Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(5), 560-564
Published Online September 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.85074

Hans汉斯

Relative Consistent Directed Sets and Its Application

Dongming Liu, Guanghao Jiang, Hui Li

Department of Mathematics Science, Huaibei Normal University, Huaibei Anhui
Email: guanghaoj@126.com

Received: Sep. 1st, 2018; accepted: Sep. 18th, 2018; published: Sep. 25th, 2018

Abstract

In this paper, firstly we introduce the relative consistent directed set and relative consistent complete set and study some basic properties of them. Then we define a new way below relation on the basic of the relative consistent complete set and study its properties. In addition, we introduce relative consistently continuous posets and obtain that the interpolation of relative consistent way below relation is satisfied in the set T of the relative consistently continuous poset.

Keywords

Relative Consistent Directed Set, Relative Consistent Directed Complete Set, Relative Consistently Continuous Poset

相对相容定向集及其应用

刘东明，姜广浩，李　辉

淮北师范大学数学科学学院，安徽 淮北
Email: guanghaoj@126.com

收稿日期：2018年9月1日；录用日期：2018年9月18日；发布日期：2018年9月25日

摘　要

给出相对相容定向集与相对相容定向完备集的定义，探讨二者的基本性质。在相对相容定向完备集上定义一种新的way below关系，研究其具有的一些性质。此外，引入相对相容连续偏序集概念，并证明对于给定集合T，相对相容way below关系在相对相容连续偏序集中具有插入性。

文章引用：刘东明，姜广浩，李辉．相对相容定向集及其应用[J]．理论数学, 2018, 8(5): 560-564.
DOI: 10.12677/pm.2018.85074

关键词

相对相容定向集，相对相容定向完备集，相对相容连续偏序集

1. 引言

1972 年，著名数学家与计算机语言逻辑学家 D. Scott 引入了连续格的概念[1]。后经过多年研究，具有计算机和数学双重背景的连续格理论被推广到使用更广的连续 Domain 理论[2]上，并在一般拓扑学、逻辑学、代数学与计算机逻辑学等基础理论学科的研究上取得了丰硕的研究成果[3] [4] [5]。拓扑学与连续 Domain 理论是密不可分的，作为一般拓扑学的延伸，数学家 A.V. Arhangel'skii 在文献[6]中首次引入相对拓扑的概念，利用相对的思想研究了一般拓扑学。近年来，而作为连续 Domain 理论的一种量化推广，徐罗山在文献[7]中引入相容连续偏序集与定向完备化的概念，从而出现了相容连续 Domain 理论。受相对拓扑研究思路的启发，作为相容定向集的另一种推广，本文首先利用相对的思想引入相对相容定向集的概念，探讨其基础的性质。然后在相对相容定向完备集基础上给出相对相容小于与相对相容连续偏序集的概念，研究其具有的相关性质给出一些等价刻画。最后证明对于给定的集合 T，相对相容双小于同样具有插入性。

2. 预备

本节给出本文所需的基本概念和记号。

设 P 为偏序集，$\forall X\subseteq P$，$\forall x\in P$，记 $\downarrow X=\{y\in P:\exists x\in X, y\le x\}$，对偶地，记 $\uparrow X=\{y\in P:\exists x\in X, x\le y\}$，$\downarrow x=\downarrow\{x\}$，$\uparrow x=\uparrow\{x\}$。

设 P 为偏序集，$X\subseteq P$，则 X 是下集当且仅当 $X=\downarrow X$。X 为上集当且仅当 $X=\uparrow X$。若 $\forall x,y\in X$，$\exists z\in X$ 使得 $x,y\le z$，则称 X 是 P 的定向子集；对偶地，可以定义余定向集。设 P 为偏序集，P 称为定向完备偏序集，如果对于 P 中的每一个定向集 D，最小上界 $\sup D$ 都存在。

定义 2.1 [7]：设 P 为偏序集，$D\subseteq P$，$D\ne\varnothing$，若 D 满足：

1) D 是定向集，

2) 存在 $p\in P$ 使得 $D\subseteq\downarrow p$，则称 D 为 P 中的相容定向集。

定义 2.2 [7]：设 P 为偏序集，P 称为相容定向完备偏序集，如果对于 P 中的每一个相容定向集 D，$\sup D$ 存在。

定义 2.3 [7]：设 P 为相容定向完备偏序集，定义 P 上的相容 way below 关系如下：$x\ll_r y$，对于任意相容定向集 D，$\sup D$ 存在，若 $y\le\sup D$，则存在 $d\in D$ 使得 $x\le d$。若 $x\ll_r x$，则称 x 为相容紧元。用 $K_r(P)$ 表示 P 中所有的相容紧元，记 $\Downarrow_r x=\{u\in P:u\ll_r x\}$，$\Uparrow_r x=\{v\in P:x\ll_r v\}$。

