Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(1), 99-104
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.81012

Hans汉斯

The *i* th L_p Dual Affine Surface Area

Rui Zhang[1*], Tongyi Ma[2]

[1]College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
[2]College of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye Gansu
Email: *zhangrui930918@126.com

Received: Jan. 8th, 2018; accepted: Jan. 23rd, 2018; published: Jan. 31st, 2018

Abstract

According to the L_p mixed volume, Ludwig extended the notion of L_p-affine surface area. Recently, Wang and He extended the L_p dual affine surface area. More recently, Ma studied the *i*-th L_p affine surface area. In this paper, we introduce the concept of *i*-th L_p dual affine surface area and established some inequalities according to the Brunn-Minowski-Fiery.

Keywords

L_p Affine Surface Area, L_p Dual Affine Surface Area, *i*-th L_p Affine Surface area, Brunn-Minkowski-Firey Theory, *i*-th L_p Dual Affine Surface Area

*i*阶L_p对偶仿射表面积

张 蕊[1*]，马统一[2]

[1]西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
[2]河西学院数学与统计学院，甘肃 张掖
Email: *zhangrui930918@126.com

收稿日期：2018年1月8日；录用日期：2018年1月23日；发布日期：2018年1月31日

摘 要

Ludwig根据L_p混合体积的定义引进了L_p仿射表面积的概念，随后汪和何定义了L_p仿射对偶仿射表面积。近年，马统一引进了*i*阶L_p仿射表面积，本文介绍了的*i*阶L_p对偶仿射表面积的定义并且利用Brunn-Minowski-Fiery理论建立了几个不等式。

*通讯作者。

文章引用: 张蕊, 马统一. *i* 阶 L_p 对偶仿射表面积[J]. 理论数学, 2018, 8(1): 99-104.
DOI: 10.12677/pm.2018.81012

关键词

L_p仿射表面积，L_p对偶仿射表面积，i阶L_p对偶表面积，Brunn-Minkowski-Firey理论，i阶L_p对偶仿射表面积

1. 引言和主要结果

这篇文章的背景是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$。设 $\mathcal{K}^n$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体(有非空内点的紧凸集)的集合。用 $\mathcal{K}_o^n$，$\mathcal{K}_c^n$ 和 $\mathcal{K}_s^n$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 中包含原点为内点的凸体集合，中心在原点的凸体集合和关于原点对称的凸体集合。用 $V_i(K)$ 表示的 i 维体积凸体 K 的 i 维体积，$\mathcal{S}_o^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体(关于原点)，标准单位球 B 的 n 维体积用 ω_n 表示，并用 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面。

Leichtweiß ([1])给出仿射表面积的定义，若 $K\in\mathcal{K}^n$，K 的仿射表面积 $\Omega(K)$ 被定义为：

$$n^{-\frac{1}{n}}\Omega_p(K)^{\frac{n+1}{n}}=\inf\left\{nV_1(K,Q^*)V(Q)^{\frac{1}{n}}:Q\in S_o^n\right\} \tag{1.1}$$

Lutwak 根据 L_p 混合体积引进了 L_p 仿射表面积([2])。若 $K\in\mathcal{K}_o^n$，$p\geq 1$，K 的 L_p 仿射表面积 $\Omega(K)$ 被定义为：

$$n^{-\frac{p}{n}}\Omega_p(K)^{\frac{n+p}{n}}=\inf\left\{nV_p(K,Q^*)V(Q)^{\frac{p}{n}}:Q\in S_o^n\right\} \tag{1.2}$$

显然，当 $p=1$，$\Omega_p(K)$ 就是经典的仿射表面积。

2008 年，根据 L_p 混合体积的定义([3])，汪和何给出对偶仿射表面积的定义，若 $K\in\mathcal{K}_o^n$，$1\leq p\leq n$，L_p 对偶仿射表面积 $\tilde{\Omega}_{-p}(K)$ 被定义为：

$$n^{\frac{p}{n}}\tilde{\Omega}_{-p}(K)^{\frac{n-p}{n}}=\inf\left\{n\tilde{V}_{-p}(K,Q^*)V(Q)^{-\frac{p}{n}}:Q\in S_o^n\right\} \tag{1.3}$$

