Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(2), 126-131
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.82016

Hans汉斯

The Uniqueness of a Class of Entire Functions Sharing Small Functions

E Liang

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 1262558394@qq.com

Received: Feb. 21st, 2018; accepted: Mar. 6th, 2018; published: Mar. 14th, 2018

Abstract

This paper improves the previous results, the following theorem is established: Let $f(z)$ and $g(z)$ be two non-constant entire functions, and satisfy $\rho_f < \frac{3}{4}$, where $p_1(z)$ and $p_2(z)$ are two discriminant polynomials, if $p_1(z)$ and $p_2(z)$ are IM sharing functions of $f(z)$ and $g(z)$, and $f(z)-g(z)$ has infinitely zero of multiplicity, then $f(z)\equiv g(z)$.

Keywords

Entire Functions, Order of Growth, IM Shared Values

一类分担小函数的整函数的唯一性

梁　娥

云南师范大学数学学院研究生，云南　昆明
Email: 1262558394@qq.com

收稿日期：2018年2月21日；录用日期：2018年3月6日；发布日期：2018年3月14日

摘　要

本文推进了前人的结果得到如下定理成立：设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是两个非常数整函数，且 $\rho_f < \frac{3}{4}$， $p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 是两个判别多项式，若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 为IM分担小函数，且 $f(z)-g(z)$ 有无穷多个重零点，则 $f(z)\equiv g(z)$。

文章引用: 梁娥. 一类分担小函数的整函数的唯一性[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 126-131.
DOI: 10.12677/pm.2018.82016

关键词

整函数，增长极，IM分担值

1. 引言、相关引理及主要结果

2008 年，何萍等[1]证明了：

定理 A：设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是两个非常数整函数，且 $\rho_f < \frac{1}{4}$，$p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 是两个判别多项式，若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 为 IM 分担小函数，且 $f(z)-g(z)$ 有无穷多个重零点，则 $f(z)\equiv g(z)$。

2013 年，高晓佳等[2]证明了：

定理 B：设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为两个非常数整函数，且 $\rho_f < \frac{3}{4}$，若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 有两个有穷的 IM 分担值 a 和 b，则 $f(z)\equiv g(z)$。

在以上定理的基础上，本文做出了进一步的推进。

本文涉及的相关引理：

引理 1：[3]设 $f(z)$ 是级 $\rho_f(<\infty)$ 且不恒为零的整函数，则

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\frac{f'}{f}\right)}{\log r}\le \max\left\{\rho_f-1,0\right\}$$

引理 2：[4]设集合 B_1 和 B_2 是 R^+ 的两个可测子集，如果 $\triangle(B_1)>\frac{1}{2},\triangle(B_2)>\frac{1}{2}$，则 $B_1\cap B_2\ne\varnothing$，且进一步有 $\triangle(B_1\cap B_2)>0$。

引理 3：[5]设 $H(z)$ 是超越整函数，其增长极 $\rho_H<1$，令

$$L(r,H):=\min_{|z|=r}\left|H(z)\right| \quad (r>0)$$

对于充分大的正数 r，用 $r\theta_H(r)$ 表示 $\left\{z\,\middle|\,|z|=r\text{且}\left|H(z)\right|>r^{n_0}\right\}$ 所包含的最大弧的弧长(若在圆周 $|z|=r$ 上都有 $\theta_H(r)=2\pi$)，那么如下两个结论中至少有一个必定成立：

1) 存在具有正的上对数密度的集合 $F_H\left(\subseteq[1,+\infty)\right)$ 使得：

$$L(r,H)>r^{n_0} \quad \left(\forall r\in F_H\right)$$

2) 对于 $\forall\tau\in(0,1)$ 有

$$\triangle\left(F_{\tau,H}\right)\ge\frac{1-2\rho_H(1-\tau)}{\tau}$$

其中 $F_{\tau,H}:=\left\{r\,\middle|\,r\ge1\text{且}\theta_H(r)>2\pi(1-\tau)\right\}$。

注：引理 3 是由文献[5]中引理 2.3 直接得到的。其中 n_0 为任意有穷正数，由该文献中的引理 2.3 可知其选取无本质差别。

引理 4：[6]设 $f(z)$ 是超越整函数，且 $\rho:=\rho_f<+\infty$，则存在对数测度为有穷的集合 $\Omega_f\subset[1,+\infty)$，使对 $\forall r\in[1,+\infty)\setminus\Omega_f$ 有

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|\le|z|^{\rho-\frac{1}{2}}\quad\left(\forall z\in\left\{z\in C\,\middle|\,|z|=r\right\}\right)$$

