Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 208-214
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83026

Hans汉斯

Oscillate Criterion for Second-Order Nonlinear Differential Equations

Xinxiao Su*, Lina Dai, Quanwen Lin

Department of Mathematics, School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong
Email: *1551358885@qq.com

Received: Apr. 19th, 2018; accepted: May 3rd, 2018; published: May 10th, 2018

Abstract

Using Riccati-transform, we further study second-order nonlinear differential equations of the form $\left(r(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = 0$. We get some new oscillate criteria.

Keywords

Generalized Riccati-Transform, Nonlinear, Differential Equations, Oscillate Criterion

二阶非线性微分方程的振动准则

苏新晓*，戴丽娜，林全文

广东石油化工学院理学院数学系，广东 茂名
Email: *1551358885@qq.com

收稿日期：2018年4月19日；录用日期：2018年5月3日；发布日期：2018年5月10日

摘 要

利用Riccati-变换技巧，对二阶非线性微分方程$\left(r(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = 0$作进一步的研究，给出了一些新的振动准则。

关键词

广义Riccati变换，非线性，微分方程，振动准则

*通讯作者。

文章引用: 苏新晓, 戴丽娜, 林全文. 二阶非线性微分方程的振动准则[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 208-214.
DOI: 10.12677/pm.2018.83026

1. 引言

考虑二阶非线性阻尼微分方程

$$\left(r(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = 0 \tag{E}$$

其中 $r,p,q \in C\left([t_0,\infty)\right)$，$r(t)>0$，$t \ge t_0$。$f \in C(\Re)$，$xf(x)>0$，$f'(x)\ge 0$，$x \ne 0$。

本文仅限于研究定义在$[t_0,\infty)$上方程(E)存在的解。方程(E)的解称为振动的，如果它有任意大的零点；否则称它为非振动的。

方程(E)称为强次线性，如果

$$0 < \int_{0^+}^{\varepsilon} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)},\ \int_{0^-}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)} < \infty,\ \forall \varepsilon > 0 \tag{1.1}$$

称为强超线性，如果

$$0 < \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)},\ \int_{-\varepsilon}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)} < \infty,\ \forall \varepsilon > 0 \tag{1.2}$$

近几年来，二阶微分方程振动理论及其应用受到很大的关注，出现大量的研究论文和专著，请参考文[1]-[6]。特别许多学者对方程(E)的解的振动性给出了一些有效的振动准则，其中，Rgovchenko [5]虽然对方程(E)建立了解的振动准则，但是文中对函数f作了严格的要求，即要求函数f满足条件

$$f'(x) \ge k > 0$$

使得结果不能用于方程 $x''(t)+q(t)\left|x(t)\right|^{\alpha}\operatorname{sgn}x(t)=0,\alpha>0$。从而限制了它的适用范围。文[6]和文[7]建立了方程(E)新的振动准则，推广和改善了文[5]的结果。

本文目的同样在不要求 $f'(x)\ge k>0$ 的条件下，建立方程(E)新的振动准则，利用不同的 Riccati 变换改善了文[6] [7]的结果，我们的结果推广和改善文[5] [6] [7] [8]相应结果，并以例子说明我们得到的结果的重要性，进一步说明了文[6] [7]的结果不能用于本文所给例子。

2. 主要结果

定义函数

$$F_1(x) = \begin{cases} \int_{0^+}^{x} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)}, & x>0 \\ \int_{0^-}^{x} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)}, & x<0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$F_2(x) = \begin{cases} \int_{x}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)}, & x>0; \\ \int_{x}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}v}{f(v)}, & x<0. \end{cases} \tag{2.2}$$

考虑集合 $D=\left\{(t,s)\,\middle|\, t\ge s\ge t_0\right\}$。函数 $H\in C(D,R)$ 称为属于 X，记为 $H\in X$，如果

(A_1) $H(t,t)=0, t\ge t_0$, $H(t,s)>0, (t,s)\in D$;