近年来，马统一([4])将 L_p 仿射表面积 $\Omega_p(K)$ 引入到 i 阶 L_p 仿射表面积 $\Omega_p^i(K)$，若 $K\in\mathcal{K}_o^n$，$i\in\{0,1,\cdots,n\}$，i 阶 L_p 仿射表面积 $\Omega_p^i(K)$ 被定义为：

$$n^{-\frac{p}{n-i}}\Omega_p^{(i)}(K)^{\frac{n+p-i}{n-i}}=\inf\left\{nW_{p,i}(K,Q^*)\tilde{W}_i(Q)^{\frac{p}{n-i}}:Q\in S_o^n\right\} \tag{1.4}$$

随后，马统一和冯宜彬给出了 i 阶 L_p 仿射表面积的完整定义([5])。若 $p\geq 0, i\in\{0,1,\cdots,n\}$，且 $K\in\mathcal{F}_{i,o}^n$，则 i 阶 L_p 仿射表面积 $\Omega_p^i(K)$ 的定义如下：

$$\tilde{\Omega}_p^{(i)}(K)=\int_{S_{n-1}}f_{p,i}(K,u)^{\frac{n-i}{n+p-i}}\mathrm{d}S(u) \tag{1.5}$$

令(1.5)中的 $i=0$，i 阶 L_p 对偶仿射表面积就是经典的 L_p 仿射表面积([6])。

现在我们定义 i 阶 L_p 对偶仿射表面积。若 $K\in\mathcal{K}_o^n$，$i\in\{0,1,\cdots,n\}, p\geq 1$，则 i 阶 L_p 对偶仿射表面积 $\Omega_{-p}^i(K)$ 的定义如下：

$$n^{\frac{p}{n-i}}\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{\frac{n-p-i}{n-i}}=\inf\left\{n\tilde{W}_{-p,i}(K,Q^*)\tilde{W}_i(Q)^{-\frac{p}{n-i}}:Q\in S_o^n\right\} \tag{1.6}$$

定理 1.1：若 $K\in\mathcal{K}_c^n$，$i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，且 $p\geq 1$，则

$$\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{n-p-i}\leq n^{n-p-i}\omega_n^{-2p}W_i(K)^{n-i}\tilde{W}_i(K)^p \tag{1.7}$$

当 $i=0$ 时，等号成立当且仅当 K 是一个椭球体，当 $0<i<n-1$ 时，当且仅当 K 是一个中心在原点的 n 维球。

定理 1.2： 若 $K\in\mathcal{K}_c^n$，$i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，且 $p\geq 1$，则

$$\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{n-p-i}\leq n^{n-p-i}(\omega_i\omega_{n-i})^{-2p}\binom{n}{i}^{2p}W_i(K)^{n+p-i} \tag{1.8}$$

当 $i=0$ 时，等号成立当且仅当 K 是一个椭球体，当 $0<i<n-1$ 时，当且仅当 K 是一个中心在原点的 $(n-i)$ 维球。

定理 1.3： 若 $K\in\mathcal{K}_c^n$，$i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，且 $p\geq 1$，则

$$\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K^*)\leq n^2W_i(K)\tilde{W}_i(K^*) \tag{1.9}$$

当 $i=0$ 时，等号成立当且仅当 K 是一个中心在原点的椭球体，当 $0<i<n-1$ 时，当且仅当 K 是一个中心在原点的球。

定理 1.1~1.3 的证明在第三部分。

2. 预备知识

如果 $K\in\mathcal{K}^n$，K 的支撑函数 $h_K=h(K,\cdot):\mathbb{R}^n(-\infty,\infty)$ 被定义为([7] [8])

$$h(K,x)=\max\{x\cdot y:y\in K\},x\in\mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