引理 5：[7]设 $f(z)$ 是超越亚纯函数，如果判别亚纯函数 $a_j(z)(\not\equiv\infty)(j=1,2)$ 为 $f(z)$ 的小函数，令

$$L(f(z),a_1(z),a_2(z))=\begin{vmatrix}1 & f(z) & f'(z)\\ 1 & a_1(z) & a_1'(z)\\ 1 & a_2(z) & a_2'(z)\end{vmatrix}$$

则 $L(f(z),a_1(z),a_2(z))\not\equiv 0$。

引理 6：[8]设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数，如果判别亚纯函数 $a_j(z)(\not\equiv\infty)(j=1,2)$ 为 $f(z)$ 的小函数，令

$$L(f(z),a_1(z),a_2(z))=\begin{vmatrix}1 & f(z) & f'(z)\\ 1 & a_1(z) & a_1'(z)\\ 1 & a_2(z) & a_2'(z)\end{vmatrix}$$

则 $m\left(r,\dfrac{L(f,a_1,a_2)f^k}{(f-a_1)(f-a_2)}\right)=S^*(r,f)\ (k=0,1)$。

本文证明了结果：

定理 1：设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 是两个非常数整函数，且 $\rho_f<\dfrac{3}{4}$，$p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 是两个判别多项式，若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 以 $p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 为 IM 分担小函数，且 $f(z)-g(z)$ 有无穷多个重零点，则 $f(z)\equiv g(z)$。

2. 定理 1 的证明

若 $f(z)$ 与 $g(z)$ 中至少有一个为多项式，则 $p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 都退化为常数，根据定理 B 知结论成立，故以下仅考虑 $f(z)$ 与 $g(z)$ 均为超越整函数的情形：

因为 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都以多项式 $p_1(z)$ 与 $p_2(z)$ 为 IM 分担小函数，则令

$$\varphi(z):=\frac{L(f(z),p_1(z),p_2(z))(f(z)-g(z))}{(f(z)-p_1(z))(f(z)-p_2(z))},$$

$$\psi(z):=\frac{L(g(z),p_1(z),p_2(z))(f(z)-g(z))}{(g(z)-p_1(z))(g(z)-p_2(z))}$$

其中

$$L(f,p_1,p_2)=\begin{vmatrix}1 & f & f'\\ 1 & p_1 & p_1'\\ 1 & p_2 & p_2'\end{vmatrix},\ L(g,p_1,p_2)=\begin{vmatrix}1 & g & g'\\ 1 & p_1 & p_1'\\ 1 & p_2 & p_2'\end{vmatrix}$$

由引理 5 知 $L(f,p_1,p_2)\not\equiv 0, L(g,p_1,p_2)\not\equiv 0$。且易证得我们令的辅助函数 $\varphi(z),\psi(z)$ 实际上都是整函数。再结合引理 6 有

$$\begin{aligned}T(r,\varphi(z))&=m(r,\varphi(z))\\&\le m\left(r,\frac{L(f,p_1,p_2)}{(f-p_1)(f-p_2)}\right)+m(r,f)+m(r,g)+\log 2\\&\le T(r,f)+T(r,g)+S^*(r,f)\end{aligned}$$

结合条件可得 $\rho_\varphi < \dfrac{3}{4}$，同理有 $\rho_\psi < \dfrac{3}{4}$。

若 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 中至少有一个为多项式，不妨设 $\varphi(z)$ 为多项式，结合条件 $f(z)-g(z)$ 有无穷多个重零点。于是 $\varphi(z)\equiv 0$，而由引理 5 知 $L(f(z),p_1(z),p_2(z))\not\equiv 0$，则 $f(z)\equiv g(z)$；若 $\psi(z)$ 为多项式，同理可得 $f(z)\equiv g(z)$。

若 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 均为超越整函数，我们将根据引理 3 分情况讨论：

情形 1：$\exists H(z)\in\{\varphi(z),\psi(z)\}$ 以及 $F_H\subset[1,+\infty)$ 使 F_H 具有正的上对数密度，不妨设 $H(z)=\varphi(z)$（否则 $H(z)=\psi(z)$ 时讨论类似)，则 F_ϕ 具有正的上对数密度，且

$$L(r,\varphi)=\min_{|z|=r}|\varphi(z)|>r^{n_0}\quad(\forall r\in F_\varphi) \tag{1}$$

