

Study on Steady-State Performance Measures of the $G_t/G_t/1$ Queue Model

Junxia Wang, Jianmin Liu, Qianqian Wei

Department of Mathematics, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Email: 859068442@qq.com

Received: Nov. 6th, 2018; accepted: Nov. 23rd, 2018; published: Nov. 30th, 2018

Abstract

For the $G_t/G_t/1$ single-server queue model with time-varying arrival rate, we suppose that the waiting space is infinite. By combining the knowledge of the Stochastic-Process Limit and the Convergence of Probability Measures, then the convergence limits of the steady-state performance measures in the queue model are obtained on the basis of a given arrival rate function.

Keywords

Steady-State, Single-Server Queue, Brownian Motion, Convergence Limit

$G_t/G_t/1$ 队列模型稳态性能指标的研究

王军霞, 刘建民, 尉茜茜

长安大学理学院, 陕西 西安

Email: 859068442@qq.com

收稿日期: 2018年11月6日; 录用日期: 2018年11月23日; 发布日期: 2018年11月30日

摘 要

针对到达率随时间变化的单服务台 $G_t/G_t/1$ 队列模型, 假定等待空间无限, 在给定到达率函数的基础上, 应用随机过程极限和概率测度收敛的相关知识, 得到该队列模型各稳态性能指标的收敛极限。

关键词

稳态, 单服务台队列, 布朗运动, 收敛极限

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

排队论主要研究各种排队系统在排队等待中的概率特性, 应用领域非常广泛, 国内外学者针对不同的排队模型做了大量的研究。Ward 通过奥伦斯坦 - 乌伦贝格过程, 得到了稳态下单服务台队列的扩散逼近[1]以及负荷过程和队长过程的收敛极限[2]。文献[3] [4]研究了高负荷下单服务台队列的队长和溢出过程的极限。在高负荷条件下, Liu 等研究了到达率随时间变化的网络队列模型[5], Whitt 研究了到达临界点的单服务台队列[6]。另外, Ma [7]和 Dong [8]分别对单服务台和多服务台的周期到达队列模型做了一定的研究, 并对模型进行数值模拟, 更加直观地验证了所得结论。Baccelli 等[9]和 Stanford [10]在平稳状态下研究了一个服务台的队列性能, 得到了有关数量分布的积分方程。本文在前人研究的基础上, 运用中心极限定理以及连续映射定理等[11] [12]相关知识, 研究到达率随时间变化的 $G_t/G_t/1$ 队列模型, 得到队列模型的各种性能指标(到达过程、队长过程和虚等待时间)的收敛极限。

2. $G_t/G_t/1$ 队列模型

考虑一般的单服务台 $G_t/G_t/1$ 队列模型, 假定等待空间无限, 到达率随时间变化, 到达率为 $\lambda(t)$, 服务率为 $\mu(t)$, 负荷强度为 $\rho(t) \equiv \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} (t \geq 0)$ 。 A 表示到达计数过程, Λ 表示累积到达函数, 当 $t \geq 0$ 时,

$$\Lambda(t) \equiv \int_0^t \lambda(s) ds,$$

到达率满足:

$$\bar{\lambda} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(t)}{t},$$

在不考虑顾放弃的情况下, 假设 $\bar{\lambda} = 1$ 。

到达过程满足:

$$A(t) \equiv N_a(\Lambda(t)) = N_a\left(\int_0^t \lambda(s) ds\right),$$

其中 N_a 是随机计数过程, 满足泛函强大数定理(FSLLN)和泛函中心极限定理(FCLT), 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 D 空间中,

$$\bar{N}_{a,n} \rightarrow e, \hat{N}_{a,n} \Rightarrow c_a B_a,$$

这里 $\bar{N}_{a,n} \equiv \frac{N_a(nt)}{n}$, $\hat{N}_{a,n} \equiv \frac{N_a(nt) - nt}{\sqrt{n}}$, e 是恒等函数, $e(t) = t (t \geq 0)$, B_a 是标准的布朗运动。

另外, 假设服务是由随机计数过程 N_s (独立于 N_a) 产生的, N_s 同样满足泛函强大数定理(FSLLN)和泛函中心极限定理(FCLT), 即当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 D 空间中,

$$\bar{N}_{s,n} \rightarrow e, \hat{N}_{s,n} \Rightarrow c_s B_s,$$

这里 $\bar{N}_{s,n} \equiv \frac{N_s(nt)}{n}$, $\hat{N}_{s,n} \equiv \frac{N_s(nt) - nt}{\sqrt{n}}$, B_s 是标准的布朗运动, 且独立于 B_a 。

