Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(2), 164-168
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.82020

Hans汉斯

Wilker-Huygens Inequalities Involving Generalized Trigonometric and Hyperbolic Function

Xiaoxiao Liu[1], Chunyan Wang[2], Mingchun Xie[1], Han Du[1], Xiaoyan Ma[1*]

[1]Schoolof Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang
[2]Changkou Senior High School, Hangzhou Zhejiang
Email: *mxy@zstu.edu.cn

Received: Feb. 24th, 2018; accepted: Mar. 12th, 2018; published: Mar. 20th, 2018

Abstract

This paper establishes Wilker-Huygens inequalities for generalized trigonometric and hyperbolic function with a parameter. And some classical inequalities for the generalized trigonometric and hyperbolic functions are generalized. The obtained results of this paper improve and complement some known results.

Keywords

Wilker-Type Inequality, Hugens-Type Inequality, Generalized Trigonometric Function, Generalized Hyperbolic Function, Inequality

---

广义三角函数与双曲函数的Wilker-Huygens型不等式

刘潇潇[1]，王春艳[2]，谢明春[1]，杜　涵[1]，马晓艳[1*]

[1]浙江理工大学理学院，浙江 杭州
[2]富阳区场口中学，浙江 杭州
Email: *mxy@zstu.edu.cn

收稿日期：2018年2月24日；录用日期：2018年3月12日；发布日期：2018年3月20日

*通讯作者。

文章引用: 刘潇潇, 王春艳, 谢明春, 杜涵, 马晓艳. 广义三角函数与双曲函数的 Wilker-Huygens 型不等式[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 164-168. DOI: 10.12677/pm.2018.82020

摘　要

主要研究了带有一个参数p的广义三角函数及广义双曲函数的Wilker型与Huygens型不等式，给出了广义三角函数与双曲函数的加强不等式。本文用极其简单的方法所获得的一些结果补充推广了已知结果。

关键词

Wilker型不等式，Hugens型不等式，广义三角函数，广义双曲函数，不等式

1. 引言

近几年，对三角函数与双曲函数的一些不等式性质的研究取得了显著的进展。特别是关于三角函数以及双曲函数的 Wilker 型不等式[1]及 Huygens 型不等式[2]

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}>2 \tag{1}$$

$$2\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}>3 \tag{2}$$

吸引了很多学者的广泛研究[3] [4] [5]。

同时，也获得了双曲函数的 Wilker 型不等式[6]及 Huygens 型不等式[7]

$$\left(\frac{\sinh x}{x}\right)^2+\frac{\tanh x}{x}>2 \tag{3}$$

$$2\frac{\sinh x}{x}+\frac{\tanh x}{x}>3 \tag{4}$$

1995 年，Lindqvist 在文献[8]给出了带有一个参数 p 的广义三角函数 $\sin_p x,\cos_p x,\tan_p x$，以及广义双曲函数 $\sinh_p x,\cosh_p x,\tanh_p x$ (当 $p=2$ 时，即为初等三角函数)的定义，吸引了很多学者去研究。对于 $1<p<\infty, x\in\left[0,\pi_p/2\right]$，广义反正弦函数 $\arcsin_p(x)$ 以及广义反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh}_p(x)$ 定义为：

$$\arcsin_p(x)=\int_0^x\frac{1}{\left(1-t^p\right)^{1/p}}\mathrm{d}t,\ 0\le x\le 1$$

$$\operatorname{arcsinh}_p(x)=\int_0^x\frac{1}{\left(1+t^p\right)^{1/p}}\mathrm{d}t,\ x\ge 0$$

其中

$$\frac{\pi_p}{2}=\arcsin_p(1)=\int_0^1\frac{1}{\left(1-t^p\right)^{1/p}}\mathrm{d}t$$