(A_2) $\frac{\partial H}{\partial s}(t,t)=0, t\ge t_0$; $\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\le 0, (t,s)\in D$;

使用一些记号定义函数， $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ ，令

$$P(t)=\frac{1}{r(t)}\left(\rho(t)p(t)+\rho(t)r'(t)-\rho'(t)r(t)\right)$$

定理 2.1：设函数 f 满足(1.1)式， $H\in X$ ，若存在正函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ ，满足

$$P(t)\ge 0,\ P'(t)\le 0,\ t\ge t_0 \tag{2.3}$$

且

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s=\infty \tag{2.4}$$

则方程(E)振动。

证设方程(E)有一个非振动解 $x(t)$ ，不妨设 $x(t)>0$ ，考虑广义 Riccati 变换

$$w(t)=\rho(t)\frac{x'(t)}{f(x(t))} \tag{2.5}$$

(2.5)式对 t 进行求导，并由(E)式，知

$$\begin{aligned}
w'(t)&=\left(\frac{\rho(t)}{r(t)}\right)'\frac{r(t)x'(t)}{f(x(t))}+\frac{\rho(t)}{r(t)}\left(\frac{r(t)x'(t)}{f(x(t))}\right)'\\
&=\frac{\rho'(t)r(t)}{r(t)}\frac{x'(t)}{f(x(t))}-\frac{\rho(t)r'(t)}{r(t)}\frac{x'(t)}{f(x(t))}+\frac{\rho(t)}{r(t)}\frac{\left(r(t)x'(t)\right)'}{f(x(t))}-\rho(t)\frac{\left(x'(t)\right)^2f'(x(t))}{f^2(x(t))}\\
&=-\rho(t)\frac{q(t)}{r(t)}-\frac{1}{r(t)}\left(\rho(t)p(t)+\rho(t)r'(t)-\rho'(t)r(t)\right)\frac{x'(t)}{f(x(t))}-\rho(t)\frac{\left(x'(t)\right)^2f'(x(t))}{f^2(x(t))}\\
&\le-\rho(t)\frac{q(t)}{r(t)}-\frac{1}{r(t)}\left(\rho(t)p(t)+\rho(t)r'(t)-\rho'(t)r(t)\right)\frac{x'(t)}{f(x(t))}\\
&=-\rho(t)\frac{q(t)}{r(t)}-P(t)\frac{x'(t)}{f(x(t))}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

不等式(2.6)两边同时乘以 $H(t,s)$ ，并对此从 t_0 到 t 对 s 进行积分，得

$$\int_{t_0}^{t}H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\le-\int_{t_0}^{t}H(t,s)w'(s)\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t}H(t,s)P(s)\frac{x'(s)}{f(x(t))}\mathrm{d}s \tag{2.7}$$

利用条件(A_2)，有

$$-\int_{t_0}^{t}H(t,s)w'(s)\mathrm{d}s=H(t,t_0)w(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)w(s)\mathrm{d}s\le H(t,t_0)w(t_0) \tag{2.8}$$

由条件(2.3)和积分中值定理知，对任意固定的 $s\ge t_0$ ，存在 $\zeta\in[t_0,s]$ ，使得

$$-\int_{t_0}^{s}P(v)\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v=-P(t_0)\int_{t_0}^{\zeta}\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v=P(t_0)\int_{x(\zeta)}^{x(t_0)}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)} \tag{2.9}$$

由(2.1)知，当 $x>0$ 时，有

$$\int_{x(\zeta)}^{x(t_0)}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)}<\begin{cases}0, & \square x(\zeta)>x(t_0),\\ \int_{0^+}^{x(t_0)}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)}, & \square x(\zeta)\le x(t_0),\end{cases}$$

注意(2.1)式，于是(2.9)式可改成

$$-\int_{t_0}^{s}P(v)\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v=P(t_0)\int_{x(\zeta)}^{x(t_0)}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)}\le P(t_0)F_1(x(t_0))\equiv L_1,\ \forall s\ge t_0 \tag{2.10}$$

