Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 555-559
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85073

Hans汉斯

Existence of Solutions of Two Points Boundary Value Problem for Second Order Differential Equations Which Doesn't Satisfy Nagumo's Condition

Guoan Xu

School of Mathematics Science, Huaqiao University, Quanzhou Fujian
Email: xga99163@163.com

Received: Aug. 26th, 2018; accepted: Sep. 12th, 2018; published: Sep. 19th, 2018

Abstract

In this paper, we study the existence of solutions of two points boundary value problems for second order differential equations without Nagumo condition but satisfying some alternative conditions, and prove the uniqueness of solutions under certain additional conditions.

Keywords

Nagumo's Condition, Differential Inequality, Boundary Value Problem, Existence, Uniqueness

不具备Nagumo条件的二阶微分方程两点边值问题解的存在性

许国安

华侨大学数学科学学院，福建 泉州
Email: xga99163@163.com

收稿日期：2018年8月26日；录用日期：2018年9月12日；发布日期：2018年9月19日

摘 要

本文研究一类不具备Nagumo条件但满足某种替代性条件的二阶微分方程两点边值问题的解的存在性，并在一定附加条件下证明解的唯一性。

文章引用: 许国安. 不具备 Nagumo 条件的二阶微分方程两点边值问题解的存在性[J]. 理论数学, 2018, 8(5): 555-559.
DOI: 10.12677/pm.2018.85073

关键词

Nagumo条件，微分不等式，边值问题，存在性，唯一性

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

Nagumo 于 20 世纪 30 年代开创性地提出了二阶微分方程的边值问题的微分不等式理论，给出了 Nagumo 条件和 Nagumo 定理，奠定了微分不等式理论的基础[1]。其后 Howes 和 Jackson 系统地总结发展并简化了该理论[2]，使这种简单而有效的理论与方法成为处理各类微分方程的边值问题的解的存在性或唯一性的一种简单而有效的手段。许多学者利用微分不等式理论成功地研究了二阶、三阶乃至高阶微分方程以及微分系统的各类边值问题解的存在性和唯一性[3] [4] [5]。但在微分不等式理论中，有一个较强的限制性条件，即 Nagumo 条件。以二阶微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} y''=f(t,y,y') & (1) \\ y(a)=A,\ py(b)+qy'(b)=B,(p\ge 0,q>0) & (2) \end{cases}$$

为例，若下列条件成立：

<1> $f(t,y,y')$ 具有 $C^2[a,b]$ 的下解 $\alpha(t)$ 与上解 $\beta(t)$；

<2> $f(t,y,y')$ 在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]\times R$ 上连续且关于 y' 满足 Nagumo 条件，则边值问题(1) (2)存在解 $y(t)\in C^2[a,b]$ 满足 $\alpha(t)\le y(t)\le \beta(t)$，且有 $|y'(t)|\le N$，$t\in[a,b]$，这里 N 为仅依赖于 $\max\limits_{t\in[a,b]}\beta(t)-\min\limits_{t\in[a,b]}\alpha(t)$ 的正常数[6]。这里的上解与下解函数，Nagumo 条件定义如下：

定义 1：若函数 $\alpha(t),\beta(t)$ 满足：

① $\alpha(t),\beta(t)\in C^2[a,b]$，即 $\alpha(t),\beta(t)$ 在 $[a,b]$ 上二阶连续可微；

② $\alpha(t)\le\beta(t)$，$a\le t\le b$；

③ $\alpha(a)\le A\le\beta(a)$，$p\alpha(b)+q\alpha'(b)\le B\le p\beta(b)+q\beta'(b)$；

④ $\beta''(t)\le f[t,\beta(t),\beta'(t)]$，$\alpha''(t)\ge f[t,\alpha(t),\alpha'(t)]$，$t\in[a,b]$。

则称 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 为边值问题(1)(2)的下解与上解。

定义 2：若函数 $\alpha(t),\beta(t)\in C[a,b]$，$f(t,y,y')$ 满足以下条件：

① 在 $[a,b]$ 上 $\alpha(t)\le\beta(t)$；

② 在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]\times R$ 上，$f(t,y,y')$ 连续且有 $|f(t,y,y')|\le h(|y'|)$。这里 $h(s)$ 是在 $[0,\infty)$ 上连续且单调不减的函数，满足 $\int_\lambda^N \frac{s\mathrm{d}s}{h(s)}\ge\max\limits_{t\in[a,b]}\beta(t)-\min\limits_{t\in[a,b]}\alpha(t)$，$N>\lambda=\max\{|\beta(b)-\alpha(a)|,|\alpha(b)-\beta(a)|\}$，则称 $f(t,y,y')$ 在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]\times R$ 上关于 y' 满足 Nagumo 条件。

