Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 89-97
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91012

Empirical Likelihood Statistic Inference for Distribution Function for PA Dependent Samples

Juan Huang
School of Mathematics and Computer, Guangdong Ocean University, Zhanjiang Guangdong
Email: huangjuan401178@163.com

Received: Jan. 2nd, 2019; accepted: Jan. 21st, 2019; published: Jan. 28th, 2019

Abstract

This paper studies distribution function by group empirical likelihood method under strongly stationary PA random sample. And we develop empirical likelihood ratio method to construct approximate confidence regions for distribution function.

Keywords

Positive Associate, Group Empirical Likelihood, Confidence Intervals

正相协相依样本下分布函数的经验似然统计推断

黄　娟
广东海洋大学，数学与计算机学院，广东　湛江
Email: huangjuan401178@163.com

收稿日期：2019年1月2日；录用日期：2019年1月21日；发布日期：2019年1月28日

摘　要

本文将在正相协相依样本下，利用分组经验似然比方法，构造分布函数的置信区间。

关键词

正相协，分组经验似然，置信区间

文章引用：黄娟. 正相协相依样本下分布函数的经验似然统计推断[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 89-97.
DOI: 10.12677/pm.2019.91012

1. 引言

Joag-Dey 和 Proschan (1983, [1])提出了 PA (positive associate)随机变量在可靠性理论和多元统计分析中有广泛的应用。经验似然是由 Owen (1988)提出的一种非参数推断方法[2] [3]，其有类似 Bootstrap 的抽样特性。这一方法与传统的统计方法比较有很多优点。比如：用经验似然方法构造置信区间拥有域保持性，变换不变性，置信域的形状由数据自行决定，以及 Bartlett 纠偏性和无需构造轴统计量等等。因而在相依情形下，经验似然方法研究成果少见[4]-[10]，尤其在 PA 相依样本见之甚少。目前，关于分布函数的研究多数局限于非参数核方法。本文将尝试在 PA 相依样本下，攻克普通经验似然方法的缺陷，重新利用分组经验似然方法，构造未知的分布函数置信区间。首先给出 PA 序列概念。

定义 1：[1]称随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ （$n\ge 2$）是 PA 的，如果对于集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的任何两个不相交的非空子集 A_1 和 A_2，都有

$$Cov\left(f_1\left(X_i,i\in A_1\right),f_2\left(X_j,j\in A_2\right)\right)\ge 0$$

此处，f_1 与 f_2 是任何两个使得协方差存在的对每个变量均非降(或非升)的函数。称随机变量序列 $\{X_i,i\in N\}$ 是 PA 序列，如果对任何 $n\ge 2$，随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ （$n\ge 2$）都是 PA (正相协)的。

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的正相协样本，由于 $EI_{\{X_i\le x\}}=F(x)$，

经验似然 $R(F(x))=\sup\left\{\prod_{i=1}^{n}nw_i,w_i\ge 0,\sum_{i=1}^{n}w_i=1,\sum_{i=1}^{n}w_iI_{\{X_i\le x\}}=F(x)\right\}$

对数经验似然为 $l(F(x))=-2\log R(F(x))=2\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+s\left[I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right]\right)$。

此处 $s\in R^1$，且满足 $K(s)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_{\{X_i\le x\}}-F(x)}{1+s\left[I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right]}=0$。

2. 主要的结论及其证明

条件：

1) $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体的强平稳 PA 样本；

2) 令 $u_n=\sup_{k}\sum_{j:|j-k|\ge n}Cov\left[\left(I_{\{X_j\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_k\le x\}}-F(x)\right)\right]<\infty$，若对某个 $r>2$，满足 $u_n=O\left(n^{\frac{-(r-2)}{2}}\right)$，

3) $\sum_{i=1}^{\infty}Cov\left[\left(I_{\{X_1\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_{1+i}\le x\}}-F(x)\right)\right]<\infty$；

定理 1：如果上述条件成立，我们有

$$l(F(x))\to_d\frac{A^2}{\sigma^2}\chi^2_{(1)},n\to\infty。$$

此处 $A^2=Var\left[I_{\{X\le x\}}-F(x)\right]+2\sum_{i=1}^{\infty}Cov\left[\left(\left(I_{\{X_1\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_{1+i}\le x\}}-F(x)\right)\right)\right]$，$\sigma^2=Var\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)$。