利用(2.10)式，得到

$$\begin{aligned}-\int_{t_0}^{t}H(t,s)P(s)\frac{x'(s)}{f(x(t))}\mathrm{d}s&=\int_{t_0}^{t}H(t,s)\mathrm{d}\left(-\int_{t_0}^{s}P(v)\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v\right)\\&=-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\left(-\int_{t_0}^{s}P(v)\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}s\\&\le L_1\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\mathrm{d}s\right)=L_1H(t,t_0)\end{aligned} \tag{2.11}$$

联合(2.7)，(2.8)和(2.11)时，得到

$$\int_{t_0}^{t}H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\le\left(w(t_0)+L_1\right)H(t,t_0)=LH(t,t_0)$$

因此

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\le L$$

上式与条件(2.4)矛盾，同理 $x(t)<0$ 时也成立，定理 2.1 证毕。

定理 2.2 设函数 f 满足(1.2)式， $H\in X$ ，若存在正函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ ，满足

$$P(t)\le 0,\ P'(t)\le 0,\ t\ge t_0 \tag{2.12}$$

且条件(2.4)成立，则方程(E)振动。

证设方程(E)有一个非振动解 $x(t)$ ，如同定理 2.1 的证明一样，我们有(2.7)和(2.8)式对 $t\ge t_0$ 成立。由条件(2.12)和积分中值定理，对任意固定的 $s\ge t_0$ ，存在 $\zeta\in[t_0,s]$ ，使得

$$-\int_{t_0}^{s}P(v)\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v=-P(t_0)\int_{t_0}^{\zeta}\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v=-P(t_0)\int_{x(t_0)}^{x(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)} \tag{2.13}$$

由(2.2)知，当 $x>0$ 时

$$\int_{x(t_0)}^{x(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)}<\begin{cases}0, & \square x(\zeta)<x(t_0),\\ \int_{x(t_0)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)}, & \square x(\zeta)\ge x(t_0),\end{cases}$$

注意到(2.2)式，于是(2.13)式可改成

$$-\int_{t_0}^{s}P(v)\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v=-P(t_0)\int_{x(t_0)}^{x(\zeta)}\frac{\mathrm{d}\tau}{f(\tau)}\le -P(t_0)F_2(x(t_0))\equiv L_2,\ \forall s\ge t_0 \tag{2.14}$$

利用(2.14)式，得到

$$-\int_{t_0}^{t} H(t,s)P(s)\frac{x'(s)}{f(x(t))}\mathrm{d}s=-\int_{t_0}^{t} H(t,s)\mathrm{d}\left(-\int_{t_0}^{s} P(v)\frac{x'(v)}{f(x(v))}\mathrm{d}v\right)\le M_2\left(-\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\mathrm{d}s\right)=L_2H(t,t_0)$$

此时，(2.7)式成为

$$\int_{t_0}^{t} H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\le\left(w(t_0)+L_2\right)H(t,t_0)=L'H(t,t_0)$$

因此，

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\le L'$$

上式与条件(2.4)矛盾，同理当 $x(t)<0$ 时结论也成立，定理 2.2 证毕。

推论 2.1：当 $f(x(t))=|x(t)|^{\alpha}\operatorname{sgn}x(t),\alpha\ge1$ 时，$H\in X$。若存在正函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，满足条件(2.12)和(2.4)式，则方程(E)振动。