这里 $x\cdot y$ 表示 x 和 y 的标准内积。

如果 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个紧的星形(关于原点)，则 K 的径向函数 $\rho_K=\rho(K,\cdot):\mathbb{R}^n\setminus[0,\infty)$ 被定义为([7] [8])：

$$\rho(K,x)=\max\{\lambda>0:\lambda x\in K\},x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\} \tag{2.2}$$

如果 ρ_K 是正连续的函数，则称 K 是一个星体(关于原点)。如果 $\rho(K,u)/\rho(L,u)$ 是与 $u\in S^{n-1}$ 无关的，则称星体 K 和 L 是互相膨胀的。

对于 $K\in\mathcal{K}_o^n$，K 的极体 K^* 被定义为：([7] [8])

$$K^*=\{x\in\mathbb{R}^n:x\cdot y\leq 1,y\in K\} \tag{2.3}$$

根据(2.3)，我们有 $(K^*)^*=K$，且

$$h_{K^*}=\frac{1}{\rho_K},\quad \rho_{K^*}=\frac{1}{h_K} \tag{2.4}$$

对于 $K\in\mathcal{K}_c^n$ 和它的极体 K^*，Blaschke-Santaló 不等式([6])的证明如下：

引理 2.1： 若 $K\in\mathcal{K}_c^n$，则

$$V(K)V(K^*)\leq\omega_n^2 \tag{2.5}$$

等号成立当且仅当 K 是一个椭球体。

注意当 $K\in S_o^n$，K 的体积 $V(K)$ 如下：

$$V(K)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^n(u)\mathrm{d}S(u) \tag{2.6}$$

这里 S 是 S^{n-1} 上 Lebesgue 测度。

如果 $K,L\in\mathcal{S}_o^n$，$p>0,\lambda,\mu\geq 0$，(不同时为零)，K 和 L 的 L_p 线性组合 $\lambda\cdot K+_p\mu\cdot L\in S_o^n$ 被定义为([2])

$$\rho(\lambda\cdot K+p\mu\cdot L,\cdot)^p=\lambda\rho(K,\cdot)^p=\mu\rho(L,\cdot)^p \tag{2.7}$$

1996 年，给出了 L_p 对偶混合体积的概念([2])：如果 $K,L\in S_o^n$，$p\geq 1$ 且 $\varepsilon>0$，K 和 L 的 L_p 对偶混合体积被定义为：

$$\frac{n}{-p}\tilde{V}_{-p}(K,L)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{V(K+_{-p}\varepsilon\cdot L)-V(K)}{\varepsilon} \tag{2.8}$$

由(2.2)和(2.3)，Haberl 给出了 L_p 对偶混合体积的完整表述：如果 $K,L\in S_o^n$，且 $p>0$，则

$$\tilde{V}_{-p}(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n+p}(u)\rho_L^{-p}(u)\mathrm{d}S(u) \tag{2.9}$$

由(2.3)和(2.4)，我们可以得到对任意 $K\in S_o^n$，且 $p>0$，

$$\tilde{V}_{-p}(K,K)=V(K) \tag{2.10}$$

L_p 对偶混合均质积分的定义如下：如果 $K,L\in S_o^n$，$p\geq 1$，$\varepsilon>0$ 且实数 $i\neq n$，K 和 L 的 L_p 对偶混合均质积分 $\tilde{W}_{-p,i}(K,L)$ 被定义为([9])：

$$\frac{n-i}{-p}\tilde{W}_{-p,i}(K,L)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\tilde{W}_i(K+_{-p}\varepsilon\cdot L)-\tilde{W}_i(K)}{\varepsilon} \tag{2.11}$$

若 $i=0$，则(2.11)就是经典的 L_p 对偶混合体积，即 $\tilde{W}_{-p,0}(K,L)=\tilde{V}_{-p}(K,L)$。

根据(2.11)，王卫东和冷岗松给出了 L_p 对偶混合均质积分的完整表述([9])：如果 $K,L\in S_o^n$，$p\geq 1$ 且实数 $i\neq n$，$n+p$，则

$$\tilde{W}_{-p,i}(K,L)=\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n+p-i}(u)\rho_L^{-p}(u)\mathrm{d}S(u) \tag{2.12}$$