然而 A^2 和 σ^2 未知，定理 1 的结果不能应用，为了攻克这一缺陷，下面利用分组经验似然方法，重

新构造经验似然比函数。

记 $m=\left[n^{\alpha}\right], g=\left[\frac{n}{2m}\right]$，其中 $[\cdot]$ 表示取整， $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 为简单起见，使 $n=2mg$ 。

令 $\xi_i=\sum_{j=1}^{m}\left[I_{\left\{X_{2(i-1)m+j}\le x\right\}}-F(x)\right]$ $\eta_i=\sum_{j=1}^{m}\left[I_{\left\{X_{(2i-1)m+j}\le x\right\}}-F(x)\right]$ $Y_{2i-1}=\frac{\xi_i}{m}, Y_{2i}=\frac{\eta_i}{m}$ (对任意的 $i=1,2,\cdots,g$)

由于 $\left\{X_i \middle| i\ge 1\right\}$ 的强平稳性， $Y_i\left(i=1,\cdots,2g\right)$ 有共同分布函数 G，对应经验分布函数 G_{2g} 。分组经验似然比为 $R'\left(F(x)\right)=\sup\left\{\prod_{i=1}^{2g}2gP_i'\middle|\sum_{i=1}^{2g}P_i'=1, P_i'\ge 0, \sum_{i=1}^{2g}P_i'\sqrt{m}Y_i=0\right\}$ 。

对数经验似然比为 $l'\left(F(x)\right)=-2\log R'\left(F(x)\right)=2\sum_{i=1}^{2g}\log\left(1+\lambda\sqrt{m}Y_i\right)$ 。

此处 $\lambda\in R^1$ 且满足 $K'(\lambda)=\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\frac{\sqrt{m}Y_i}{1+\lambda\sqrt{m}Y_i}=0$ 。

定理 2：在定理 1 的条件下，我们有 $l'\left(F(x)\right)\to_d \chi^2_{(1)}$， $n\to\infty$ 。

利用定理 2，当样本 n 比较大时，可构造未知的分布函数 $F(x)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的渐近置信区域：$P\left(F(x)\middle|l'\left(F(x)\right)\le C_\alpha\right)\approx 1-\alpha$，其中 C_α 为 $\chi^2_{(1)}$ 分布的上 α 分位点，例如 α 取 0.05 或 0.01。

引理 1：记 $Z_n=\max_{1\le i\le n}\left|\left[EI_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right]\right|$，有 $Z_n=o_p\left(n^{\frac{1}{2}}\right)$ 。

证明：由于 $\left[EI_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right]$ 有界，易得

$$Z_n=\max_{1\le i\le n}\left|\left[EI_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right]\right|=o_p\left(n^{\frac{1}{2}}\right)。$$

引理 2：[7]若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为 PA 变量，有 $\left|X_j\right|\le C$，且 $EX_j=0$， $j=1,\cdots,N$ 。令 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，$u_n=\sup_k\sum_{j:|j-k|\ge n}Cov\left(X_j,X_k\right)$，假设对某个 $r>2$， $u_n=O\left(n^{\frac{-(r-2)}{2}}\right)$，则

$$\sup_{m\in N\cup\{0\}}E\left|S_{m+n}-S_n\right|^r\le Cn^{\frac{r}{2}}。$$

引理 3：[11]设 $\left\{X_i \middle| i\ge 1\right\}$ 是强平稳 PA 序列，并且 $\sum_{i=1}^{\infty}Cov\left(X_1,X_{1+i}\right)<\infty$，假定 $EX_1=0$， $E\left|X_1\right|^2<\infty$，则 $A_0{}^2=EX_1^2+2\sum_{i=1}^{\infty}E\left(X_1X_{1+i}\right)$ 收敛，且有

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|P\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}X_i}{A_0}<x\right)-\Phi(x)\right|\to 0，其中 \Phi(x) 为标准正态分布。$$

引理 4：设 $\left\{X_i \middle| i\ge 1\right\}$ 是强平稳 PA 序列，则有 $\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}m\left(Y_i\right)^2=A^2+o_p(1)$。