证设方程(E)有一个非振动解 $x(t)$，不妨设 $x(t)>0$，定义函数

$$w(t)=\rho(t)\frac{x'(t)}{x^{\alpha}(t)} \tag{2.15}$$

(2.15)式对 t 进行求导，并由(E)式，得

$$\begin{aligned}
w'(t)&=\left(\frac{\rho(t)}{r(t)}\right)'\frac{r(t)x'(t)}{x^{\alpha}(t)}+\frac{\rho(t)}{r(t)}\left(\frac{r(t)x'(t)}{x^{\alpha}(t)}\right)',\quad t\ge t_0\\
&=\left(\rho'(t)-\rho(t)\frac{r'(t)}{r(t)}\right)\frac{x'(t)}{x^{\alpha}(t)}+\frac{\rho(t)}{r(t)}\frac{\left(r(t)x'(t)\right)'x^{\alpha}(t)-\alpha r(t)\left[x'(t)\right]^2x^{\alpha-1}(t)}{x^{2\alpha}(t)}\\
&=-\rho(t)\frac{q(t)}{r(t)}-\frac{1}{r(t)}\left(\rho(t)p(t)+\rho(t)r'(t)-\rho'(t)r(t)\right)\frac{x'(t)}{x^{\alpha}(t)}-\alpha\rho(t)\left[\frac{x'(t)}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}(t)}\right]^2\\
&\le-\rho(t)\frac{q(t)}{r(t)}-\frac{1}{r(t)}\left(\rho(t)p(t)+\rho(t)r'(t)-\rho'(t)r(t)\right)\frac{x'(t)}{x^{\alpha}(t)}\\
&=-\rho(t)\frac{q(t)}{r(t)}-P(t)\frac{x'(t)}{x^{\alpha}(t)}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

不等式(2.16)两边同时乘以 $H(t,s)$，并对此从 t_0 到 t 对 s 进行积分，因此

$$\int_{t_0}^{t} H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s\le-\int_{t_0}^{t} H(t,s)w'(s)\mathrm{d}s-\int_{t_0}^{t} H(t,s)P(s)\frac{x'(s)}{x^{\alpha}(s)}\mathrm{d}s \tag{2.17}$$

利用条件(A_2)，有

$$-\int_{t_0}^{t} H(t,s)w'(s)\mathrm{d}s=H(t,t_0)w(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial H}{\partial s}(t,s)w(s)\mathrm{d}s\le H(t,t_0)w(t_0) \tag{2.18}$$

由条件(2.12)和积分中值定理知，对任意固定的 $s\ge t_0$，存在 $\theta\in[t_0,s]$，使得

$$-\int_{t_0}^{s} P(u)\frac{x'(u)}{x^{\alpha}(u)}\mathrm{d}u=-P(t_0)\int_{t_0}^{\theta}\frac{x'(u)}{x^{\alpha}(u)}\mathrm{d}u=\frac{-P(t_0)}{\alpha-1}\left(x^{1-\alpha}(t_0)-x^{1-\alpha}(\theta)\right)\le\frac{-P(t_0)}{\alpha-1}x^{1-\alpha}(t_0)=L_3 \tag{2.19}$$

利用(2.19)式，得到

$$
\begin{aligned}
-\int_{t_0}^{t} H(t,s)P(s)\frac{x'(s)}{x^{\alpha}(s)}\mathrm{d}s &= \int_{t_0}^{t} H(t,s)\mathrm{d}\left(-\int_{t_0}^{s} P(u)\frac{x'(u)}{x^{\alpha}(u)}\mathrm{d}u\right) \\
&= -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\left(-\int_{t_0}^{s} P(u)\frac{x'(u)}{x^{\alpha}(u)}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s \qquad (2.20)\\
&\le L_3\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{\partial H}{\partial s}(t,s)\mathrm{d}s\right) = L_3 H(t,t_0)
\end{aligned}
$$

联合(2.17)，(2.18)和(2.20)，有

$$
\int_{t_0}^{t} H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s \le \left(w(t_0)+L_3\right)H(t,t_0) = L''H(t,t_0)
$$

因此

$$
\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s \le L''
$$

上式与条件(2,4)矛盾，同理当 $x(t)<0$ 时结论也成立，证毕。

注 1：在方程(E)中取 $r(t)\equiv 1,\ p(t)\equiv 1$。若存在正函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty))$ 使得满足 $(\rho(t)-\rho'(t))\ge 0, (\rho(t)-\rho'(t))'\le 0$，且条件(2.4)成立，则方程(E)成立。

