Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 345-349
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84046

Weakly Φ-Supplemented Subgroups of Prime Power Order

Fengyan Xie[1], Huahui Shang[2]

[1]School of Civil Engineering and Architecture, University of Anyang, Anyang Henan
[2]Basic Department, Yongcheng Vocational College, Yongcheng Henan
Email: kfxiefengyan@163.com

Received: Jun. 19th, 2018; accepted: Jul. 3rd, 2018; published: Jul. 10th, 2018

Abstract

Let G be group and H a subgroup of G. We say H is weakly Φ-supplemented in G if G has a subgroup T such that $G = HT$ and $H \cap T \leq \Phi(H)$, where $\Phi(H)$ is Frattini subgroup of H. In this paper, new results of the structure and properties of a finite group G are given, providing that some subgroups of prime power order are weakly Φ-supplemented in G.

Keywords

Weakly Φ-Supplemented Subgroups, p-Nilpotent Groups, Sylow Subgroups

准素数阶子群的弱Φ-可补

谢凤艳[1]，尚华辉[2]

[1]安阳学院建筑工程学院，河南 安阳
[2]永城职业学院基础部，河南 永城
Email: kfxiefengyan@163.com

收稿日期：2018年6月19日；录用日期：2018年7月3日；发布日期：2018年7月10日

摘 要

设G是一个群，H是G的子群。称H在G中弱Φ-可补，若G中存在一个子群T使得$G = HT$且$H \cap T \leq \Phi(H)$，其中$\Phi(H)$为H的Frattini子群。本文给出弱Φ-可补的概念并利用群G的某些素数幂阶子群的弱Φ-可补子性给出群G的一些性质和结构。

文章引用：谢凤艳，尚华辉．准素数阶子群的弱 Φ-可补[J]．理论数学, 2018, 8(4): 345-349.
DOI: 10.12677/pm.2018.84046

关键词

弱Φ-可补子群，p-幂零群，Sylow-子群

1. 引言

本文所有群都是有限群。称 H 在 G 中可补的，若群 G 中有子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H \cap T = 1$。Hall [1]中证明了有限群 G 可解的充分必要条件是 G 的每个 Sylow 子群在 G 中可补。作为可补子群的推广。c-正规子群[2]、弱 s-置换子群[3]、弱 s-拟正规嵌入[4]、弱次正规子群[5]等概念先后被提出。利用准素数子群的 c-正规子群、弱 s-置换子群、弱 s-可补嵌入、弱次正规子群，人们得到了许多重要结果(见[2]-[7])。

群 G 的所有极大子群的交用 $\Phi(G)$表示，且称 $\Phi(G)$为 G 的 Frattini 子群。称 H 在 G 中 Φ-可补[6]，若 G 中有正规子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H \cap T \le \Phi(H)$。於遒[8]、邱招丰[9]用准素数子群 Φ-可补性研究有限群的结构。本文在此基础上给出弱 Φ-可补的概念，并利用某些素数幂阶子群的弱 Φ-可补子性对有限群的结构进行研究。

本文未交待的符号和术语见参考文献[10]。

2. 预备知识

定义 1 设 G 是一个群，H 是 G 的子群。称 H 在 G 中弱 Φ-可补，若 G 中存在一个子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H \cap T \le \Phi(H)$。

引理 1 假设 H 是群 G 的子群，N, E 是 G 的正规子群且 H 在 G 中弱 Φ-可补。则下列的断言成立。

1) 若 $H \le M \le G$，则 H 在 M 中弱 Φ-可补。

2) 若 $N \le H$，则 H/N 在 G/N 弱 Φ-可补。

3) 若 $(|H|,|E|)=1$，则 HE/E 在 G/E 弱 Φ-可补。

证明 由 H 在 G 中弱 Φ-可补，可知 G 中有子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H \cap T \le \Phi(H)$。

1) 因为 $H \le M$，所以 $H(M \cap T) = HM \cap MT = HM = M$ 且 $H \cap (M \cap T) = (H \cap T) \cap M \le \Phi(H) \cap M = \Phi(H)$。故 H 在 M 中弱 Φ-可补。

