Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(4), 436-444
Published Online July 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.84058

Hans汉斯

Quenching of the Solution of the Discrete *p*, *ω*-Laplacian Equation with Absorption Singularity Term on Graphs

Yafeng Li, Qiao Xin

College of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang
Email: 1764651709@qq.com

Received: Jun. 28th, 2018; accepted: Jul. 16th, 2018; published: Jul. 23rd, 2018

Abstract

This paper mainly studies the quenching of solution of the discrete *p*, *ω*-Laplacian equation with absorption singularity term and positive Dirichlet boundary conditions. First, the local existence and uniqueness of solutions are obtained by Banach fixed point theorem. And then, on some suitable conditions, we prove that the solution quenches in finite time by comparison principle. Moreover, the upper of quenching time to solution is also obtained.

Keywords

Graph, *p*, *ω*-Laplacian Operator, Quenching, Comparison Principle

带有奇异吸收项的离散的*p*, *ω*-Laplacian方程解的淬灭现象

李亚峰，辛　巧

伊犁师范学院，数学与统计学院，新疆 伊宁
Email: 1764651709@qq.com

收稿日期：2018年6月28日；录用日期：2018年7月16日；发布日期：2018年7月23日

摘　要

本文主要考虑了在狄利克雷边界条件下带有奇异吸收项的离散的*p*, *ω*-Laplacian方程解的淬灭现象，首先，

文章引用：李亚峰，辛巧. 带有奇异吸收项的离散的 *p*，*ω*-Laplacian 方程解的淬灭现象[J]. 理论数学，2018，8(4): 436-444. DOI: 10.12677/pm.2018.84058

利用巴拿赫不动点定理证明其方程局部解的存在与唯一性，其次，通过比较原理证明在一定条件下方程解在有限时间淬灭，另外，还得到其解的淬灭时间上界估计。

关键词

图，p, ω-Laplacian算子，淬灭，比较原理

1. 引言

图上的偏微分方程是偏微分方程的一个新的研究方向，自 2005 年，S.-Y. Chung 和 C. A. Berenstein 在图上引进了积分、方向导数、梯度、离散 Laplacian 算子等理论，为图上偏微分方程提供了理论基础，在实际应用中，图在表示离散的对象之间关系方面是一个非常有效而重要的工具，因此利用偏微方程的讨论技巧去研究图上偏微分方程，极大的推动了偏微分方程这一领域的发展，尤其对带有非线性项离散的热方程解的渐近行为的研究受到国内外许多学者的关注和研究，因此对于带有不同类型的非线性项离散的热方程解的渐近行为的研究，无论在理论与实际中都有很重要的应用，基于此，本文主要讨论了带有奇异吸收项的离散的 p, ω-Laplacian 方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta_{p,\omega} u - u^{-q}, & x \in S \times (0,T), \\ u(x,t) = 1, & x \in \partial S, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in S, \end{cases} \tag{1.1}$$

解的淬灭现象。初值满足 $u_0(x) \ge 0$，另外 $p \ge 2, q > 0$，其中 S 表示有限、连通的简单图 G 的内部顶点，∂S 表示其边界点，V, E 分别表示图 G 的顶点集与边集；定义在图 G 的边集 E 上权重函数 $\omega(x,y)$ 定义等可参考[1]，进一步，$d_\omega(x) = \sum_{x \in V} \omega(x,y)$ 表示其图 G 的顶点 x 的度，$\Delta_{p,\omega}$ 是离散的 p-Laplacian 算子，其定义为

$$\Delta_{p,\omega} u(x) = \sum_{y \in V} |u(y) - u(x)|^{p-2} [u(y) - u(x)] \omega(x,y),$$

并且定义在图 G 上的函数 $u(x)$，其在图 G 上的积分为：

$$\int_G u = \sum_{x \in V} u(x).$$

另外 $C(V)$ 表示定义在 G 顶点集 V 上的函数全体，其上范数定义为 $\|u\|_\infty = \max_{x \in V} |u(x)|$，容易验证 $C(V)$ 在此范数下是一个 Banach 空间。