3. 主要结论及讨论

考虑一系列模型中的第 n 个模型，下面建立与到达过程有关的高负荷极限，对于单服务台的高负荷极限，通常使负荷强度逐渐趋于 1，这里当 $n \rightarrow \infty$ 时，令 $\rho_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ 。当 $t \geq 0$ 、 $n \geq 1$ 时，对到达函数 $\lambda_n(t)$ 和累积到达函数 $\Lambda_n(t)$ 进行流体刻画，分别为：

$$\bar{\lambda}_n(t) \equiv \lambda_n(nt), \quad \bar{\Lambda}_n(t) \equiv \frac{\Lambda_n(nt)}{n}.$$

则有 $\bar{\Lambda}_n(t) = \int_0^t \bar{\lambda}_n(s) ds$ 。

另外，为了后续研究的方便，对累积到达函数 $\Lambda_n(t)$ 在时间 nt 通过增量 \sqrt{n} 进行刻画，即 $\forall u, -\infty < u < +\infty$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时，有：

$$\tilde{\Lambda}_{n,t}(u) \equiv \frac{\Lambda_n(nt + u\sqrt{n}) - \Lambda_n(nt)}{\sqrt{n}}, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1.$$

假设在 D 空间中，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\bar{\lambda}_n \rightarrow \lambda_f$ ， $\bar{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_f$ 。

累积到达函数 $\Lambda_n(t)$ 的扩散刻画如下

$$\hat{\Lambda}_n(t) \equiv \frac{\Lambda_n(nt) - n\Lambda_f(t)}{\sqrt{n}},$$

假设 $\hat{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_d$ ， Λ_d 为连续函数。

到达过程满足：

$$A_n(t) \equiv N_a(\Lambda_n(t)) = N_a\left(\int_0^t \lambda_n(s) ds\right),$$

根据以上到达函数的刻画，接下来对到达过程进行刻画，如下：

$$\bar{A}_n(t) \equiv \frac{N_a(\Lambda_n(nt))}{n}, \quad \hat{A}_n(t) \equiv \frac{A_n(nt) - n\Lambda_f(t)}{\sqrt{n}},$$

$$\tilde{A}_{n,t}(u) \equiv \frac{A_n(nt + u\sqrt{n}) - A_n(nt)}{\sqrt{n}}, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1.$$

定理 1 (到达过程的极限)：在以上刻画的前提下，在 D 空间中，当 $n \rightarrow \infty$ 时，

有如下的泛函强大数定理： $\bar{A}_n = \bar{N}_{a,n} \circ \bar{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_f$ 。

以及泛函中心极限定理： $\hat{A}_n = \hat{N}_{a,n} \circ \bar{\Lambda}_n + \hat{\Lambda}_n \Rightarrow c_a B_a \circ \Lambda_f + \Lambda_d$ ，

$$\tilde{A}_{n,t}(u) \rightarrow \lambda_f(t)u.$$

证明：根据文献[11]中 13.2 以及连续映射定理，

且由 $\bar{N}_{a,n} \rightarrow e$ ， $\bar{N}_{a,n} \equiv \frac{N_a(nt)}{n}$ ，得

$$\bar{A}_n(t) \equiv \frac{N_a(\Lambda_n(nt))}{n} = \frac{n\bar{N}_{a,n}\left(\frac{\Lambda_n(nt)}{n}\right)}{n} = \bar{N}_{a,n}\left(\frac{\Lambda_n(nt)}{n}\right) = \bar{N}_{a,n} \circ \bar{\Lambda}_n \rightarrow \Lambda_f,$$

又由 $\hat{N}_{a,n} \Rightarrow c_a B_a$ ， $\hat{N}_{a,n} \equiv \frac{N_a(nt) - nt}{\sqrt{n}}$ ，得：

$$\begin{aligned} \hat{A}_n(t) &\equiv \frac{A_n(nt) - n\Lambda_f(t)}{\sqrt{n}} = \frac{A_n(nt)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\Lambda_f(t) = \frac{N_a(\Lambda_n(nt))}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\Lambda_f(t) \\ &= \frac{\sqrt{n}\hat{N}_{a,n}\left(\frac{\Lambda_n(nt)}{n}\right) + \Lambda_n(nt)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\Lambda_f(t) = \hat{N}_{a,n}\left(\frac{\Lambda_n(nt)}{n}\right) + \frac{\Lambda_n(nt)}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\Lambda_f(t) \\ &= \hat{N}_{a,n}(\bar{\Lambda}_n(t)) + \frac{\Lambda_n(nt) - n\Lambda_f(t)}{\sqrt{n}} = \hat{N}_{a,n} \circ \bar{\Lambda}_n(t) + \hat{\Lambda}_n(t) \\ &\Rightarrow c_a B_a \circ \Lambda_f + \Lambda_d \end{aligned}$$