注 2：当 $p(t)=0$ 时，推论 2.1 推广和改善了文献[1] [2] [3]的相应结果。

3. 应用

例考虑二阶阻尼微分方程

$$
\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}x'(t)\right)' + \frac{1}{2t\sqrt{t}}x'(t) + \frac{\pi^3}{8}t\left|x(t)\right|^{\alpha}\operatorname{sgn}x(t) = 0,\ t\ge t_0 = \frac{2}{\pi} \qquad (E_1)
$$

其中，我们取 $r(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}, p(t)=\frac{1}{2t\sqrt{t}}, q(t)=\frac{\pi^3}{8}t, \rho(t)=t^2$。且取 $H(t,s)=\frac{(t-s)^2}{s^{\frac{7}{2}}}$，则对任意 $x(t)\ne 0$，我们有

$$
P(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(t^2\times\frac{1}{2t\sqrt{t}}-\frac{1}{4}t^2\times\frac{1}{t\sqrt{t}}-2t\times\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)=-\frac{3}{8}<0,\ P'(t)=0.
$$

且有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t} H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s &= \frac{\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^7}}{\left(t-\frac{2}{\pi}\right)^2}\int_{\frac{2}{\pi}}^{t}\frac{(t-s)^2}{s^{\frac{7}{2}}}s^2\times\frac{\pi^3 s}{8}\times 2\sqrt{s}\mathrm{d}s = \frac{\sqrt{\frac{8}{\pi}}}{\left(t-\frac{2}{\pi}\right)^2}\int_{\frac{2}{\pi}}^{t}(t-s)^2\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{\sqrt{\frac{8}{\pi}}}{\left(t-\frac{2}{\pi}\right)^2}\times\frac{1}{3}\left(t-\frac{2}{\pi}\right)^3 = \sqrt{\frac{8}{9\pi}}\left(t-\frac{2}{\pi}\right)
\end{aligned}
$$

因此，

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)\rho(s)\frac{q(s)}{r(s)}\mathrm{d}s=\limsup_{t\to\infty}\sqrt{\frac{8}{9\pi}}\left(t-\frac{2}{\pi}\right)=\infty$$

显然，方程(E_1)满足条件(2.12)和(2.4)，故由推论 2.1 知方程(E_1)振动。但是，文献[5] [6] [7] [8]中的振动准则都不能应用于方程(E_1)。

基金项目

国家自然科学基金(11271380)、茂名市科技局软科学项目(20140340; 2015038)。

参考文献

[1] Wong, J.S.W. (1973) A Second Order Nonlinear Oscillation Theorem. *American Mathematical Society*, **40**, 487-491. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0318585-6

[2] Wong, J.S.W. (1986) An Oscillation Criterion for Second Order Nonlinear Differential Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **98**, 109-112. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1986-0848886-3

[3] 任崇勋, 张玉峰, 庄瑜, 俞元洪. 二阶常微分方程的一个振动定理[J]. 山东矿业学院学报, 1998, 17(1): 112-116.

[4] 俞元洪, 靳明忠. 非线性二阶微分方程的振动定理[J]. 云南工学院学报, 1991(3): 79-84+90.

[5] Rogovchenko, Y.V. (2000) Oscillation Theorems for Second Order Equations with Damping. *Nonlinear Analysis*, **41**, 1005-1028. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(98)00324-1

[6] 俞元洪. 带有阻尼项的二阶非线性微分方程的振动准则[J]. 应用数学学报. 1993, 16(4): 433-441.

[7] 林全文, 俞元洪. 二阶非线性振动的 Philos 型积分平均[J]. 数学物理学报, 2012, 32A(4): 661-669.

[8] 林全文, 俞元洪. 带有阻尼项 Emden-Fowler 方程的区间振动准则[J]. 数学杂志, 2012, 32(4): 716-722.