在文献[2]中，主要研究了离散 p-Laplacian 方程解的爆破与解的全局存在性

$$u_t(x,t) = \Delta_{p,\omega} u(x,t) + \lambda |u(x,t)|^{q-1} u(x,t), \tag{1.2}$$

其中 $p > 2, \lambda > 0$。

在文献[3]中，主要研究了方程 $u_t(x,t) = \Delta_{p,\omega} u(x,t)$ 解的熄灭与正性，在文献[4]，主要研究了离散的

p-Laplacian 方程解的熄灭与正性

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta_{p,\omega} u(x,t) - u^q, & (x,t) \in G \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial G, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in G, \end{cases}$$

这里 G 是一个有限的简单图，其中 $p > 1, q > 0$。

在文献[5]中，主要研究了图上 p-Laplacian 方程解的性质，在文献[6]中，主要研究了

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta_\omega u - \lambda u^{-q}, & (x,t) \in S \times (0,T), \\ u(x,t) = 1, & (x,t) \in \partial S \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in S, \end{cases}$$

其方程解的淬灭与全局存在性。很容易看出当(1.1)里面 $p = 2$ 时，即退化成上式，本文主要把文献[6]结果进行了推广。

2. 局部解的存在与唯一性

首先在证明方程局部解的存在与唯一性之前，先介绍一个重要引理。

引理 2.1 对于任意 $p \in (1,\infty)$ 和 $a,b \in R$，有下列不等式成立

$$\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right) \le C_1 |a-b| \left(|a| + |b|\right)^{p-2}, \tag{2.1}$$

$$\left(|a|^{p-2} a - |b|^{p-2} b\right)(a-b) \ge C_2 |a-b|^2 \left(|a| + |b|\right)^{p-2}, \tag{2.2}$$

这里 C_1 和 C_2 都是正的常数其数值大小仅依赖于 p。

证明 其定理的详细证明见文献[7]。

接下来，通过引理 2.1 和巴拿赫不动点定理来证明方程(1.1)局部解的存在与唯一性。因为 $0 < u_0(x) < 1$，这里存在一个常数 α，使得 $2\alpha \le u_0(x) < 1$。首先，我们来定义一个巴拿赫空间

$$X_0 = \left\{u \in C[0,t_0] \times C(V), \alpha \le u \le 1 \text{且对于任意 } x \in \partial S, u(x,t) = 1\right\},$$

这里 $t_0 \le \min\left\{\frac{\alpha}{|V| \max(d_\omega x)(1-\alpha)^{p-2} + \lambda\alpha^{-q}}, \frac{1-u_0(x)}{|V| \max(d_\omega x)(1-\alpha)^{p-2}}\right\}$ 且在巴拿赫空间 $C(V)$ 上的最大范数为

$$\|u(x,t)\|_{X_0} = \max_{x \in V} \max_{t \in [0,t_0]} |u(x,t)|,$$

接下来，我们定义如下运算：

$$T_{u_0}[u](x,t) = \begin{cases} u_0(x) + \int_0^t \Delta_{p,\omega} u(x,s)\,\mathrm{d}s - \lambda \int_0^t u^{-q}(x,s)\,\mathrm{d}s, & x \in S, 0 \le t \le t_0, \\ 1, & x \in \partial S, 0 \le t \le t_0, \end{cases}$$

对于算子 T_{u_0} 我们给出下面一个重要定理。

引理 2.2 运算 T_{u_0} 是 $X_0 \to X_0$ 的一个映射，对于任意 $0 \le u_0(x), v_0(x) \in C(V)$ 且 $u,v \in X_0, p \ge 2, q > 0$ 那么这里存在一个正的常数 $C = C\left(\lambda, \max_{x \in S}(d_\omega x), \|u\|_{X_0}, \|v\|_{X_0}, |V|\right)$ 使得

$$\left\|T_{u_0}[u] - T_{v_0}[v]\right\|_{X_0} \le \|u_0 - v_0\|_\infty + Ct\|u - v\|_{X_0},$$