由 $\hat{N}_{a,n} \Rightarrow c_a B_a$ ，以及胎紧性，有： $\frac{N_a(nt + u\sqrt{n}) - N_a(nt)}{\sqrt{n}} \Rightarrow u$ ，进而得：

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n,t}(u) &\equiv \frac{A_n(nt + u\sqrt{n}) - A_n(nt)}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{N_a(\Lambda_n(nt + u\sqrt{n})) - N_a(\Lambda_n(nt))}{\sqrt{n}} \\ &= \frac{N_a(\Lambda_n(nt) + \lambda_f(t)u\sqrt{n} + o(\sqrt{n})) - N_a(\Lambda_n(nt))}{\sqrt{n}} \\ &\Rightarrow \lambda_f(t)u \end{aligned}$$

接下来刻画队长和虚等待时间：

当 $t \geq 0$ 时， $\hat{Q}_n(t) \equiv \frac{Q_n(nt)}{\sqrt{n}}$ ， $\hat{W}_n(t) \equiv \frac{W_n(nt)}{\sqrt{n}}$ 。

$R(t; a, b)$ 是漂移系数为 a ，扩散系数为 b 的反射布朗运动。

定理 2 (虚等待时间的高负荷极限)：假定系统开始为空，在以上刻画的基础上，且满足以上到达函

数，则在 D^2 空间中，当 $n \rightarrow \infty$ 时，有 $(\hat{Q}_n, \hat{W}_n) \Rightarrow (\hat{Q}, \hat{W})$ ，这里当 $t \geq 0$ 时， $\hat{W}(t) \equiv \frac{\hat{Q}(t)}{\lambda_f(t)}$ ，

$\hat{Q}(t) \equiv R(\Lambda_f(t); -1, c_a^2 + c_s^2)$ ，对于每一个 $T > 0$ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时， $\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \hat{W}_n(t) - (\hat{Q}_n(t)/\lambda_f(t)) \right| \Rightarrow 0$ 。

证明：首先刻画到达和服务过程，当 $t \geq 0$ 、 $n \geq 1$ 时，

$$\begin{aligned} \hat{A}_n(t) &\equiv \frac{N_a(nt) - nt}{\sqrt{n}}, \\ \hat{S}_n(t) &\equiv \frac{N_s(nt/\rho_n) - nt}{\sqrt{n}} = \frac{N_s(nt/\rho_n) - nt/\rho_n}{\sqrt{n}} + \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-1}t, \end{aligned}$$

所以当 $n \rightarrow \infty$ 时，在 D^2 空间中，

$$(\hat{A}_n, \hat{S}_n) \Rightarrow (B_a, B_s + e),$$

其中 B_a 和 B_s 是相互独立的布朗运动，

因此在 D 空间中， $\hat{A}_n - \hat{S}_n \Rightarrow B_a - B_s - e$ ，

其次应用[11]中的定理 9.3.4 以及连续映射定理，当 $n \rightarrow \infty$ 时，得：

$$\hat{Q}_n \Rightarrow R(\cdot) \equiv R(\cdot; -1, c_a^2 + c_s^2), \text{ 且 } \hat{Q}_n \Rightarrow R(\Lambda_f(\cdot)).$$

$D_n(t)$ 代表第 n 个系统中的离去过程,

$$\begin{aligned} \hat{W}_n(t) &\equiv \frac{W_n(nt)}{\sqrt{n}} = \inf \left\{ u \geq 0 : D_n(nt + u\sqrt{n}) - D_n(nt) \geq Q_n(nt) \right\} \\ &= \inf \left\{ u \geq 0 : \left(D_n(nt + u\sqrt{n}) - D_n(nt) \right) / \sqrt{n} \geq Q_n(nt) / \sqrt{n} \right\}, \\ &= \inf \left\{ u \geq 0 : \hat{D}_{n,t}(u) \geq \hat{Q}_n(t) \right\} \end{aligned}$$