定义 2.4 [7]：设 P 为相容定向完备偏序集，称 P 相容连续(代数)偏序集，若 P 满足如下条件：

1) $\forall x\in P$，$\Downarrow_r x$ ($\downarrow x\cap K_r(P)$)为相容定向集，

2) $x=\sup(\Downarrow_r x)$ ($x=\sup(\downarrow x\cap K_r(P))$)。

3. 相对相容定向集

作为相容定向集的一种推广，本节引入相对相容定向集和相对相容定向完备集的概念。

定义 3.1：设 P 为偏序集，$D,T\subseteq P$，且 $D,T\neq\varnothing$，若 D 满足：

1) D 是定向集，

2) 存在 $t\in T$ 使得 $D\subseteq\downarrow t$，则称 D 为 P 的相对于 T 的相容定向集。当 T 明了时，可简称为相对相容定向集。记 $R_T(P)=\{D\subseteq P：D$ 为 P 的相对 T 的相容定向集$\}$。

命题 3.2：相对相容定向集必为相容定向集。

证明：$\forall D,T\subseteq P$，$T\neq\varnothing$，若 $D\in R_T(P)$，则 $t\in T\subseteq P$ 使得 $D\subseteq\downarrow t$，又 D 本身定向，由相容定向集定义知，D 为相容定向集。

注 3.3：相容定向集未必是相对相容定向集。

例 3.4：如图 1 所示。

设 $P_1=\{a,b,c,d,e,f\}$，$T=\{d,e,f\}$，令 $D=\{c,e,f\}$，易知 D 为 P_1 中相容定向集，但在给定的集合 T 中，找不到一个 t 使得 $D\subseteq\downarrow t$ 成立，故 D 不为 P_1 中相对 T 相容定向集。

命题 3.5：设 P 为偏序集，$D,T\subseteq P$，且 $D,T\neq\varnothing$。若 $T=P$，则 D 为相对相容定向集当且仅当 D 为相容定向集。

下面利用相对相容定向集，引入相对相容定向完备集的概念。

定义 3.6：设 P 为偏序集，$T\subseteq P$，$T\neq\varnothing$，P 称为相对相容定向完备集，若对于 P 中任意相对 T 的相容定向集 D，最小上界 $\sup D$ 存在。

注 3.7：相容定向完备集必为相对相容定向完备集，但相对相容定向完备集未必是相容定向完备集。

例 3.8：如图 2 所示。

设 $P_2=N\cup M$，$M=[0,1)$，规定 P_2 中的偏序关系：若 $\forall x,y\in N$，则 $x\leq y$ 当且仅当 $x=y$；若 $\forall x,y\in M$，则按 M 普通的偏序关系；若 $x\in M$，$y\in N$，则 $x\leq y$。

取 $T=\left[0,\frac{1}{2}\right]$，则 P_2 为相对 T 的相容定向完备集，但此时的 P_2 不为相容定向完备集。

命题 3.9：设 P 为偏序集，$T\subseteq P$，且 $T\neq\varnothing$，若 $T=P$，则 P 为相对相容定向完备集当且仅当 P 为相容定向完备集。

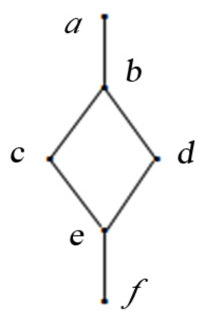

Figure 1. Hasse diagram of poset P_1
图 1. 偏序集 P_1 的 Hasse 图

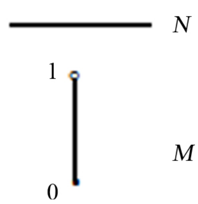

Figure 2. Hasse diagram of poset P_2
图 2. 偏序集 P_2 的 Hasse 图

4. 相对相容连续偏序集

有了相对相容定向集和相对相容定向完备集概念后，下面自然的可以在相容定向完备偏序集上引入相对相容 way below 关系的概念。

定义 4.1：设 P 为相对相容定向完备偏序集，其中 $T \subseteq P$，且 $T \neq \varnothing$，定义 P 上相对 T 的 way below $\ll_{rr}$ 关系如下：$\forall x, y \in T$，若任意 $D \in R_T(P)$，$y \le \sup D$ 时，存在 $d \in D$，使得 $x \le d$，则称 x 相对于 T 相容小于 y，记为 $x \ll_{rr} y$。如果 $x \ll_{rr} x$，则称 x 为 P 上相对于 T 的相容紧元。用 $K_T(P)$ 表示所有 P 中相对于 T 相容紧元，同时，可以记 $\Uparrow_{rr} x = \{y \in P : x \ll_{rr} y\}$，$\Downarrow_{rr} x = \{y \in P : y \ll_{rr} x\}$。