其中 $A^2=Var\left[I_{\{X\le x\}}-F(x)\right]+2\sum_{i=1}^{\infty}Cov\left[\left(I_{\{X_1\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_{1+i}\le x\}}-F(x)\right)\right]$。

证明：令 $S_2=\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}m\left(Y_i\right)^2$，利用引理 2 和条件 2 有

$$\begin{aligned}E\left(S_2'-ES_2'\right)^2&=\left(\frac{m}{2g}\right)^2E\left[\sum_{i=1}^{2g}\left(\left(Y_i'\right)^2-E\left(Y_i'\right)^2\right)\right]^2\\&\le C\left(\frac{m^2}{2g}\right)E\left(Y_i\right)^4\\&\le C\frac{m^2}{2g}\frac{E\left|I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right|^4}{m^2}\\&\le\frac{C}{2g}E\left|I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right|^4\to 0\end{aligned}$$

此处 C 为某个正常数，不同的地方 C 取值可不同。

因此有 $S_2=ES_2+o_p(1)$。

$$ES_2=\frac{m}{2g}\sum_{i=1}^{2g}E\left(Y_i\right)^2=mE\left(Y_i\right)^2=\frac{1}{m}E\left(\sum_{i=1}^{m}I_{\{X_i£x\}}-F(x)\right)^2$$

由于
$$\begin{aligned}&=\frac{1}{m}\left\{\begin{aligned}&mVar\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)+2m\sum_{i=1}^{m-1}Cov\left[\left(I_{\{X_1\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_{1+i}\le x\}}-F(x)\right)\right]\\&-2\sum_{i=1}^{m-1}iCov\left[\left(I_{\{X_1\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_{1+i}\le x\}}-F(x)\right)\right]\end{aligned}\right\}\\&=Var\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)+2\sum_{i=1}^{m-1}Cov\left[\left(I_{\{X_1\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_{1+i}\le x\}}-F(x)\right)\right]\\&-\frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m-1}iCov\left[\left(I_{\{X_1\le x\}}-F(x)\right),\left(I_{\{X_{1+i}\le x\}}-F(x)\right)\right]\end{aligned}$$

利用引理 3 和文献[12]知 $ES_2=A^2+o(1)$。

综上可得 $S_2=ES_2+o_p(1)=A^2+o(1)+o_p(1)=A^2+o_p(1)$。

定理 1 的证明：

由于

$$P\left\{\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)<0\right\}\ge\varepsilon>0,P\left\{\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)>0\right\}\ge\varepsilon>0\text{，}\tag{3.1}$$

这表明 0 是集合 $\left\{I_{\{X_1\le x\}}-F(x),1\le i\le n\right\}$ 所构成的凸包的内点，

因此 $R\left(F(x)\right)=\sup\left\{R(F)\middle|\int I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\mathrm{d}F=0,F\ll F_n\right\}$ 存在为正。 (3.2)

观察到 $R\left(F(x)\right)=\sup\prod_{i=1}^{n}nw_i$， (3.3)

对上式右端对 w_i 求上确界时，满足 $w_i\ge 0,\sum_{i=1}^{n}w_i=1,\text{且}\sum_{i=1}^{n}w_i\left[I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right]=0$。

利用拉格朗日乘子法，可得 $w_i=\frac{1}{n\left(1+s\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\right)},1\le i\le n$。 (3.4)

此处 $s \in R^1$，且满足

$$h(s)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{I_{\{X_i\le x\}}-F(x)}{1+s\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}=0$$

$$\begin{aligned}0=\left|h(s)\right|&=\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_{ii}\le x\}}-F(x)\right)-\sum_{i=1}^{n}\frac{s\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}{1+\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}\right|\\&\ge\frac{|s|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}{1+|s|Z_n}-\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\right|\end{aligned}\tag{3.5}$$

再利用引理 3 知：$\frac{|s|}{1+|s|Z_n}=\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，利用引理 2 得 $s=\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$。 (3.6)

令 $\gamma_i=s\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right), s$ 满足 $h(s)=0$，

利用(3.6)式及引理 1 知：$\max\limits_{1\le i\le n}|\gamma_i|=\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)o_p\left(\sqrt{n}\right)=o_p(1)$。 (3.7)

$$0=h(s)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}{1+s\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}{1+\gamma_i}$$

