)<\sigma(B)=\infty$，可知 $\sigma_2(A)\le\sigma_2(B)$，又 $\sigma_2(B)<\infty$，从而 $\sigma_2(A)\le\sigma_2(B)<\sigma_2(f)$。由引理 2 知，

$$\max\left\{\sigma_2(D_0(z)),\sigma_2(D_1(z)),\sigma_2(D(z))\right\}\le\sigma_2(B)$$

$$\max\left\{\sigma_2(B_1(z)),\sigma_2(B_2(z)),\sigma_2(B(z))\right\}\le\sigma_2(B)$$

则(3.11)与(3.24)成立。从而类似于定理 1 的证明，可知定理 2 结论成立。

基金项目

国家自然科学基金项目(11271045，11561031)。

参考文献 (References)

[1] Hayman, W. (1964) Meromorphic Functions. Clarendon Press, Oxford.

[2] Yang, L. (1993) Value Distribution Theory. Springer-Verlag, Berlin. Science Press, Beijing.

[3] Heittokangas J. (2000) On Complex Differential Equations in the Unit Disc. *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica Dissertationes*, **122**, 1-54.

[4] Tsuji M. (1975) Potential Theory in Modern Function Theory. Chelsea, New York, Reprint of the 1959 Edition.

[5] 李叶舟. 单位圆盘上二阶微分方程解的增长性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2002, 18(4): 295-300.

[6] 曹廷彬, 仪洪勋. 关于单位圆内解析系数的二阶线性微分方程的复振荡[J]. 数学年刊: A 辑, 2007, 28(5): 719-732.

[7] 曹廷彬, 仪洪勋. 关于单位圆内解析系数的线性微分方程的复振荡理论[J]. 数学物理学报: A 辑, 2008, 28(6): 1046-1057.

[8] 甘会林, 孔荫莹. 单位圆内二阶线性微分方程的解及其导数的不动点[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2008, 32(6): 671-673.

[9] Cao, T.B. (2009) The Growth, Oscillation and Fixed Points of Solutions of Complex Linear Differential Equations in the Unit Disc. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **352**, 739-748. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.11.033

[10] Belaïdi, B. (2010) Oscillation of Fast Growing Solutions of Linear Differential Equations in the Unit Disc. *Acta Universitatis Sapientiae*, *Mathematica*, **2**, 25-38.

[11] Fenton, P., Gröhn, J., Heittokangas, J., Rossi, J., and Rättyä, J. (2014) On α-Polynomial Regular Functions, with Applications to Ordinary Differential Equations. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **57**, 405-421. https://doi.org/10.1017/S0013091514000017

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询