另外，如果 t_0 足够小，那么 T_{u_0} 在 X_0 上严格压缩。

证明 第一步 首先证明算子 T_{u_0} 是 $X_0 \to X_0$ 的映射，对于任意 $(x,t_1),(x,t_2) \in C(V)\times[0,t_0]$，可得

$$\begin{aligned}&\left|T_{u_0}[u](x,t_1)-T_{u_0}[u](x,t_2)\right|\\&\le\left|\int_{t_1}^{t_2}\sum_{y\in V}\omega(x,y)\left(\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}\left[u(y,s)-u(x,s)\right]\right)\mathrm{d}s\right|+\lambda\left|\int_{t_1}^{t_2}u^{-q}(x,s)\mathrm{d}s\right|\\&\le(t_2-t_1)\left(2\|u\|_{X_0}^{p-1}\max_{x\in S}(d_\omega x)+\lambda\|u\|_{X_0}^{-q}\right),\end{aligned}$$

因此，对于任意 $x\in V$，运算 T_{u_0} 在区间 $[0,t_0]$ 连续。

另外一方面，对于任意 $u(x,t)\in X_0$，可得

$$\begin{aligned}T_{u_0}[u](x,t)&=u_0(x)+\int_0^t\sum_{y\in V}\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}u(y,s)\omega(x,y)\mathrm{d}s\\&\quad-\int_0^t\sum_{y\in V}\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}u(x,s)\omega(x,y)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t u^{-q}(x,s)\mathrm{d}s\\&\ge u_0(x)-\int_0^t\sum_{y\in V}\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}u(x,s)\omega(x,y)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t u^{-q}(x,s)\mathrm{d}s\\&\ge 2\alpha-\left(|V|\max(d_\omega x)(1-\alpha)^{p-2}+\lambda\alpha^{-q}\right)t_0\ge\alpha,\end{aligned}$$

类似地，可得

$$\begin{aligned}T_{u_0}[u](x,t)&=u_0(x)+\int_0^t\sum_{y\in V}\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}u(y,s)\omega(x,y)\mathrm{d}s\\&\quad-\int_0^t\sum_{y\in V}\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}u(x,s)\omega(x,y)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t u^{-q}(x,s)\mathrm{d}s\\&\le u_0(x)+\int_0^t\sum_{y\in V}\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}u(y,s)\omega(x,y)\mathrm{d}s\\&\le u_0(x)+t_0|V|\max(d_\omega x)(1-\alpha)^{p-2}\le 1.\end{aligned}$$

第二步 对于任意 $(x,t)\in(V,[0,t_0])$，$u_0(x),v_0(x)\in C(V)$ 且 $u(x,t),v(x,t)\in X_0$，运用引理 2.1 的不等式(2.1)，可得

$$\begin{aligned}&\left|T_{u_0}[u](x,t)-T_{v_0}[v](x,t)\right|\\&\le\|u_0-v_0\|_\infty+\left|\int_0^t\sum_{y\in V}\omega(x,y)\left(\left|u(y,s)-u(x,s)\right|^{p-2}\left[u(y,s)-u(x,s)\right]\right.\right.\\&\quad\left.\left.-\left|v(y,s)-v(x,s)\right|^{p-2}\left[v(y,s)-v(x,s)\right]\right)\mathrm{d}s\right|+\lambda\left|\int_0^t\left[u^{-q}-v^{-q}\right]\mathrm{d}s\right|\\&\le\|u_0-v_0\|_\infty+c\int_0^t\sum_{y\in V}\omega(x,y)\left|u(y,s)-u(y,s)-v(y,s)+v(y,s)\right|^{p-2}\\&\quad\times\left(\left|u(y,s)-u(x,s)\right|+\left|v(y,s)-v(x,s)\right|\right)\mathrm{d}s+\lambda\left|\int_0^t\left[u^{-q}-v^{-q}\right]\mathrm{d}s\right|\\&\le\|u_0-v_0\|_\infty+t\left(\lambda q\eta^{-q-1}+2c(4\eta)^{p-2}|V|\right)\|u-v\|_{X_0},\end{aligned}$$