则有 $$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\left(1-\gamma_i+\frac{\gamma_i^2}{1+\gamma_i}\right)\text{。}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)-s\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\frac{\gamma_i^2}{1+\gamma_i}$$

令 $s=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}+\beta$, 利用(3.6)，(3.7)式和引理 4 可得

$$\beta=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^3s^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2(1+\gamma_i)}=o_p\left(\sqrt{n}\right)\mathrm{O}_p\left(\frac{1}{n}\right)=o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\text{。}$$

借助 Taylor 展开，我们有 $\log(1+\gamma_i)=\gamma_i-\frac{\gamma_i^2}{2}+\eta_i$，对某正数 G 有

$$P\left\{|\eta_i|\le G|\gamma_i|^3, 1\le i\le n\right\}\to 1, n\to\infty\text{。}$$

则有

$$l\left(F(x)\right)=-2\log R\left(F(x)\right)=2\sum_{i=1}^{n}\log\left(1+\gamma_i\right)=2\sum_{i=1}^{n}\gamma_i-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

$$=2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}+\beta\right)\left(\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\right)$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}+\beta\right)^2\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

$$=\frac{\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2\right)}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}+2\beta\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)-\frac{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}$$

$$-2\beta\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)-\beta^2\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i$$

$$=\frac{n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2}-n\beta^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)^2+2\sum_{i=1}^{n}\eta_i\triangleq I_1+I_2+I_3。\tag{3.8}$$

再利用引理 3 知：$I_1\to_d\frac{A^2}{\sigma^2}\chi^2_{(1)}$， $n\to\infty$。 (3.9)

由条件得：$I_2=o_p(1)$。 (3.10)

又由(3.6)和引理 2 得 $\left|2\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right|\le 2B|s|^3\sum_{i=1}^{n}\left|\left(I_{\{X_i\le x\}}-F(x)\right)\right|^3=o_p(1)$

其中 B 为某个正数，故有 $I_3=o_p(1)$。 (3.11)

综合(3.9)~(3.11)式便得 $l(\theta_0)\to_d\frac{A^2}{\sigma^2}\chi^2_{(1)}$， $n\to\infty$。 (3.12)

定理 2 的证明：

只需证明 $l'\left(F(x)\right)=-2\log R'\left(F(x)\right)\to_d\chi^2_{(1)}\quad n\to\infty$。 (3.13)

观察到 $R'\left(F(x)\right)=\sup\prod_{i=1}^{2g}2gP_i'$，对上式右端对 P_i' 求上确界时，

满足 $P_i'\ge 0,\sum_{i=1}^{2g}P_i'=1,\sum_{i=1}^{2g}P_i'\sqrt{m}Y_i=0$。

借助拉格朗日乘子法得 $P_i=\frac{1}{2g\left(1+\lambda\sqrt{m}Y_i\right)},1\le i\le 2g$， (3.14)

此处 $\lambda\in R^1$，且满足 $K'(\lambda)=\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\frac{\sqrt{m}Y_i}{1+\lambda\sqrt{m}Y_i}=0$。

利用引理 1 证明得 $\max_{1\le i\le 2g}|Y_i|=o_p\left(g^{\frac{1-2\alpha}{4}}\right)$。 (3.15)

有
$$\max_{1\le i\le 2g}\left|\sqrt{m}Y_i\right| = \sqrt{m}\max_{1\le i\le 2g}\left|Y_i\right| = \sqrt{m}o_p\left(g^{\frac{1-2\alpha}{4}}\right) = n^{\frac{\alpha}{2}}o_p\left(n^{\frac{1-2\alpha}{4}}\right) = o_p\left(n^{\frac{1}{4}}\right) = o_p\left(g^{\frac{1}{2}}\right)。\tag{3.16}$$

往证$\lambda = \mathrm{O}_p\left(g^{-\frac{1}{2}}\right)$。 (3.17)

