Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(2), 132-135
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.82017

Hans汉斯

The Generalized Gronwall Inequalities and Related Notes

Zhihong Kong

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kzh196408@126.com

Received: Feb. 20th, 2018; accepted: Mar. 7th, 2018; published: Mar. 14th, 2018

Abstract

In this paper, the accurate generalized Gronwall inequalities are presented and proved. In addition, we pointed out the mistakes in the literature [1] and [2].

Keywords

Generalized, Gronwall Inequalities, Integral

广义Gronwall不等式及相关注记

孔志宏

太原师范学院数学系，山西 晋中
Email: kzh196408@126.com

收稿日期：2018年2月20日；录用日期：2018年3月7日；发布日期：2018年3月14日

摘 要

给出了(准确的)广义Gronwall不等式及其证明，并指出了文献[1]和[2]中的错误。

关键词

广义，Gronwall不等式，积分

文章引用: 孔志宏. 广义 Gronwall 不等式及相关注记[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 132-135.
DOI: 10.12677/pm.2018.82017

1. 引言

Gronwall 不等式是一个重要的积分不等式，在研究和论证诸如 Cauchy 问题解的唯一性、解对初值和参数的连续性和可微性等方面起着重要的作用。详见[1] [2] [3] [4] [5]等诸多文献。本文给出了(准确的)广义 Gronwall 不等式及其证明，并指出了文献[1]和[2]中的错误。

定理(广义 Gronwall 不等式)假设函数 $\psi(t)$ 满足

$$\psi(t)\le\alpha(t)+\int_0^t\beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[0,T] \tag{1}$$

其中 $\alpha(t)\in R$ 且 $\beta(t)\ge 0$。则有下面两个不等式成立：

$$\psi(t)\le\alpha(t)+\int_0^t\alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t\beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,\ t\in[0,T] \tag{2}$$

和

$$\psi(t)\le|\alpha(t)|\exp\left(\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right),\ t\in[0,T] \tag{3}$$

2. 不等式(2)的另一种证法

令

$$R(t)=\alpha(t)+\int_0^t\beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s \tag{4}$$

则

$$R'(t)=\alpha'(t)+\beta(t)\psi(t)\le\alpha'(t)+\beta(t)R(t)$$

上式两端同乘以 $\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)$，得

$$R'(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)-\beta(t)R(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)\le\alpha'(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[R(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)\right]\le\alpha'(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)$$

上式两端从 0 到 t 积分，得

$$R(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)-R(0)\le\int_0^t\exp\left(-\int_0^s\beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\alpha(s)$$

由(4)知 $R(0)=\alpha(0)$，于是

$$\begin{aligned}&R(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)-\alpha(0)\\&\le\alpha(t)\exp\left(-\int_0^t\beta(s)\mathrm{d}s\right)-\alpha(0)+\int_0^t\alpha(s)\beta(s)\exp\left(-\int_0^s\beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

即

$$R(t) \le \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s$$

再次用已知条件 $\psi(t) \le R(t)$，即得式(2)。

3. 不等式(3)的证明

在 $\psi(t) \ge 0$ 的情形，因 $\beta(t) \ge 0$，所以 $\int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s \ge 0$。再由条件 $\psi(t) \le R(t)$，我们有

$$\frac{\alpha'(t) + \beta(t)\psi(t)}{\alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s} \le \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + \beta(t) \tag{5}$$

式(5)两端从 0 到 t 积分，得

$$\ln\left|\alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s\right| - \ln|\alpha(0)| \le \ln|\alpha(t)| - \ln|\alpha(0)| + \int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s$$

即有

$$\ln\frac{\left|\alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s\right|}{|\alpha(t)|} \le \int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s$$

由于 $\ln\psi(t) \le \ln\left|\alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)\mathrm{d}s\right|$，故当 $\alpha(t) \ne \pm 1$ 时

$$\ln\frac{\psi(t)}{|\alpha(t)|} \le \int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s$$

从而

$$\frac{\psi(t)}{|\alpha(t)|} \le \exp\left(\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right)$$

即

$$\psi(t) \le |\alpha(t)|\exp\left(\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right)$$

当 $\alpha(t) = \pm 1$ 时，由上面的过程可推得 $\psi(t) \le \exp\left(\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right)$。

当 $\alpha(0) = 0$ 时，由所设条件(1)知，$\psi(0) = 0 = \alpha(0)$。

此时式(3)中等号成立。又由于 $|\alpha(t)|\exp\left(\int_0^t \beta(s)\mathrm{d}s\right) \ge 0$，因此当 $\psi(t) < 0$ 时，式(3)显然成立。至此式(3)得证。

4. 相关注记

文献[1]中，式(2-33)中指数函数里 $\beta(r)$ 的积分区间是错误的，不是 $[0,t]$，应是 $[s,t]$；同时，其式(2-34)成立的条件：“如果，另外对 $s \le t$ 有 $\alpha(s) \le \alpha(t)$”是不需要的，这一点，从上述式(3)的证明过程中可以看出；还有，其式(2-34)中 $\alpha(t)$ 应改为 $|\alpha(t)|$。

文献[2]中，b)的条件：“若 $\psi(x)$ 还是非负的单调不减函数”是不需要的，只需将结论中不等式右端的 $\psi(x)$ 改为 $|\psi(x)|$ 即可，或者，将上述条件中的“单调不减函数”的假设去掉，同样能保证其结论成立。

参考文献

[1] 盖拉德・泰休. 常微分方程与动力系统[M]. 金成桴, 译. 北京: 机械工业出版社, 2011: 31-33.

[2] 周尚仁, 权宏顺. 常微分方程习题集[M]. 北京: 高等教育出版社, 1980: 75-76.
[3] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2000: 12-15.
[4] 陆启韶, 彭临平, 杨卓琴. 常微分方程与动力系统[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2010: 16-20.
[5] 范进军. 常微分方程续论[M]. 济南: 山东大学出版社, 2009: 30-34.