命题 4.2：设 P 为相对相容定向完备偏序集，其中 $T \subseteq P$，且 $T \neq \varnothing$，若对于任意 $x, y, u, z \in T$，则下列结论成立：

1) $x \ll_{rr} y \Rightarrow x \le y$；
2) $u \le x \ll_{rr} y \le z \Rightarrow u \ll_{rr} z$；
3) $x \ll_{rr} z$，$y \ll_{rr} z$，若 $x \vee y$ 存在，则 $x \vee y \ll_{rr} z$；
4) 若 0 存在且 $0 \in T$，则 $\forall x \in T$，有 $0 \ll_{rr} x$；
5) $\Downarrow_{rr} x \in R_T(P)$。

证明：1) $\forall D \in R_T(P)$，因 P 为相对相容定向完备集，故 $\sup D$ 存在，又 $x \ll_{rr} y$，若 $y \le \sup D$，则存在 $d \in D$ 使得 $x \le d$，取 $\{y\} = D$，易证 $\{y\} \in R_T(P)$，进而有 $x \le y$。

2) $\forall D \in R_T(P)$，因 P 为相对相容定向完备集，故 $\sup D$ 存在。若 $z \le \sup D$，有 $y \le \sup D$，又 $x \ll_{rr} y$，存在 $d \in D$ 使得 $x \le d$，进而 $u \le d$，所以 $u \ll_{rr} z$。

3) $\forall D \in R_T(P)$，则 $\sup D$ 存在且 $\sup D \in D$，若 $z \le \sup D$，因为 $x \ll_{rr} z$，$y \ll_{rr} z$，故存在 $d_1, d_2 \in D$ 使得 $x \le d_1 \le \sup D$ 且 $y \le d_2 \le \sup D$，进而 $x \vee y \le \sup D$，所以 $x \vee y \ll_{rr} z$。

4) $\forall D \in R_T(P)$，若 $x \le \sup D$，则存在 $d \in D$，使得 $x \le d$。又 0 为 P 上的最小元，即 $0 \le d$，所以 $0 \ll_{rr} x$。

5) 任意取 $a, b \in \Downarrow_{rr} x$，则有 $a \ll_{rr} x$ 且 $b \ll_{rr} x$。进而 $a \le x, b \le x$，而 $\{x\} \in T$，所以 $\Downarrow_{rr} x \in U(T)$。

下面利用相对相容 way below 关系，引入相对相容连续偏序集的概念。

定义 4.3：设 P 为相对相容定向完备偏序集，其中 $T \subseteq P$，且 $T \neq \varnothing$，则称 P 为相对 T 的相容连续偏序集，若 P 满足下列两个条件：

1) $\forall x \in T$，$x = \sup \Downarrow_{rr} x$，
2) $\Downarrow_{rr} x$ 为相对 T 的相容定向集。

定理 4.4：设 P 为相容连续偏序集，$\forall T \subseteq P$，$T \neq \varnothing$，则 $\forall x \in T$ 有 $\Downarrow_r x \subseteq \Downarrow_{rr} x$。

证明：$\forall y \in \Downarrow_r x$，则 $y \ll_r x$，因 P 为相容连续偏序集，故 P 为相容定向完备集。从而 P 为相对相容定向完备集，$\forall D \in R_T(P)$，则 D 为相容定向集，故 $\sup D$ 存在且 $\sup D \in D$。若 $x \le \sup D$，则存在 $d \in D$ 使得 $x \le d$，从而有 $y \ll_{rr} x$，进而 $y \ll_{rr} x$，即 $y \in \Downarrow_{rr} x$，结论成立。

定理 4.5：设 P 为相容连续偏序集，$\forall T \subseteq P$，且 $T \neq \varnothing$，则 P 为相对相容连续偏序集。

证明：首先，易证 P 为相对相容定向完备集。再者，$\forall x \in T$，由命题 4.2 知 $\Downarrow_{rr} x$ 为相对相容定向集。下证 $x = \sup \Downarrow_{rr} x$ 成立。$\forall y \in \Downarrow_{rr} x$，有 $y \ll_{rr} x$，从而 $y \le x$，可见 y 为集合 $\Downarrow_r x$ 的一个上界，故 $\sup \Downarrow_{rr} x \le x$。再由定理 4.4 知 $\Downarrow_r x \subseteq \Downarrow_{rr} x$，所以 $x = \sup \Downarrow_r x \le \sup \Downarrow_{rr} x$，即 $x = \sup \Downarrow_{rr} x$。综合上述，$P$ 为相对相容连续偏序集。