展开 $K'(\lambda)$ 得
$$\begin{aligned}0 = \left|K'(\lambda)\right| &= \frac{1}{2g}\left|\sum_{i=1}^{2g}\frac{\sqrt{m}Y_i}{1+\lambda\sqrt{m}Y_i}\right| = \frac{1}{2g}\left|\sum_{i=1}^{2g}\frac{\lambda m Y_i^2}{1+\lambda\sqrt{m}Y_i} - \sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i\right| \\ &\ge \frac{1}{2g}\left|\sum_{i=1}^{2g}\frac{\lambda m Y_i^2}{1+\lambda\sqrt{m}Y_i}\right| - \frac{1}{2g}\left|\sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i\right| \\ &\ge \frac{|\lambda|S_2}{1+Z_{2g}|\lambda|} - \frac{1}{2g}\left|\sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i\right|\end{aligned}\tag{3.18}$$

此处 $Z_{2g} = \max_{1\le i\le 2g}\left|\sqrt{m}Y_i\right|$。

利用引理 4 得 $\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i = \mathrm{O}_p\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}\right) = \mathrm{O}_p\left(g^{-\frac{1}{2}}\right)$。 (3.19)

利用(3.18)及(3.19)式得 $\frac{|\lambda|S_2}{1+Z_{2g}|\lambda|} = \mathrm{O}_p\left(g^{-\frac{1}{2}}\right)$。 (3.20)

又由引理 1，引理 2，(3.17)及(3.20)式知$|\lambda| = \mathrm{O}_p\left(g^{-\frac{1}{2}}\right)$。记 $\gamma_i = \lambda\sqrt{m}Y_i$。

利用(3.17)和(3.18)式得：$\max_{1\le i\le 2g}|\gamma_i| = \mathrm{O}_p\left(g^{-\frac{1}{2}}\right)o_p\left(g^{\frac{1}{2}}\right) = o_P(1)$。 (3.21)

又展开 $K'(\lambda)$ 可得

$$\begin{aligned}0 = K'(\lambda) &= \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\frac{\sqrt{m}Y_i}{1+\lambda\sqrt{m}Y_i} = \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\frac{\sqrt{m}Y_i}{1+\gamma_i} \\ &= \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i\left(1-\gamma_i+\frac{\gamma_i^2}{1+\gamma_i}\right) \\ &= \sqrt{m}\bar{Y} - S_2\lambda + \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i\frac{\gamma_i^2}{1+\gamma_i}\end{aligned}。$$

记 $\beta = \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i\frac{\gamma_i^2}{1+\gamma_i}$，有 $\lambda = S_2^{-1}\sqrt{m}\bar{Y} + S_2^{-1}\beta$。 (3.22)

利用引理 4 和(3.18)式得

$$\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\left(\sqrt{m}|Y_i|\right)^3 \le \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\left(\sqrt{m}|Y_i|\right)^2\max_{1\le i\le 2g}\sqrt{m}|Y_i| = o_p\left(g^{\frac{1}{2}}\right)。\tag{3.23}$$

又利用(3.21)，(3.22)和(3.24)式得

$$|\beta| \le \frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}\left(\sqrt{m}|Y_i|\right)^3|\lambda|^2(1+\gamma_i)^{-1} = o_p\left(g^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{O}_p\left(g^{-1}\right) = o_p\left(g^{-\frac{1}{2}}\right)。\tag{3.24}$$