2) 因为$(H/N) \cap (TN/N) = (H \cap TN)/N = (H \cap T)N/N \le \Phi(H)N/N \le \Phi(H/N)$且 $(H/N)(TN/N) = G/N$。因此 H/N 在 G/N 弱 Φ-可补。

3) 因为 $G = HT$，所以$(HE/E)(TE/E) = HTE/E = G/E$。因为$(|H|,|E|)=1$，所以 $(HE/E) \cap (TE/E) = (HE \cap TE)/E = (HE \cap T)E/E = (H \cap T)E/E \le \Phi(H)E/E \le \Phi(HE/E)$。故 HE/E 在 G/E 弱 Φ-可补。

引理 2 ([11]，引理 3)设 p 是群 G 阶的素因子，n 是正整数且满足 p^{n+1} 不整除$|G|$。若 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$，则 G 为 p-幂零群。

3. 主要结论

定理 1 设 G 是一个群，p 是$|G|$的素因子且 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$。如果 G 中存在一个 *Sylow*

p-子群 P，使其每个阶为 p^t (其中 t 为正整数且 $t \le n$)或者 $2p^t$ (P 是非交换 2-群且$|P|/p^t > 2$)子群 H 在 G 中弱 Φ-可补，则 G 为 p-幂零群。

证明 设结论不成立，并令 G 是极小阶反例。由引理 2 得 $p^{n+1}||P|$。通过下列断言完成定理 1 的证明。

1) G 是极小非 p-幂零群。

设 L 是 G 的真子群。因为$|L|$整除$|G|$，所以$\left(|L|,(p-1)\left(p^2-1\right)\cdots\left(p^n-1\right)\right)=1$。如果 p^{n+1} 不整除$|L|$，那么由引理 2 得 L 为 p-幂零群。如果 $p^{n+1}||L|$。令 L_p 是包含在 P 中 L 的 $Sylow$ p-子群，H 是 L_p 的 p^t 或者 $2p^t$(M 是非交换 2-群且$|L_p|/p^t > 2$)阶子群。则对应的 H 是 P 的 p^t 或者 $2p^t$ (P 是非交换 2-群且$|P|/p^t > 2$)阶子群。由定理 1 的条件及引理 1，H 在 L 中弱 Φ-可补。从而 L 满足定理 1 的条件。由 G 的选择得 L 为 p-幂零群。

2) $G = [P]Q$，其中 P 是 G 的正规 $Sylow$ p-子群，$Q\in Syl_q\left(G\right)$，$P/\Phi(P)$是 $G/\Phi(P)$的极小正规子群。

由 1) 及([10]，定理 3.4)得，2) 成立。

3) 设 N 是 G 的一个极小正规子群，则 N 为初等交换 p-群。

因为 G 是 P 和 Q 的半直积，所以 G 为可解群。从而 G 的极小正规子群为初等交换 r 群。如果 p^{n+1} 不整除$|G/N|$，由引理 2 得 G/N 为 p-幂零群。当 p^{n+1} 整除$|G/N|$时。如果 $r = q$。设 M/N 是 PN/N 的子群且满足$|M/N| = p^t$ 或者 $2p^t$ (PN/N 是非交换 2-群且$|PN/N|/p^t > 2$)，则存在 P 的子群 H 且$|H| = p^t$ 或者 $2p^t$ 使得 $M = HN$。若 PN/N 是非交换 2-群。因为 P 同构于 PN/N，所以 P 是非交换 2-群。由定理 1 的条件及引理 1，M/N 在 G/N 中弱 Φ-可补。由 G 的极小选择得 G/N 为 p-幂零群。由于 N 为 q-群，所以 G 为 p-幂零群。这一矛盾说明 $r \ne q$。从而 N 为初等交换 p-群。