注 4.6：相对相容连续偏序集未必为相容连续偏序集。

例 4.7：如图 2 所示，若令 $T = \left[0, \frac{1}{2}\right]$，则 P 相对 T 的连续偏序集。然而，对于相容定向集 M，$\sup M \notin M$，

P 不为相容定向完备集，从而 P 不为相容连续偏序集。

定理 4.8：设 P 为相容完备偏序集，其中 $T \subseteq P$，且 $T \neq \varnothing$，若 $T = P$ 则 P 为相对相容连续偏序集当且仅当 P 相容连续偏序集。

下面定理说明相对相容连续偏序集是具有相应的插值性质的。

定理 4.9：设 P 为相对相容连续偏序集，$T \subseteq P$，$T \neq \varnothing$，$\forall a,b \in T$，若 $a <<_{rr} b$，则存在 $c \in T$，使得 $a <<_{rr} c <<_{rr} b$。

证明：记 $S = \{d \in T : \exists c \in T, d <<_{rr} c <<_{rr} b\}$，因 $a <<_{rr} b$ 且 P 为相对相容连续偏序集，易知必存在 $d \in T$，使得 $d <<_{rr} a <<_{rr} b$，故 $d \in S$，可见 $S \neq \varnothing$。下证集合 S 是相对相容定向集，$\forall d_1, d_2 \in S$，则存在 $c_1, c_2 \in T$，使得 $d_1 <<_{rr} c_1 <<_{rr} b$ 且 $d_2 <<_{rr} c_2 <<_{rr} b$。从而 $c_1, c_2 \in \Downarrow_{rr} b$，因 P 为相容完备偏序集，故 $\Downarrow_{rr} b$ 为相对相容定向集。从而 $\Downarrow_{rr} b$ 为定向集，进而存在 $c_3 \in \Downarrow_{rr} b$，使得 $c_1 \leq c_3$ 且 $c_2 \leq c_3$，由命题 4.2 得 $d_1 <<_{rr} c_1 <<_{rr} c_3$ 且 $d_2 <<_{rr} c_2 <<_{rr} c_3$。从而 $d_1, d_2 \in \Downarrow_{rr} c_3$，又因为 $\Downarrow_{rr} c_3$ 为定向集，故存在 $d_3 \in \Downarrow_{rr} c_3$ 使得 $d_1 \leq d_3$，$d_2 \leq d_3$，又 $d_3 \in S$。事实上，因 $d_3 \in \Downarrow_{rr} c_3$ 且 $c_3 \in \Downarrow_{rr} b$，即 $d_3 <<_{rr} c_3 <<_{rr} b$，从而 S 为定向集。又 $S \subseteq \Downarrow_{rr} b \subseteq \downarrow b$ 且 $b \in T$，所以 S 为相对相容定向集。因为 $\sup S = b$，事实上，因为 P 为相对相容连续偏序集，故 $b = \sup \Downarrow_{rr} b$，从而 $\sup \Downarrow_{rr} b = \sup\{\sup \Downarrow_{rr}(c) : c <<_{rr} b\} = \sup S$。又 $a \leq b$，所以存在 $d \in S$ 使得 $a \leq d$，进而存在 $c \in T$ 使得 $d <<_{rr} c <<_{rr} b$，所以 $a <<_{rr} c <<_{rr} b$，结论成立。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11361028)，安徽高等学校省级自然科学研究重点项目(KJ2017A378)，淮北师范大学研究生创新基金项目(2017yjscx07)，淮北师范大学研究生教育教学研究项目(2017jyxm03)。

参考文献

[1] Scott, D. (1972) Continuous Lattices. Lecture Notes in Mathematics 274. Springer-Verlag, Berlin, 97-136.

[2] Gierz, G., Hofmann, H., Keimel, K., *et al.* (2003) Continuous Lattices and Domains. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511542725

[3] Lawson, J.D. (2001) Encounters between Topology and Domain Theory. In: Keimel, K., *el al.*, Eds., *Domains and Processes*, Kluwer Academic Publicatishers, 1-28.

[4] Abramsky, S. and Jung, A. (1994) Domain Theory. Handbook of Logic in Computer Science (Vol. 3). Clarendon Press, Oxford.

[5] Xu, L.S. (2006) Continuity of Poset via Scott Topology and Sobrification. *Topology and Its Applications*, **153**, 1886-1894. https://doi.org/10.1016/j.topol.2004.02.024

[6] Arhangel'skii, A.V. (1996) Relative Topological Properties and Relative Topological Space. *Topology and Its Applications*, **70**, 87-99. https://doi.org/10.1016/0166-8641(95)00086-0

[7] 徐罗山. 相容连续偏序集及其定向完备化[J]. 扬州大学学报(自然科学版), 2000, 3(1): 1-10.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org