当 $p=2$ 时，广义反正弦函数 $\arcsin_p(x),\operatorname{arcsinh}_p(x)$ 退化为反正弦函数 $\arcsin x,\operatorname{arcsinh} x$。广义反正弦函数 $\arcsin_p(x),\operatorname{arcsinh}_p(x)$ 的反函数为 $\sin_p(x),\sinh_p(x)$。

同样的，对于 $1<p<\infty, x\in\left[0,\pi_p/2\right]$，广义余弦函数 $\cos_p(x)$ 定义为：

$$\cos_p(x)=\left(1-\sin_p(x)^p\right)^{1/p}$$

自然地，可以推广正切函数以及双曲正切函数

$$\tan_p(x)=\frac{\sin_p(x)}{\cos_p(x)},\ \tanh_p(x)=\frac{\sinh_p(x)}{\cosh_p(x)}$$

本文将不等式(1)-(4)推广到带有一个参数 p 的广义三角函数及广义双曲函数中去，给出了广义三角函数以及广义双曲函数的 Wilker 型及 Huygens 型的加强不等式。

2. 主要结果

引理 1. ([9]，定理 3.6)对于 $p\in(1,\infty)$，函数 $f(x)\equiv\dfrac{\log\left(\sin_p(x)/x\right)}{\log\cos_p(x)}$ 从 $\left(0,\dfrac{\pi_p}{2}\right)$ 到 $\left(0,\dfrac{1}{p+1}\right)$ 上严格单调递减。特别地，对于任意的 $p\in(1,\infty), x\in\left(0,\dfrac{\pi_p}{2}\right)$，有

$$\cos_p^\alpha x<\frac{\sin_p x}{x}<1 \tag{5}$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{p+1}$ 为最佳常数。

引理 2. ([9]，定理 3.8)对于 $p\in(1,\infty)$，函数 $f(x)\equiv\dfrac{\log\left(\sinh_p(x)/x\right)}{\log\cosh_p(x)}$ 从 $(0,\infty)$ 到 $\left(\dfrac{1}{p+1},1\right)$ 上是严格单调递增的。特别地，对于任意的 $p\in(1,\infty), x\in(0,\infty)$，有

$$\cosh_p(x)^\alpha<\frac{\sinh_p x}{x}<\cosh_p(x)^\beta \tag{6}$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{p+1}, \beta=1$ 为最佳常数。

定理 3. 对于 $p>1, n\in N, (n-1)\alpha-p\beta\ge 0, \beta\le 0$，成立不等式

$$(n-1)\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^\alpha+\left(\frac{x}{\tan_p x}\right)^\beta>n,\quad x\in\left(0,\pi_p/2\right) \tag{7}$$

$$(n-1)\left(\frac{x}{\sinh_p x}\right)^\alpha+\left(\frac{x}{\tanh_p x}\right)^\beta>n,\quad x>0 \tag{8}$$

证明：1) 由 Jacobsthal 不等式，设 $a,b>0$，则 $na^{n-1}b\le(n-1)a^n+b^n$ 仅当 $a=b$ 时等号成立，由引理 1 中(5)式，因 $\dfrac{x}{\sin_p x}>1$，当 $(n-1)\alpha-p\beta\ge 0$ 时，

$$
\begin{aligned}
&(n-1)\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{\alpha}+\left(\frac{x}{\tan_p x}\right)^{\beta}\\
&\ge n\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{\frac{(n-1)\alpha}{n}}\left(\frac{x}{\tan_p x}\right)^{\frac{\beta}{n}}=n\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{\frac{(n-1)\alpha+\beta}{n}}\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{-\frac{\beta}{n}}\left(\frac{x}{\tan_p x}\right)^{\frac{\beta}{n}}\\
&=n\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{\frac{(n-1)\alpha+\beta}{n}}\left(\cos_p x\right)^{\frac{\beta}{n}}>n\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{\frac{(n-1)\alpha+\beta}{n}}\left(\frac{\sin_p x}{x}\right)^{\frac{(p+1)\beta}{n}}\\
&=n\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{\frac{(n-1)\alpha+\beta}{n}}\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{-\frac{(p+1)\beta}{n}}=n\left(\frac{x}{\sin_p x}\right)^{\frac{(n-1)\alpha-p\beta}{n}}\ge n
\end{aligned}
$$