4) G/N 为 p-幂零群。

对$|N|$分三种情况考虑。①$|N| > p^t$。设 H 是 N 的真子群且$|H| = p^t$。因为 N 为初等交换群，所以 H 为初等交换群，从而 $\Phi(H) = 1$。由定理 1 的条件，存在 G 的子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H\cap T \le \Phi(H) = 1$。因为 N 为交换群，所以 $N\cap T$ 正规于 N。由 N 的正规性得 $N\cap T$ 正规于 T。而 $G = HT = NT$，故 $N\cap T$ 正规于 G。由 N 的极小正规性得 $N\cap T = 1$ 或者 $N\cap T = N$。如果 $N\cap T = 1$。由 $H\cap T = 1$ 且 $H \le N$，故 $H = N$。这与 H 是 N 的真子群矛盾。如果 $N\cap T = N$。则 $G = NT = T$。故 $H\cap T = H$。这与 $H\cap T \le \Phi(H)$矛盾。②$|N| < p^t$。设 H/N 是 P/N 的子群且$|H/N| = p^t/|N|$或者$|H/N| = 2p^t/|N|$ (如果 P/N 是非交换 2-群且$|P/N|/\left(p^t/|N|\right)>2$)。则 H 是 P 的子群且$|H| = p^t$ 或者$|H| = 2p^t$ (相应地 P 是非交换 2-群且$|P|/p^t > 2$)。由定理 1 的条件及引理 1，H/N 在 G/N 中弱 Φ-可补。又因为$\left(G/N\right)/\left(P/N\right)\cong G/P$ 为 p-幂零群，所以 G/N 满足定理 1 的条件。由 G 的极小选择，G/N 为 p-幂零群。③$|N| = |D|$。因为 N 为初等交换群，所以 $\Phi(N) = 1$。由定理 1 的条件知，N 在 G 中弱 Φ-可补。即存在 G 的子群 T 使得 $G = NT$ 且 $N\cap T \le \Phi(N) = 1$。故 T 是 G 的真子群。由 1)知，T 为 p-幂零群。因为 G/N 同构于 T，所以 G/N 为 p-幂零群。

5) 最后的矛盾。

因为 N 正规于 G，所以 $N\Phi(P)/\Phi(P)$正规于 $G/\Phi(P)$。由 2)和 3)得 $N \le P$。$P/\Phi(P)$是 $G/\Phi(P)$的极小正规子群，所以 $N\Phi(P)/\Phi(P) = P/\Phi(P)$或者 $N\Phi(P)/\Phi(P) = 1$。若 $N\Phi(P)/\Phi(P) = P/\Phi(P)$，则 $P = N\Phi(P) = N$ 为初等交换群。设 H 是 P 的 p^t 阶子群。则 H 为初等交换群，从而 $\Phi(H) = 1$。由定理 1 的条件，存在 G 的子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H\cap T \le \Phi(H) = 1$。因为 P 为交换群，所以 $P\cap T$ 正规于 P。由 P 的正规性得 $P\cap T$ 正规于 T。而 $G = HT = PT$，故 $P\cap T$ 正规于 G。由 $P = N$ 的极小正规性得 $P\cap T = 1$ 或者 $P\cap T = P$。如果 $P\cap T = 1$，由于 $H\cap T = 1$ 且 $H \le P$，故 $H = N$。这与$|H| = p^t < p^{n+1}$ 且 p^{n+1} 整除$|P|$矛盾。如果 $P\cap T = N$，则 $G = PT = T$。故 $H\cap T = H$。这与 $H\cap T \le \Phi(H)$矛盾。若 $N\Phi(P)/\Phi(P) = 1$，则 $N \le \Phi(P)$。由 P 的正规性得，$\Phi(P) \le \Phi(G)$。由 4) $G/\Phi(G)$为 p-幂零群，故 G 为 p-幂零群。这一最后的矛盾完成定理 1 的证明。

推论 1 设 G 是一个群，p 是$|G|$的素因子且$\left(|G|,p-1\right)=1$。如果 G 的某个 $Sylow$ p-子群 P 的每个 p-阶子群和 4 阶子群(如果 P 是非交换 2-群且$|P| > 4$)在 G 中弱 Φ-可补，则 G 为 p-幂零群。

注 1 在推论 1 中，条件$\left(|G|,p-1\right)=1$不可以去掉。比如三次对称群 S_3，$p = 3$ 时。每个 p 阶子群在 S_3 弱 Φ-可补，但 S_3 不是 p-幂零群。