这里的 n_0 取为大于多项式 p_1-p_2 的次数的值。

而 $f(z)$ 为超越整函数，且 $\rho_f<\dfrac{3}{4}$，故由引理 4 知：$\exists\Omega_f\subset[1,+\infty)$ 使 Ω_f 具有有穷的对数密度，且对 $\forall r\in[1,+\infty)\setminus\Omega_f$ 有

$$\left|\frac{(f-p_1)'}{f-p_1}\right|\le|z|^{\rho-\frac{1}{2}}<|z|^{\frac{1}{4}}\quad\left(\forall z\in\{z\in C\,\|z|=r\}\right) \tag{2}$$

因为 $[1,+\infty)\setminus\Omega_f$ 的密度为 1，从而 $F_\varphi\cap([1,+\infty)\setminus\Omega_f)$ 为无界集，故存在严格递增的无界数列 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 包含于 $F_\varphi\cap([1,+\infty)\setminus\Omega_f)$，于是

$$L(t_n,\varphi)>t_n^{n_0}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{3}$$

$$\left|\frac{(f(z)-p_1(z))'}{f(z)-p_1(z)}\right|<|t_n|^{\frac{1}{4}}\quad\left(\forall z\in\{z\in C\,\|z|=t_n\},n=1,2,\cdots\right) \tag{4}$$

$$t_n\to+\infty\quad(n\to+\infty) \tag{5}$$

而

$$\varphi(z)=\left[(p_1'-p_2')-(p_1-p_2)\frac{(f-p_1)'}{f-p_1}\right]\left[1-\frac{g-p_2}{f-p_2}\right] \tag{6}$$

且由

$$\begin{aligned}t_n^{n_0}<|\varphi(z)|&=\left|(p_1'-p_2')-(p_1-p_2)\frac{(f-p_1)'}{f-p_1}\right|\cdot\left|1-\frac{g-p_2}{f-p_2}\right|\\&\le\left[|p_1-p_2|\left|\frac{p_1'-p_2'}{p_1-p_2}\right|+|p_1-p_2|\left|\frac{(f-p_1)'}{f-p_1}\right|\right]\cdot\left[1+\left|\frac{g-p_2}{f-p_2}\right|\right]\\&\le|p_1-p_2|\left[\left|\frac{p_1'-p_2'}{p_1-p_2}\right|+\left|\frac{(f-p_1)'}{f-p_1}\right|\right]\cdot\left[1+\left|\frac{g-p_2}{f-p_2}\right|\right].\end{aligned}$$

再结合(3)、(4)、(5)得

$$\left|\frac{g-p_2}{f-p_2}\right|\to+\infty\quad\left(\forall z\in\left\{z\in C\middle\||z|=t_n\right\}\right)\tag{7}$$

同理，

$$\psi(z)=\left[(p_1'-p_2')-(p_1-p_2)\frac{(g-p_1)'}{g-p_1}\right]\left[1-\frac{f-p_2}{g-p_2}\right]\tag{8}$$

则由(7)、(8)结合引理 1 知：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{T(t_n,\psi(z))}{\log t_n}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m(t_n,\psi(z))}{\log t_n}=0$$

所以$\psi(z)$一定是多项式，这与$\psi(z)$为超越整函数相矛盾。

情形 2：对于$\forall\tau\in(0,1)$，$F_{\tau,\varphi}:=\left\{r\middle|r\ge1\text{且}\theta_\varphi(r)>2\pi(1-\tau)\right\}$和$F_{\tau,\psi}:=\left\{r\middle|r\ge1\text{且}\theta_\varphi(r)>2\pi(1-\tau)\right\}$满足

$$\triangle(F_{\tau,\varphi})\ge\frac{1-2\rho_\varphi(1-\tau)}{\tau},\triangle(F_{\tau,\psi})\ge\frac{1-2\rho_\psi(1-\tau)}{\tau}$$

由于$\rho_\varphi<\frac{3}{4},\rho_\psi<\frac{3}{4}$。从而存在充分小的正数$\varepsilon_0$，使

$$\frac{3}{4}>\rho_\varphi+2\rho_\varphi\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2},\frac{3}{4}>\rho_\psi+2\rho_\psi\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}$$

取$\tau=\tau_0=\frac{1}{2}-\varepsilon_0$，有

$$F_{\tau_0,\varphi}:=\left\{r\middle|r\ge1\text{且}\theta_\phi(r)>\pi+2\varepsilon_0\right\},F_{\tau_0,\zeta}:=\left\{r\middle|r\ge1\text{且}\theta_\psi(r)>\pi+2\varepsilon_0\right\}\tag{9}$$