满足 Nagumo 条件的二阶微分方程边值(1) (2)有如上的重要结论，但是显然有许多二阶微分方程不满足 Nagumo 条件，如 $f(t,y,y')=h(t)(y')^{2n+1}+g(t,y)$，当 $h(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续且大于零时，就无法满足 Nagumo 条件。因此，我们必然会提出这个问题：对于不满足 Nagumo 条件的边值问题，是否也有如此的结论？我

们提出下面的代替 Nagumo 条件的条件，并在此基础上研究相关的微分不等式理论与解的存在性和唯一性。

2. 引理及证明

考察边值问题

$$\begin{cases} y''=f(t,y,y') & (1)\\ y(a)=A,\ py(b)+qy'(b)=B,(p\ge 0,q>0) & (2)\end{cases}$$

在不具备Nagumo条件下解的存在性与唯一性。

提出如下形式的Nagumo条件的替代条件：

H：$t\in[a,b], y\in[\alpha(t),\beta(t)]$，当 $y'\ge N_0$ 时，$f(t,y,y')>0$，当 $y'\le -N_0$ 时，$f(t,y,y')<0$，这里 N_0 为存在的某正常数。

引理1：若 $f(t,y,y')$ 在 $[a,b]\times R\times R$ 上连续且有界，则边值问题(1)(2)必存在解 $y(t)\in C^2[a,b]$。

证明：通过构造格林函数 $G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{(b-t)(s-a)}{a-b}, a\le s\le t\le b\\ \dfrac{(b-s)(t-a)}{a-b}, a\le t\le s\le b\end{cases}$，边值问题的解可转化为积分方程 $y(t)=\int_a^b G(t,s)f[s,y(s),y'(s)]\mathrm{d}s+\varphi(t)$，其中 $G(t,s)$ 为 $\begin{cases} y''=f(t,y,y')\\ y(a)=0, y(b)=0\end{cases}$ 的Green函数。而 $\varphi(t)$ 为满足 $\varphi''(t)=0,\varphi(a)=A, p\varphi(b)+q\varphi'(b)=B, p\ge 0, q>0$ 的一次多项式。

定义映射T：$C^2[a,b]\to C^2[a,b]$，$T[y(t)]=\int_a^b G(t,s)f[s,y(s),y'(s)]\mathrm{d}s+\varphi(t)$，可验证$T$为 $C^2[a,b]$ 上的某个有界凸闭集到其自身的全连续映射。由Schauder不动点定理[7]可得：存在 $y(t)\in C^2[a,b]$，使得 $T[y(t)]=y(t)$，即边值问题存在解 $y(t)\in C^2[a,b]$。

引理2：对于任何在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]\times R$ 上连续且满足替代条件H的函数 $f(t,y,y')$，以及满足边值问题(1) (2)的任一解 $y(t)$，只要 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t)$，则必有 $|y'(t)|\le N$，这里 $N=1+\max\left\{N_0,\dfrac{pk+|B|}{q}\right\}$，$k=\max\left\{\max\limits_{t\in[a,b]}|\alpha(t)|,\max\limits_{t\in[a,b]}|\beta(t)|\right\}$。

证明：由 $py(b)+qy'(b)=B$ 及 $|y'(b)|\le\dfrac{pk+|B|}{q}\le N-1$，同时若 $y'(a)>N-1$ 或 $y'(a)<-(N-1)$，则 $y'(a)>N_0$ 或 $y'(a)<-N_0$。由条件H及 $y'(t)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加或单调减少，从而 $y'(b)>N-1$ 或 $y'(b)<-(N-1)$，这与 $|y'(b)|\le N-1$ 矛盾。所以 $|y'(a)|\le N-1$。

下证：$|y'(t)|\le N, t\in[a,b]$。

假设若存在 $t\in(a,b)$，使 $|y'(t)|>N$，当 $y'(t)>N$ 时，则 $y'(t)$ 可在 (a,b) 上某点 t_0 处取到正的最大值，当然有 $y''(t_0)=0$。但由条件H知 $y''(t_0)=f(t_0,y(t_0),M)>0$，这导致矛盾。因此 $y'(t)\le N, t\in[a,b]$。