注 2 在推论 1 中，G 的每个 p 阶子群和 4 阶循环子群在 G 中弱 Φ-可补是 G 为 p-幂零群的充分条件不必要条件。比如群 $G = [A]B$，其中$|A| = 5$，$B=\langle a\rangle$，$a\in Aut(A)$。则 G 是 2-幂零的且 $(|G|,2-1)=1$。假设 T 是 $\langle a^2\rangle$ 在 G 中弱 Φ-可补。即 $G=\langle a^2\rangle T$ 且 $\langle a^2\rangle\cap T\le\Phi(\langle a^2\rangle)$。因为 $\Phi(\langle a^2\rangle)=1$，所以 $\langle a^2\rangle$ 在 G 中可补充的。故 $\langle a^2\rangle$ 在 B 中可补充的，这与 B 是 4 阶循环群矛盾。所以 $\langle a^2\rangle$ 在 G 中不是 Φ-可补的。

推论 2 群 G 的每个极小子群和 4 阶子群(如果存在)在 G 中弱 Φ-可补，则 G 为超可解群。

证明 设 p_1 是$|G|$的最小素因子，则 G 的每个 p_1 阶子群和 4 阶子群在 G 中弱 Φ-可补。由推论 1 得，G 为 p_1-幂零群。设 T 为 G 的一个正规 Hall p_1' 子群且 p_2 是$|T|$的最小素因子。则 T 对 p_2 来说满足推论 2 的条件。故 T 有正规 Hall p_2'-子群。依次类推下去，所以 G 是具有 Sylow 塔的群。故 G 为可解群，从而 G 的极小正规子群 N 为初等交换 p 群，其中 p 为$|G|$的素因子。从而 N 的任意非单位子群的 *Frattini* 子群为 1。假设推论 2 结论不成立，并设 G 为极小阶反例。设 L 是 G 的真子群，由推论 2 的条件及引理 1，L 的每个极小子群和 4 阶子群(如果存在)在 L 中弱 Φ-可补。即 L 满足推论 2 的条件。由 G 的极小选择，L 为超可解群。对$|N|$分两种情况考虑。①$|N| > p$，设 H 是 N 的真子群且$|H| = p$。由推论 2 的条件知，H 在 G 中弱 Φ-可补。即存在 G 的子群 T 使得 $G = HT$ 且 $H\cap T\le\Phi(H) = 1$。因为 N 为交换群，所以 $N\cap T$ 正规于 N。由 N 的正规性得 $N\cap T$ 正规于 T。而 $G = HT = NT$，故 $N\cap T$ 正规于 G。由 N 的极小正规性得 $N\cap T = 1$ 或者 $N\cap T = N$。如果 $N\cap T = 1$，由于 $H\cap T = 1$ 且 $H\le N$，故 $H = N$。这与 H 是 N 的真子群矛盾。如果 $N\cap T = N$，则有 $G = NT = T$。故 $H\cap T = H$。这与 $H\cap T\le\Phi(H)$矛盾。②$|N| = p$。由推论 2 的条件知，N 在 G 中弱 Φ-可补。即存在 G 的子群 T 使得 $G = NT$ 且 $N\cap T\le\Phi(N) = 1$。故 T 是 G 的真子群。从而 T 为超可解的。故 $G/N\cong T$ 为超可解群。由([12]，引理 2.3)，G 为超可解群。

定理 2 设 G 是一个群，p 是$|G|$的素因子且 $(|G|,(p-1)(p^2-1)\cdots(p^n-1))=1$。$\mathbf{F}$ 为包含 p-幂零群系的饱和群系。如果存在 G 的一个正规子群 E 使得 $G/E\in\mathbf{F}$ 且 E 中存在一个 *Sylow* p-子群 P，使其每个阶为 p^t (其中 t 为正整数且 $t\le n$)或者 $2p^t$ (P 是非交换 2-群且$|P|/p^t > 2$)子群 H 在 G 中弱 Φ-可补，则 $G\in\mathbf{F}$。

证明 假设结论不成立，G 为极小阶反例。由引理 1 知，P 的每个阶为 p^t (其中 t 为正整数且 $t\le n$)或者 $2p^t$ (P 是非交换 2-群且$|P|/p^t > 2$)子群 H 在 E 中弱 Φ-可补。由定理 1 知，E 为 p-幂零群。设 T 为 E 的正规 Hall p'-子群。则 T 特征于 E。由 E 的正规性，得 T 正规于 G。下面对 T 分两种情况讨论。