这里 $\eta\le\max\left\{\|u\|_{X_0},\|v\|_{X_0}\right\}$。因此，对于任意 $(x,t)\in V\times[0,t_0]$，得到

$$\left\|T_{u_0}[u](x,t)-T_{v_0}[v](x,t)\right\|_{X_0}\le\|u_0-v_0\|_\infty+Ct\|u-v\|_{X_0},$$

这里 $C=\lambda q\eta^{-q-1}+2c(4\eta)^{p-2}|V|$。此引理证明完毕！

接下来，我们通过引理 2.2 来证明方程(1.1)局部解的存在与唯一性。

定理 2.1 设初值 $0<u_0(x)\le 1$，那么存在时间 $T>0$，使得问题(1.1)有唯一解 $u(x,t)\in C(V)\times C(0,T)$。如果 T 是有限的，我们有

$$\lim_{t\to T}u(x,t)=0.$$

证明 通过引理 2.2 可知，算子 T_{u_0} 在上 X_0 上严格压缩，通过巴拿赫不动点定理可知，在空间 X_0 内，问题(1.1)有唯一解，使得 $T_{u_0}[u]=u$，所以，对于任意 $x\in V$，可得

$$u(x,t)=\begin{cases}u_0(x)+\int_0^t\Delta_{p,\omega}u(x,s)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t u^{-q}(x,s)\mathrm{d}s, & x\in S,0\le t\le t_0,\\ 1, & x\in\partial S,0\le t\le t_0,\end{cases}$$

因此，在 $[0,t_0]$ 上，问题(1.1)有唯一解 $u(x,t)$，另外，如果 $\|u(x,t_0)\|_{X_0}<\infty$，重复上述的过程，那么问题(1.1)的解可以延拓到区间 $[t_0,t_1]$，$t_1>t_0$，继续重复此过程直至 $\lim_{t\to T^-}u(x,t)\to 0$。

3. 比较原理

在讨论方程(1.1)解的淬灭现象之前，先给出比较原理及相关定理。比较原理在处理抛物方程问题是一个基础而有效的工具。

定义 3.1 函数 $\bar{u}(x,t)\in C(V)\times C(0,T)$ 如果满足

$$\begin{cases}\bar{u}_t\ge\Delta_{p,\omega}\bar{u}-\lambda\bar{u}^{-q}, & x\in S,t\in(0,T),\\ \bar{u}(x,t)\ge 1, & x\in\partial S,t\in(0,T),\\ \bar{u}(x,0)\ge u_0(x), & x\in S,\end{cases}$$

则称 $\bar{u}(x,t)$ 是方程(1.1)的上解，类似，如果 $\underline{u}(x,t)$ 满足上述不等式反向不等号，则称其为方程(1.1)的下解。

定理 3.1 假设 $\bar{u}(x,t),\underline{u}(x,t)$ 是方程(1.1)的上解与下解，那么对于任意 $(x,t)\in V\times(0,T)$，都有 $\bar{u}(x,t)\ge\underline{u}(x,t)$

证明 设对于任意 $0<t_0<T$，设 $m=\min\limits_{S\times(0,t_0]}\{\underline{u},\bar{u}\}$ 和 $M=\max\limits_{S\times(0,t_0]}\{\underline{u},\bar{u}\}$，这里 m,M 都是正的常数。接下来，令 $U(x,t)=\underline{u}(x,t)-\bar{u}(x,t)$，显然 $x\in S,U(x,0)<0$，那么通过上解与下解的定义可得

$$U_t\le\left(\Delta_{p,\omega}\underline{u}(x,t)-\Delta_{p,\omega}\bar{u}(x,t)\right)-\lambda\left(\underline{u}^{-q}(x,t)-\bar{u}^{-q}(x,t)\right),\ (x,t)\in S\times(0,T). \tag{3.1}$$

令 $U_+(x,t)=\max\{U(x,t),0\}$，现在不等式(3.1)两边同乘 U_+ 并在 S 积分

$$\frac{1}{2}\int_{x\in S}\left(U_+^2(x,t)\right)_t\le\int_{x\in S}U_+(x,t)\left[\left(\Delta_{p,\omega}\underline{u}(x,t)-\Delta_{p,\omega}\bar{u}(x,t)\right)-\lambda\left(\underline{u}^{-q}(x,t)-\bar{u}^{-q}(x,t)\right)\right], \tag{3.2}$$