2) 同理，利用引理 2 中(6)式以及 $\frac{\sinh_p x}{x}>1$ 可证得不等式(8)成立。

3. 说明

1) 当 $n=2,\alpha=-2,\beta=-1,p=2$ 时，公式(7)和(8)即退化为 Wilker 型不等式(1)和(3)；当 $n=3,\alpha=\beta=-1,p=2$ 时，公式(7)和(8)即退化为 Huygens 型不等式(2)和(4)。

2) 当 $n=3,\alpha=-1,\beta=-1,p\ge 2$ 时，$(n-1)\alpha-p\beta=-2+p\ge 0$，公式(7)可退化为

$$2\frac{\sin_p x}{x}+\frac{\tan_p x}{x}>3 \tag{9}$$

即文献[10]中的公式(35)。

3) 当 $n=2,\alpha=-2,\beta=-1,p\ge 2$ 时，显然有 $(n-1)\alpha-p\beta=-2+p\ge 0$，公式(7)分别化为

$$\left(\frac{\sin_p x}{x}\right)^2+\frac{\tan_p x}{x}>2 \tag{10}$$

即文献[10]中(36)式。

4) 当 $n=p+1,\alpha=\beta=-1$，有 $(n-1)\alpha-p\beta=p(\alpha-\beta)=0$。公式(7)、(8)即

$$p\frac{\sin_p x}{x}+\frac{\tan_p x}{x}>1+p \tag{11}$$

$$p\frac{\sinh_p x}{x}+\frac{\tan_p x}{x}>1+p \tag{12}$$

即退化为文献[9]定理 3.16 中(3.17)式、(3.18)式。

基金项目

浙江省自然科学基金项目（LQ17A010010），浙江理工大学学生科研项目。

参考文献

[1] Wilker, J.B. (1989) Problem E3306. *The American Mathematical Monthly*, **96**, 55-57.
http://www.jstor.org/stable/2323260?origin=crossref
https://doi.org/10.2307/2323260

[2] Huygens, C. Oervres Completes. Societe Hounondaise des Science, Haga, 1888-1940.

[3] Neuman, E. (2012) On Wilker and Huygens Type Inequalities. *Mathematical Inequalities & Applications*, **15**, 271-279.

https://doi.org/10.7153/mia-15-22

[4] Zhu, L. (2005) A New Simple Proof of Wilker's Inequalities. *Mathematical Inequalities & Applications*, **8**, 749-750. https://doi.org/10.7153/mia-08-70

[5] Wu, S. (2009) On Extension and Refinement of Wilker's Inequality. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **39**, 683-687. https://doi.org/10.1216/RMJ-2009-39-2-683

[6] Zhu, L. (2007) On Wilker-Type Inequalities. *Mathematical Inequalities & Applications*, **10**, 727-731. https://doi.org/10.7153/mia-10-67

[7] Neuman, E. and Sandor, J. (2010) On Some Inequalities Involving Trigonometric and Hyperbolic Function with Emphasis on the Cusa-Huygens, Wilker and Huygens Inequalities. *Mathematical Inequalities & Applications*, **13**, 715-723. https://doi.org/10.7153/mia-13-50

[8] Lindqvist, P. (1995) Some Remarkable Sine and Cosine Functions. *Ricerche di Matematica*, 269-290.

[9] Klén, R., Vuorinen, M. and Zhang, X.H. (2014) Inequalities for the Generalized Trigonometric and Hyperbolic Functions. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, **409**, 521-529. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.07.021

[10] Neuman, E. (2014) Inequalities Involving Generalized Trigonometric and Hyperbolic Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, **8**, 725-736. https://doi.org/10.7153/jmi-08-54