$T\ne 1$。因为$(G/T)/(E/T)$同构于 G/E 且 $G/E\in\mathbf{F}$，所以 $(G/T)/(E/T)\in\mathbf{F}$。因为 P 是 E 的 *Sylow* p-子群且 T 是 E 的正规 Hall p'-子群，所以 $E = PT$ 且 E/T 同构于 P。设 M/T 是 E/T 的子群且$|M/T| = p^t$ 或者 $2p^t$ (如果 E/T 是非交换 2-群且$|PT/T|/p^t > 2$)。则存在 P 的子群 H 且$|H| = p^t$ 或者 $2p^t$ (如果 P 是非交换 2-群且$|P|/p^t > 2$)使得 $M = HT$。由定理 2 的条件及引理 1，M/T 在 G/T 中弱 Φ-可补。由 G 的极小选择，$G/T\in\mathbf{F}$。而 T 是 p'-子群，故 $G\in\mathbf{F}$。

$T = 1$。则 $E = P$ 为 p-群。于是 PQ 是 G 的一个子群，其中 Q 为 G 的任一 *Sylow* q-子群($q\ne p$)。由引理 1 及定理 1 知，PQ 是 p-幂零的。从而 Q 正规于 PQ。设 N 是包含在 P 中的 G 的任一非单位正规子群，则 $O^p(G)\le C_G(P)\le C_G(N)$。从而 $[N,G]=[N,G_pO^p(G)]=[N,G_p]$，其中 G_p 为 G 的任一 *Sylow* p-子群。故$[N, G] < G_p$。从而存在 G 的正规子群 L 使得 N/L 是 G 的主因子且$[N, G]\le L$。由此得到 $N/L\le Z(G/L)$。由 N 的选择、$G/P\in\mathbf{F}$ 及 $\mathbf{F}$ 为包含 p-幂零群系的饱和群系，所以 $G\in\mathbf{F}$。

这一最后的矛盾完成了定理 2 的证明。

基金项目

河南省高等学校青年骨干教师培养计划(2016GGJS-204)。

参考文献

[1] Hall, P. (1937) Complemented Groups. *London Mathematical Society*, **12**, 201-204.

https://doi.org/10.1112/jlms/s1-12.2.201

[2] Wang, Y.M. (1996) *c*-Normality of Groups and Its Properties. *Journal of Algebra*, **180**, 954-965. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0103

[3] Skiba, A.N. (2007) On Weakly S-Permutable Subgroups of Finite Groups. *Journal of Algebra*, **315**, 192-209. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2007.04.025

[4] 徐满红, 郭文彬, 黄建红. 有限群的弱 s-拟正规嵌入子群[J]. 数学年刊, 2011, 32A(3): 299-306.

[5] 李士恒, 梁登峰. 弱次正规子群和有限群的可解性[J]. 数学的实践与认识, 2014, 44(16): 230-240.

[6] Li, D.Y. and Guo, X.Y. (2000) The Influence of c-Normallity of Subgroups on the Structure of Finite Groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **150**, 53-60. https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00042-0

[7] Guo, W.B., Xie, F.Y. and Li, B.J. (2009) Some Open Questions in the Theory of Generalized Permutable Subgroups. *Science in China Set A*, **52**, 2132-2144. https://doi.org/10.1007/s11425-009-0045-3

[8] 於遒. 有限群的局部性——对群结构的影响[M]. 南京: 南京大学出版社, 2012.

[9] 邱招丰. 关于有限群的 Φ-可补子群的几个定理[J]. 兰州理工大学学报, 2016, 42(1): 154-157.

[10] 徐明曜. 有限群初步[M]. 北京: 科学出版社, 2014.

[11] 谢凤艳. 具有弱 $\bar{s}$ -可补的准素子群的有限群[J]. 湖北大学学报: 自然科学版, 2015, 37(4): 364-366, 371.

[12] Guo, W.B. (2008) On **F**-Supplemented Subgroups of Finite Groups. *Manuscripta Mathematica*, **127**, 139-150. https://doi.org/10.1007/s00229-008-0194-7