事实上，令 $J(t)=\{x\in V\,|\,U(x,t)\ge 0\}$，如果 $J(t)$ 非空集合，命题自然得证。现在，假设 $J(t)\subset S$ 是非空集合，现在我们来定义一个辅助函数

$$\begin{aligned}F_{p,\omega}(\bar{u},\underline{u})(x,y,t)=\omega(x,y)\Big\{&\left|\underline{u}(y,t)-\underline{u}(x,t)\right|^{p-2}\left(\underline{u}(y,t)-\underline{u}(x,t)\right)\\ &-\left|\bar{u}(y,t)-\bar{u}(x,t)\right|^{p-2}\left(\bar{u}(y,t)-\bar{u}(x,t)\right)\Big\},\end{aligned}$$

运用引理 2.1 中的不等式(2.2)，对于任意 $(x,t),(y,t)\in V\times(0,T)$，可得

$$F_{p,\omega}(\bar{u},\underline{u})(x,y,t)\left[U(y,t)-U(x,t)\right]\ge 0, \tag{3.3}$$

另外一方面，还有

$$\begin{aligned}
&\int_S U(x,t)\left(\Delta_{p,\omega}\underline{u}(x,t)-\Delta_{p,\omega}\overline{u}(x,t)\right)\\
&=\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in V}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)\\
&=\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in J(t)}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)\\
&\quad+\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in V\setminus J(t)}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t).
\end{aligned}$$

接下来，我们利用富比尼定理和(3.3)，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in J(t)}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in J(t)}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)+\frac{1}{2}\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in J(t)}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in J(t)}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)-\frac{1}{2}\sum_{y\in J(t)}\sum_{x\in J(t)}U(y,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in J(t)}\left(U(y,t)-U(x,t)\right)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)\le 0,
\end{aligned}\tag{3.4}$$

另外，如果 $x\in J(t), y\in V\setminus J(t)$，那么，可得 $U(x,t)>0, U(y,t)<0$，进一步，可得 $U(y,t)-U(x,t)<0$，因此，通过

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in V\setminus J(t)}U(x,t)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)\\
&=\sum_{x\in J(t)}\sum_{y\in V\setminus J(t)}U(x,t)\frac{1}{U(y,t)-U(x,t)}\left(U(y,t)-U(x,t)\right)F_{p,\omega}(\overline{u},\underline{u})(x,y,t)<0,
\end{aligned}\tag{3.5}$$

进而，我们利用中值定理可得

$$\underline{u}^{-q}(x,t)-\overline{u}^{-q}(x,t)=-q\xi^{-q-1}(x,t)U(x,t),$$

这里 $\xi(x,t)=\theta(x)\underline{u}(x,t)+(1-\theta(x))\overline{u}(x,t)$ 和 $0\le\theta(x)\le 1$，那么 $m\le\xi(x,t)\le M$，因此对于不等式(3.2)的右边第二项，可得

$$\int_{x\in S}U(x,t)\left(\underline{u}^{-q}(x,t)-\overline{u}^{-q}(x,t)\right)\le -m^{-q-1}\lambda\int_{x\in S}\left(U_+(x,t)\right)^2,\tag{3.6}$$

组合上述不等式(3.2)，(3.4)，(3.5)和(3.6)可得

$$\int_{x\in S}\left(\left(U_+(x,t)\right)^2\right)_t<\lambda m^{-q-1}\int_{x\in S}\left(U_+(x,t)\right)^2,$$

设 $L(t)=\int_{x\in S}\left(U_+(x,t)\right)^2$，我们有 $L'(t)<kL(t)$ 这里 $k=\lambda m^{-q-1}$，因为 $U_+(x,0)=0$，而且 $L(0)=0$，因此，我们有 $L(u)\equiv 0$，于是得到 $U_+(x,t)=0$，因此可推出 $\overline{u}(x,t)\ge\underline{u}(x,t)$。