其中 $\hat{D}_{n,t}(u) \equiv \frac{D_n(nt + u\sqrt{n}) - D_n(nt)}{\sqrt{n}}$ 。

在 D 空间中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{Q}_n \Rightarrow R(\Lambda_f(\cdot))$ 。

$B_n(t)$ 是 $[0, t]$ 时间内忙的服务台。

$$D_n(nt) = N_s \left(\rho_n^{-1} B_n(\Lambda_n(nt)) \right), \quad t \geq 0$$

根据 $\tilde{\Lambda}_{n,t}(u) \rightarrow \lambda_f(t)u$ 以及[11]中的定理 9.3.4, 可得:

$$\frac{B_n(\Lambda_n(nt + u\sqrt{n})) - B_n(\Lambda_n(nt))}{\sqrt{n}} \rightarrow u\lambda_f(t),$$

由 $\bar{N}_{s,n} \rightarrow e$, $\hat{N}_{s,n} \Rightarrow c_s B_s$ 得 $\hat{D}_{n,t}(u) \rightarrow u\lambda_f(t)$ 。

由 $\hat{Q}_n \Rightarrow \hat{Q}$, 及 $\hat{W}(t) \equiv \frac{\hat{Q}(t)}{\lambda_f(t)}$, $\hat{Q}(t) \equiv R(\Lambda_f(t); -1, c_a^2 + c_s^2)$, 得:

对于每一个 $T > 0$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sup_{0 \leq t \leq T} \left\{ \left| \hat{W}_n(t) - \left(\hat{Q}_n(t) / \lambda_f(t) \right) \right| \right\} \Rightarrow 0$ 。

由联合极限以及[11]中的定理 11.4.7, 得:

在 D^2 空间中, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $(\hat{Q}_n, \hat{W}_n) \Rightarrow (\hat{Q}, \hat{W})$ 。

4. 总结

在给定 $G/G/1$ 队列模型的到达率函数的基础上, 利用泛函中心极限定理、连续映射定理等得到该模型的到达过程、队长过程和虚等待时间的收敛极限, 最后运用概率测度收敛和随机过程极限的知识对此做了证明。

参考文献

- [1] Ward, A.R. and Glynn, P.W. (2003) A Diffusion Approximation for a Markovian Queue with Reneging. *Queueing Systems*, **43**, 103-128.
- [2] Ward, A.R. and Glynn, P.W. (2005) A Diffusion Approximation for a Heavy-Traffic Limits for a $GI/GI/1$ Queue with Balking or Reneging. *Queueing Systems*, **50**, 371-400.
- [3] Jelenkovic, P.R. (1999) Subexponential Loss Rates in $GI/GI/1$ Queue with Applications. *Queueing Systems*, **33**, 91-123.
- [4] Whitt, W. (2004) Heavy-Traffic Limits for Loss Proportions in Single-Server Queues. *Queueing Systems*, **46**, 507-536.
- [5] Liu, Y.N. and Whitt, W. (2014) Stabilizing Performance in Networks of Queues with Time-Varying Arrival Rates. *Probability in the Engineering and Information Sciences*, **28**, 419-449. <https://doi.org/10.1017/S0269964814000084>
- [6] Whitt, W. (2016) Heavy-Traffic Limits for a Single-Server Queue Leading up to a Critical Point. *Operations Research Letters*, **44**, 796-800. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2016.10.005>
- [7] Ma, N. and Whitt, W. (2018) A Rare-Event Simulation Algorithm for Periodic Single-Server Queues. *Inform Journal on Computing*, **30**, 71-89. <https://doi.org/10.1287/ijoc.2017.0766>
- [8] Dong, J. and Whitt, W. (2015) Using Birth-and-Death Processes to Estimate the Steady-State Distribution of A Peri-

-
- odic Queue. *Naval Research Logistics*, **62**, 664-685. <https://doi.org/10.1002/nav.21672>
- [9] Baccelli, F., Boyer, P. and Hebuterne, G. (1984) Single-Server Queues with Impatient Customers. *Journal of Applied Probability and Advances in Applied Probability*, **16**, 887-905.
- [10] Stanford, R.E. (1979) Renging Phenomena in Single Channel Queue. *Mathematics of Operations Research*, **4**, 162-178. <https://doi.org/10.1287/moor.4.2.162>
- [11] Whitt, W. (2002) *Stochastic-Process Limits*. Springer, New York.
- [12] Billingsley, P. (1999) *Convergence of Probability Measures*. 2nd Edition. Wiley, New York. <https://doi.org/10.1002/9780470316962>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7583, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: pm@hanspub.org