结合(2.10)和(2.12)，若 $K\in\mathcal{S}_o^n$，$p\geq 1$，且 $i\neq n$，$n+p$，则：

$$\tilde{W}_{-p,i}(K,K)=\tilde{W}_i(K) \tag{2.13}$$

引理 2.2：([10])如果 $K\in\mathcal{K}_o^n$，且 $0<i<n,i\in\mathbb{R}$，则

$$\tilde{W}_i(K)\leq V(K)^{\frac{n-i}{n}}\omega_n^{\frac{i}{n}} \tag{2.14}$$

等号成立当且仅当 K 是一个中心在原点的 n 维椭球体。

引理 2.2：([10])若 $K\in\mathcal{K}_o^n$，且 $i\in\{1,\cdots,n-1\}$，则

$$\tilde{W}_i(K)\leq W_i(K) \tag{2.15}$$

等号成立当且仅当 K 是一个中心在原点的 n 维椭球体。

3. 定理 1.1~1.3 的证明

定理 1.1 的证明：根据定义 $\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)$，可以得到如果 $K\in\mathcal{K}_c^n$，$Q\in\mathcal{S}_o^n$，

$$\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{n-p-i}\leq n^{n-p-i}\tilde{W}_{-p,i}(K,Q^*)^{n-i}\tilde{W}_i(Q)^{-p}\text{。}$$

令 $Q=K^*$，则有

$$\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{n-p-i}\le n^{n-p-i}\tilde{W}_i(K)^{n-i}\tilde{W}_i(K^*)^{-p} \tag{3.1}$$

结合 Blaschke-Santaló 不等式(2.5)和引理 2.2，可以得到：

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{n-p-i}\tilde{W}_i(K)^{-p} &\le n^{n-p-i}\tilde{W}_i(K)^{n-i}\left(\tilde{W}_i(K^*)^{-p}\tilde{W}_i(K)^{-p}\right)\\ &\le n^{n-p-i}\tilde{W}_i(K)^{n-i}\omega_n^{\frac{-2ip}{n}}\left(V(K)^{-p}V(K^*)^{\frac{-(n-ip}{n}}\right)。\\ &\le n^{n-p-i}\omega_n^{-2p}\tilde{W}_i(K)^{n-i}\end{aligned}$$

因此，

$$\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{n-p-i}\le n^{n-p-i}\omega_n^{-2p}\tilde{W}_i(K)^{n-i}\tilde{W}_i(K)^{p}。$$

由Blaschke-Santaló不等式(2.5)和引理2.2中等号成立的条件可得，当 $i=0$ 时等号在不等式(1.7)中成立当且仅当 K 是一个椭球体。当 $0<i<n-1$时，等号在不等式(1.7)中成立当且仅当 K 是一个中心在原点的 n 维椭球体。

定理 1.2 的证明：结合不等式(3.1)和 Blaschke-Santaló 不等式(2.5)，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{n-p-i} &\le n^{n-p-i}\tilde{W}_i(K)^{n-i}\widetilde{W_i}(K^*)^{-p}\\ &= n^{n-p-i}\tilde{W}_i(K)^{n+p-i}\left[\tilde{W}_i(K)\tilde{W}_i(K^*)\right]^{-p}\\ &= n^{n-p-i}\tilde{W}_i(K)^{n+p-i}\omega_i^{-2p}\binom{n}{i}^{2p}\left[V_{n-i}(K)V_{n-i}(K^*)\right]^{-p}。\\ &\le n^{n-p-i}(\omega_i\omega_{n-i})^{-2p}\binom{n}{i}^{2p}\omega_n^{-2p}\tilde{W}_i(K)^{n+p-i}\end{aligned}$$