4. 淬灭现象

在本部分主要介绍问题(1.1)解的淬灭现象。

定理 4.1 对于有限图 $G(V,E,\omega)$，设初值 $0<u_0(x)<1$ 且 $p\ge 2, q>0$ 并且满足 $\lambda>\max\left\{\frac{K}{|S|M^{-q}},K\right\}$，那么方程(1.1)的解在有限时间 T^* 淬灭且满足

$$\max_{x\in S}\max_{t\in(0,T)}\left|u(x,t)\right|\le\max_{x\in S}\left|u_0\right|,\ \sum_{x\in S}u(x,t)\le\sum_{x\in S}u_0(x),$$

进一步得到淬灭时间满足 $T\le\dfrac{-\sum_{x\in S}u_0(x)}{K-\lambda|S|M^{-q}}$，其中 $M=\max_{x\in S}\left|u_0(x)\right|$ 和 $K=\max_{x\in V}\sum_{y\in\partial S}\omega(x,y)$。

证明 首先，证明 $\max_{x\in S}\max_{t\in(0,T)}\left|u(x,t)\right|\le\max_{x\in S}\left|u_0\right|$。方程(1.1)两边在 S 上积分，可得

$$\sum_{x\in S}u_t(x,t)=\sum_{x\in S}\Delta_{p,\omega}u(x,t)-\lambda\sum_{x\in S}u^{-q}(x,t),\tag{4.1}$$

为了接下来计算与书写方便，设

$$F(x,y,t)=\omega(x,y)\left|u(y,t)-u(x,t)\right|^{p-2}\left[u(y,t)-u(x,t)\right],$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S}\Delta_{p,\omega}u(x,t)&=\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}F(x,y,t)+\sum_{x\in S}\sum_{y\in\partial S}F(x,y,t)\\&=\frac{1}{2}\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}F(x,y,t)+\frac{1}{2}\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}F(x,y,t)+\sum_{x\in S}\sum_{y\in\partial S}F(x,y,t)\\&=\frac{1}{2}\sum_{x\in S}\sum_{y\in S}F(x,y,t)-\frac{1}{2}\sum_{y\in S}\sum_{x\in S}F(x,y,t)+\sum_{x\in S}\sum_{y\in\partial S}F(x,y,t)\\&=\sum_{x\in S}\sum_{y\in\partial S}\left|u(y,t)-u(x,t)\right|^{p-2}\left[u(y,t)-u(x,t)\right]\omega(x,y)\\&=\sum_{x\in S}K(x)\left|1-u(x,t)\right|^{p-2}\left[1-u(x,t)\right]\end{aligned}$$

这里 $K(x)=\sum_{y\in\partial S}\omega(x,y)$，进一步可得

$$\sum_{x\in S}u_t(x,t)=\sum_{x\in S}K(x)\left|1-u(x,t)\right|^{p-2}\left[1-u(x,t)\right]-\lambda\sum_{x\in S}u^{-q}(x,t).\tag{4.2}$$

因为引理 2.2 可知，$u(x,t)\le1$，那么有

$$\sum_{x\in S}u_t(x,t)=\sum_{x\in S}K(x)\left(1-u(x,t)\right)^{p-1}-\lambda\sum_{x\in S}u^{-q}(x,t),\tag{4.3}$$

进一步，设 $M=\max_{x\in S}\left|u_0\right|$ 和 $(u-M)_+=\max\left\{u(x,t)-M,0\right\}$，方程(4.3)两边同乘 $(u-M)_+$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{x\in S}\frac{\left[\left(u(x,t)-M\right)_+\right]^2}{2}\\&=\sum_{x\in S}K(x)\left(1-u(x,t)\right)^{p-1}\left(u(x,t)-M\right)_+-\lambda\sum_{x\in S}\left[u^{-q}(x,t)\right]\left(u(x,t)-M\right)_+\\&\le\sum_{x\in S}K\left(u(x,t)-M\right)_+-\lambda\sum_{x\in S}u^{-q}(x,t)\left(u(x,t)-M\right)_+\\&=\sum_{x\in S}\left[K-\lambda u^{-q}(x,t)\right]\left(u(x,t)-M\right)_+.\end{aligned}$$