同理可证 $y'(t)\ge -N, t\in[a,b]$。故引理得证。

3. 主要结论及证明

定理1：若边值问题(1) (2)具有下解 $\alpha(t)$ 和上解 $\beta(t)$，$f(t,y,y')$ 在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]\times R$ 上连续且关于 y' 满足替代条件H，则边值问题(1) (2)具有解 $y(t)\in C^2[a,b]$，满足 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t)$，$t\in[a,b]$，且

有 $|y'(t)| \le \bar{N}$，这里 $\bar{N} = \max\left\{N, \max_{t\in[a,b]}|\beta'(t)|, \max_{t\in[a,b]}|\alpha'(t)|\right\}$，$N$即为引理2中的正常数。

证明：在引理1，2的基础上证明定理1。

构造截断函数 $F(t,y,y') = f[t,r(y),s(y')] + \dfrac{y-r(y)}{1+[y-r(y)]^2}$，

$$r(y)=\begin{cases}\alpha(t), y<\alpha(t);\\ y, \alpha(t)\le y\le\beta(t);\\ \beta(t), y>\beta(t).\end{cases}\quad s(y')=\begin{cases}-\bar{N}, y'<-\bar{N}\\ y', |y'|\le\bar{N}\\ \bar{N}, y'>\bar{N}\end{cases}$$

这里 $\bar{N} = \max\left\{N, \max_{t\in[a,b]}|\beta'(t)|, \max_{t\in[a,b]}|\alpha'(t)|\right\}$。显然 $F(t,y,y')$ 在 $[a,b]\times R^2$ 上有界且连续。

由引理知边值问题

$$\begin{cases}y''=F(t,y,y'), a<t<b & (3)\\ y(a)=A, py(b)+qy'(b)=B,(p,q>0) & (4)\end{cases}$$

必有解 $y(t)\in C^2[a,b]$。

下证 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t)$，$t\in[a,b]$。

先证 $y(t)\le\beta(t)$。若不然存在某些点 $t\in[a,b]$，使 $y(t)-\beta(t)>0$。令 $\varphi(t)=y(t)-\beta(t)$，显然 $\varphi(t)$ 在 $[a,b]$ 上有正的最大值M [8]。由于 $\varphi(a)=y(a)-\beta(a)\le 0$，$\varphi(b)\le 0$，这里只能在 (a,b) 内取得正的最大值M，不妨设为 t_0 点。即 $\varphi(t_0)=y(t_0)-\beta(t_0)=M>0$，$\varphi'(t_0)=y'(t_0)-\beta'(t_0)=0$，$\varphi''(t_0)=y''(t_0)-\beta''(t_0)\le 0$。但由上解 $\beta(t)$ 及 $F(t,y,y')$ 的定义必有 $\varphi''(t_0)=y''(t_0)-\beta''(t_0)\ge f(t_0,\beta(t_0),\beta'(t_0))+\dfrac{M}{1+M^2}-f(t_0,\beta(t_0),\beta'(t_0))=\dfrac{M}{1+M^2}>0$，这就导致矛盾。因此必有 $y(t)\le\beta(t)$。

同理可证 $y(t)\ge\alpha(t)$。

对于 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t)$，当然有 $r(y(t))=y(t)$。从引理的证明可知 $|y'(t)|\le N\le\bar{N}$，从而 $y(t)$ 就是边值问题(1) (2)的解，且有 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t)$，$|y'(t)|\le\bar{N}, t\in[a,b]$。

定理2：若定理1的条件成立，且 $f(t,y,y')$ 在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]\times[-N,N]$ 上关于y严格单调增加，则边值问题(1) (2)存在唯一解 $y(t)\in C^2[a,b]$，满足 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t)$，$|y'(t)|\le\bar{N}, t\in[a,b]$。

证明：若有两个不同的解 $y_1(t)$，$y_2(t)$。令 $\varphi(t)=y_1(t)-y_2(t)$，$t\in[a,b]$，于是 $\varphi(t)=y_1(t)-y_2(t)$ 必在 $[a,b]$ 上取得正的最大值M。