且$\triangle(F_{\tau_0,\varphi})>\frac{1}{2},\triangle(F_{\tau_0,\psi})>\frac{1}{2}$，由引理 2 知$\triangle(F_{\tau_0,\varphi}\cap F_{\tau_0,\psi})>0$，故存在严格递增的无界数列$\{r_j\}_{j=1}^{+\infty}\subset(F_{\tau_0,\varphi}\cap F_{\tau_0,\psi})$。继续令：

$$E_j=\left\{\theta:\theta\in[0,2\pi]\middle\|g(r_je^{i\theta})-p_2(r_je^{i\theta})\right|<\left|f(r_je^{i\theta})-p_2(r_je^{i\theta})\right\|\}$$

$$\tilde{E}_j:=[0,2\pi]\setminus E_j\quad(j=1,2,\cdots)$$

因为$mes(E_j\cup\tilde{E}_j)=2\pi\,(j=1,2,\cdots)$，从而不失一般性，不妨设存在正整数列$\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$满足$mesE_{n_k}\ge\pi\,(k=1,2,\cdots)$ (另一情形用$\psi(z)$换$\varphi(z)$即可)，为了表述上的方便，不妨设$n_k=k$，于是对于一切的k有$n_k=k\,(k=1,2,\cdots)$，那么

$$mesE_k\ge\pi\quad(k=1,2,\cdots)\tag{10}$$

令$G_k=F_{r_k,\varphi}\cap E_k\,(k=1,2,\cdots)$。则由(9)、(10)得$mesG_k\ge2\varepsilon_0\,(k=1,2,\cdots)$。于是对于$\forall k\in N$有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{G_k}\log^+r_k^2\mathrm{d}\theta&\le\frac{1}{2\pi}\int_{G_k}\log^+\left|\varphi(r_ke^{i\theta})\right|\mathrm{d}\theta\\&\le\frac{1}{2\pi}\int_{G_k}\log^+|p_1'-p_2'|\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{G_k}\log^+|p_1-p_2|\mathrm{d}\theta\\&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{G_k}\log^+\left|\frac{f'-p_1'}{f-p_1}\right|\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{G_k}\log^+\left|\frac{g-p_2}{f-p_2}\right|\mathrm{d}\theta+\log4\\&\le m(r_k,p_1'-p_2')+m(r_k,p_1-p_2)+m\left(r_k,\frac{f'-p_1'}{f-p_1}\right)+\log4\end{aligned}$$

故

$$\frac{2\varepsilon_0}{\pi}\log^+ r_k \le m\left(r_k, p_1'-p_2'\right)+m\left(r_k, p_1-p_2\right)+m\left(r_k, \frac{f'-p_1''}{f-p_1}\right)+\log 4$$

进而有

$$0<\frac{2\varepsilon_0}{\pi}\le \underline{\lim}_{k\to\infty}\frac{m\left(r_k, \frac{f'-p_1'}{f-p_1}\right)}{\log r_k}\le \overline{\lim}_{r\to\infty}\frac{m\left(r, \frac{f'-p_1'}{f-p_1}\right)}{\log r}$$

而 $f(z)$ 是级小于 1 的超越整函数，故结合引理 1 有

$$\overline{\lim}_{r\to+\infty}\frac{m\left(r, \frac{f'-p_1'}{f-p_1}\right)}{\log r}=0$$

这就得出矛盾。

综上所述，定理得证。

参考文献

[1] 何萍, 熊坚. 关于有穷级整函数的唯一性[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 2007, 27: 5-8.

[2] 高晓佳, 许宇霞. 级小于 $\frac{3}{4}$ 的整函数的唯一性[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2013.

[3] Boas, R.P. (1954) Entire Functions. Nortbwestern University, Evanston.

[4] 蔡翠. 一类整函数的唯一性[D]: [硕士学位论文]. 昆明: 云南师范大学, 2005.

[5] Bergweile, W. and Lang Ley, J.K. (2007) Zeros of Differences of Meromorphic Functions. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **142**, 133-147. https://doi.org/10.1017/S0305004106009777

[6] Adams, W.W. and Straus, E.G. (1971) Non-Archimedian Analytic Functions Taking the Same Values at the Same Points. *Journal of Mathematics*, **15**, 418-424.

[7] 李玉华. 具有 4 个有穷的 IM 公共小函数的整函数[J]. 数学学报, 1998, 41(2): 249-260.

[8] 李玉华. 分担 4 个或 5 个小函数的亚纯函数[J]. 数学研究与评论, 2000, 20(1): 94-96.