通过引理 2.2 可知，$u(x,t)\le1$，又因为 $\lambda>\max\left\{K,\dfrac{K}{|S|M^{-q}}\right\}$，即可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{x\in S}\frac{\left[\left(u(x,t)-M\right)_+\right]^2}{2}\le0.$$

设 $A(t)=\sum_{x\in S}\frac{\left[\left(u(x,t)-M\right)_+\right]^2}{2}$，可得 $A'(t)\le 0$ 且 $A(0)=0$，可得

$$\sum_{x\in S}\frac{\left[\left(u(x,t)-M\right)_+\right]^2}{2}=0,$$

进而，得到

$$\max_{x\in S}\max_{t\in[0,T)}\left|u(x,t)\right|\le\max_{x\in S}\left|u_0\right|, \tag{4.4}$$

接下来，证明 $\sum_{x\in S}u(x,t)\le\sum_{x\in S}u_0(x)$，再次利用等式(4.3)和引理 2.1 可知，$u(x,t)\le 1$，因此可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{x\in S}u(x,t)\le K-\lambda\sum_{x\in S}u^{-q}(x,t), \tag{4.5}$$

与上述讨论类似可得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{x\in S}u(x,t)\le 0$，因此可证

$$\sum_{x\in S}u(x,t)\le\sum_{x\in S}u_0(x), \tag{4.6}$$

接下来，利用(4.4)和(4.6)，对于(4.5)做进一步估计可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{x\in S}u(x,t)\le K-\lambda|S|M^{-q} \tag{4.7}$$

进一步，令 $\eta(t)=\sum_{x\in S}u(x,t)$，那么对于上式在 $[0,t]$ 进行积分

$$\int_0^t\eta(s)\mathrm{d}s\le\int_0^t\left[K-\lambda|S|M^{-q}\right]\mathrm{d}s$$

进而可得

$$\eta(t)-\eta(0)\le\left[K-|S|M^{-q}\right]t,$$

又因为 $\lambda\ge\max\left\{K,\frac{K}{|S|M^{-q}}\right\}$，可得 $K-|S|M^{-q}<0$，进一步可得

$$T\le\frac{\eta(t)-\eta(0)}{K-|S|M^{-q}}\le\frac{-\eta(0)}{K-\lambda|S|M^{-q}}=\frac{-\sum_{x\in S}u_0(x)}{K-\lambda|S|M^{-q}},$$

此定理证明完毕！

基金项目

伊犁师范学院研究生科研创新项目(2016YSY008)，新疆维吾尔自治区高校科研计划青年教师科研培育项目(XJEDU2014S064)。

参考文献

[1] Chung, S.Y. and Berenstein, C.A. (2005) ω-Harmonic Functions and Inverse Conductivity Problems on Networks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **65**, 1200-1226. https://doi.org/10.1137/S0036139903432743

[2] Chung, S.Y. (2014) Critical Blow-Up and Global Existence for Discrete Nonlinear *p*-Laplacian Parabolic Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2014**, Article ID: 716327. https://doi.org/10.1155/2014/716327

[3] Lee, Y.S. and Chung, S.Y. (2011) Extinction and Positivity of Solutions of the p-Laplacian Evolution Equation on Networks. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **380**, 642-652. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.03.006

[4] Xin, Q, Mu, C. and Liu, D. (2011) Extinction and Positivity of the Solution for a p-Laplacian Equation with Absorption on Graphs. *Journal of Applied Mathematics*, **2011**, Article ID: 937079. https://doi.org/10.1155/2011/937079

[5] 王坤, 辛巧. 图上的 p-Laplacian 方程解的性质及其数值仿真[J]. 长春师范大学学报, 2016, 35(2): 9-13.

[6] Xin, Q. and Liu, D. (2017) Quenching for the Discrete Heat Equation with a Singular Absorption Term on Finite Graphs. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **23**, 1265-1280.

[7] Barrett, J.W. and Liu, W.B. (1994) Finite Element Approximation of the Parabolic p-Laplacian. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **31**, 413-428. https://doi.org/10.1137/0731022