若 $\varphi(a)=y_1(a)-y_2(a)=A-A<M$ 则导致矛盾，所以 $\varphi(a)=M$ 是不可能的。

若 $\varphi(b)=M$，则必有 $\varphi'(b)\ge 0$，因而 $p\varphi(b)+q\varphi'(b)>0$，但另一方面 $p\varphi(b)+q\varphi'(b)=p[y_1(b)-y_2(b)]+q[y_1'(b)-y_2'(b)]=py_1(b)+qy_1'(b)-[py_2(b)+qy_2'(b)]=B-B=0<M$，所以 $\varphi(b)=M$ 也是不可能的。

这样 $\varphi(t)$ 只能于点 $t_0\in(a,b)$ 取得正的最大值M，即有

$$\varphi(t_0)=y_1(t_0)-y_2(t_0)=M>0,\quad \varphi'(t_0)=y_1'(t_0)-y_2'(t_0)=0,\quad \varphi''(t_0)=y_1''(t_0)-y_2''(t_0)<0,$$

但另一方面 $\varphi''(t_0)=y_1''(t_0)-y_2''(t_0)=f[t_0,y_1(t_0),y_1'(t_0)]-f[t_0,y_2(t_0),y_2'(t_0)]>0$，这就导致了矛盾。因此唯一性得证。

4. 应用举例

下面将定理1应用于方程 $y''=f(t)(y')^3+g(t,y)$，这里 $f(t)>0,t\in[a,b]$。

显然它不满足Nagumo条件，但可满足替代性的条件，因此不难得到如下结果：

命题1：对于超二次边值问题

$$\begin{cases} y''=f(t)(y')^3+g(t,y) & (5) \\ y(a)=A, py(b)+qy'(b)=B & (6) \end{cases}$$

其中 $p,q>0$。若下列条件成立：

1) 存在上解 $\beta(t)$ 与下解 $\alpha(t)$，

2) $f(t)\in C^2[a,b]$ 且 $f(t)>0,t\in[a,b]$，同时 $g(t,y)$ 在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]$ 连续

则边值问题(5) (6)必存在解 $y(t)\in C^2[a,b]$，满足 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t),t\in[a,b]$。

证：只需证边值问题(5) (6)满足条件H。

由于 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(t,y)$ 在 $[a,b]\times[\alpha(t),\beta(t)]$ 上连续，故 $\exists M_1,M_2$，使 $0<M_1\le f(t)\le M_2,|g(t,y)|\le M_3$。存在充分大的 N_1，使得当 $y'>N_1$ 时，$f(t)(y')^3+g(t,y)\ge M_1N_1^3-M_3>0$；当 $y'<-N_1$ 时，$f(t)(y')^3+g(t,y)\le M_3-M_1N_1^3<0$，故 $f(t)(y')^3+g(t,y)$ 符合条件H，故由定理1得，BVP(5)(6)存在解 $y(t)\in C^2[a,b]$，满足 $\alpha(t)\le y(t)\le\beta(t),t\in[a,b]$。

当然，我们还可给出更多的不满足 Nagumo 条件的方程类型，但它们都满足该文提到的替代条件。因此在具有上下解的条件下，也可得到解的存在性，这充分说明了替代性条件的应用价值。

基金项目

福建省中青年教师教育科研项目(项目编号：JA15030)。

参考文献

[1] Nagumo, M. (1937) Uber die Differential Gleichung $y''=f(t,y,y')$. *Proceedings of Physical and Mathematical Society, Japan*, **19**, 861-866.

[2] Jackson, L.K. (1967) Subfunction and Second-Order Ordinary Differential Inequalities. *Advances in Mathematics*, **10**, 307-363.

[3] Howers, F.A. (1982) Differential of Higher Order and the Asymptotic Solution of Nonlinear Boundary Value Problems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **13**, 61-80. https://doi.org/10.1137/0513005

[4] Jackson, L.K. (1970) Subfunction and Third-Order Ordinary Differential Inequalities. *Journal of Differential Equations*, **8**, 180-194. https://doi.org/10.1016/0022-0396(70)90044-6

[5] Zhou, Z.Y. (1993) Singular Perturbation of a Class of Forth Order Qiasilinear Boundary Value Problem. *Northeastern Mathematical Journal*, **9**, 308-314.

[6] 章国华, F.A 侯斯. 非线性奇异摄动现象: 理论和应用[M]. 福州: 福建科学技术出版社, 1989.

[7] 尤秉礼. 常微分方程补充教程[M]. 第二版. 北京: 人民教育出版社出版, 1982: 367.

[8] M.H. 普劳特, H.F. 温伯格. 微分方程的最大值原理[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org