在证明过程中我们很容易得到当 $i=0$ 时，等号在不等式(1.8)中成立当且仅当 K 是一个椭球体。当 $0<i\le n-1$时，等号在不等式(1.8)中成立当且仅当 K 是一个中心在原点的 $(n-i)$ 维椭球体。

定理 1.3 的证明：由 $\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)$ 定义可得

$$n^{\frac{p}{n-i}}\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{\frac{n-p-i}{n-i}}\le n\tilde{W}_{-p,i}(K,Q^*)\tilde{W}_i(Q)^{\frac{-p}{n-i}}。$$

对任何 $Q\in\mathcal{S}_o^n$，令 $Q=K^*$，我们有

$$n^{\frac{p}{n-i}}\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)^{\frac{n-p-i}{n-i}}\le n\tilde{W}_i(K)\tilde{W}_i(K^*)^{\frac{-p}{n-i}} \tag{3.2}$$

令 $K=K^*$，我们有

$$n^{\frac{p}{n-i}}\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K^*)^{\frac{n-p-i}{n-i}}\le n\tilde{W}_i(K^*)\tilde{W}_i(K)^{\frac{-p}{n-i}} \tag{3.3}$$

结合(3.2)，(3.3)和引理，可以得到：

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K^*)\right)^{\frac{n-p-i}{n-i}}\\ &\le n^{\frac{2(n-p-i)}{n-i}}\tilde{W}_i(K)\tilde{W}_i(K^*)\left(\tilde{W}_i(K)\tilde{W}_i(K^*)\right)^{\frac{-p}{n-i}}。\\ &\le n^{\frac{2(n-p-i)}{n-i}}\left(\tilde{W}_i(K)\tilde{W}_i(K^*)\right)^{\frac{n-p-i}{n-i}}\end{aligned}$$

因此，

$$\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K)\tilde{\Omega}_{-p}^{(i)}(K^*) \le n^2 \tilde{W}_i(K)\tilde{W}_i(K^*),$$

根据引理 2.3 中等号成立的条件，可以得到当 $i=0$ 时，在不等式(1.9)中等号成立当且仅当 K 是一个椭球体。当 $0<i\le n-1$ 时，等号在不等式(1.9)中成立当且仅当 K 是一个中心在原点的椭球体。

基金项目

国家自然科学基金资助(11561020, 11371224)。

参考文献 (References)

[1] Leichtweiß, K. (1989) Bemerkungen Zur Definition Einer Erweiterten Affinoberfläche Von E. Lutwak. *Manuscripta Mathematica*, **65**, 181-197. https://doi.org/10.1007/BF01168298

[2] Lutwek, E. (1996) The Brunn-Minkowsk-Firey Theoy II: Affine and Geominimal Surface Areas. *Advanced Mathematics*, **118**, 244-294. https://doi.org/10.1006/aima.1996.0022

[3] Wang, W. and He, B.W. (2008) L_p-Dual Affine Surface Area. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **348**, 746-751. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.08.006

[4] Ma, T.Y. (2013) Some Inequalities Related to (i, j)-Type L_p Mixed Affine Surface and L_p Mixed Curvature Image. *Journal of Inequalities and Applications*, 470. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-470

[5] Ma, T.Y. and Feng, Y.B. (2015) The i th L_p-Affine Surface Area. *Journal of Inequalities and Applications*, 187. https://doi.org/10.1186/s13660-015-0703-7

[6] Lutwek, E. (1987) Mixed Affine Surface Area. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **125**, 351-360. https://doi.org/10.1016/0022-247X(87)90097-7

[7] Gardner, R.J. (2006) Geometric Tomography. 2nd Edition. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781107341029

[8] Schneider, R. (1993) Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511526282

[9] Wang, W.D. and Leng, G.S. (2005) L_p-Dual Mixed Quermassintegrals. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **36**, 177-188.

[10] Lutwek, E. (1975) Dual Mixed Volumes. *Pacific Journal of Mathematics*, **58**, 531-538. https://doi.org/10.2140/pjm.1975.58.531