利用(3.23)式并利用 Taylor 展开式，则有

$$
\begin{aligned}
l'(F(x)) &= -2\log R'(F(x)) = 2\sum_{i=1}^{2g}\log(1+\gamma_i) = 2\sum_{i=1}^{2g}\gamma_i - \sum_{i=1}^{2g}\gamma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{2g}\eta_i \\
&= 2\sum_{i=1}^{2g}\lambda\sqrt{m}Y_i - \sum_{i=1}^{2g}\left(\lambda\sqrt{m}Y_i\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{2g}\eta_i \\
&= 2\sum_{i=1}^{2g}\sqrt{m}Y_i\left(S_2^{-1}\sqrt{m}\overline{Y} + S_2^{-1}\beta\right) - \sum_{i=1}^{2g}\left(S_2^{-1}\sqrt{m}\overline{Y} + S_2^{-1}\beta\right)^2 mY_i^2 + 2\sum_{i=1}^{2g}\eta_i \\
&= 4mgS_2^{-1}\left(\overline{Y}\right)^2 + 4\sqrt{m}g\overline{Y}S_2^{-1}\beta - \left(S_2^{-1}\right)^2 m\left(\overline{Y}\right)^2\sum_{i=1}^{2g}mY_i^2 \\
&\quad -\left(S_2^{-1}\beta\right)^2\sum_{i=1}^{2g}mY_i^2 - 2\left(S_2^{-1}\right)^2\sqrt{m}\overline{Y}\beta\sum_{i=1}^{2g}mY_i^2 + 2\sum_{i=1}^{2g}\eta_i \\
&= 2nS_2^{-1}\left(\overline{Y}\right)^2 + 4\sqrt{m}g\overline{Y}S_2^{-1}\beta - 2mg\left(S_2^{-1}\right)^2\left(\overline{Y}\right)^2\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}mY_i^2 \\
&\quad -2g\left(S_2^{-1}\right)^2\beta^2\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}mY_i^2 - 4\sqrt{m}g\overline{Y}\beta\frac{1}{2g}\sum_{i=1}^{2g}mY_i^2\left(S_2^{-1}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{2g}\eta_i \\
&= nS_2^{-1}\left(\overline{Y}\right)^2 - 2g\beta^2S_2^{-1} + 2\sum_{i=1}^{2g}\eta_i \\
&\triangleq I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

此处 $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_{\{X_i\le x\}} - F(x)\right)$。

利用引理 3 及引理 4，得 $I_1 \to_d \chi_{(1)}^2$， $n\to\infty$。 (3.26)

利用(3.24)式得 $I_2 = 2g\beta^2S_2^{-1} = o_p(1)$。 (3.27)

利用(3.18)和(3.24)式得 $2\left|\sum_{i=1}^{2g}\eta_i\right| \le 2B|\lambda|^3\sum_{i=1}^{2g}\left(\sqrt{m}|Y_i|\right)^3 = \mathrm{O}_p\left(g^{-1}\right) = o_p(1)$，

从而可得 $I_3 = o_p(1)$。 (3.28)

综上(3.25)~(3.28)式得 $l'\left(F(x)_0\right) \to_d \chi_{(1)}^2$， $n\to\infty$。 (3.29)

基金项目

本论文得到广东省自然科学基金项目资助(2016A030313812; 2018A030307070)。

参考文献

[1] Joag-Dev, K. and Proschan, F. (1983) Negative Association of Random Variable with Application. *The Annals of Statistics*, **11**, 286-295.

[2] Owen, A.B. (1988) Empirical Likelihood Ratio Confidence Intervals for a Single Function. *Biometrika*, **75**, 237-249. https://doi.org/10.1093/biomet/75.2.237

[3] Owen, A.B. (1990) Empirical Likelihood Confidence Regions. *The Annals of Statistics*, **18**, 90 -120. https://doi.org/10.1214/aos/1176347494

[4] 张军舰, 王成名, 等. 相依样本情形下经验似然比置信区间[J]. 高校应用数学学报, 1999, 14(1): 63-72.

[5] Kitamura, Y. (1997) Empirical Likelihood Methods with Weakly Dependent Process. *The Annals of Statistics*, **25**, 2084-2102. https://doi.org/10.1214/aos/1069362388

[6] Lin, L. and Runchu, Z. (2001) Block Empirical Edulidean Likelihood for Weakly Dependent Process. *Statistics &*

Probability Letters, **53**, 143-152. https://doi.org/10.1016/S0167-7152(01)00066-9

[7] Birkel, T. (1988) Moment Bounds for Dependent Associated Sequences. *The Annals of Probability*, **16**, 1184-1193. https://doi.org/10.1214/aop/1176991684

[8] Zhang, J.J. (2006) Empirical Likelihood for NA Series. *Statistics & Probability Letters*, **76**, 153-160. https://doi.org/10.1016/j.spl.2005.07.019

[9] Chen, S.X. and Wong, C.M. (2009) Smoothed Block Empirical Likelihood for Quantiles of Weakly Dependent Processes. *Statistica Sinica*, No. 19, 71-81.

[10] Zhang, J.J. (2007) Empirical Likelihood Ratio Confidence Interval for Positively Associated Series. *Acta Mathematica Applicate Sinica-English Series*, No. 23, 245-254.

[11] Newman, C.M. (1984) Asymptotic Independence and Limit Theorems for Positive and Negative Dependent Random Variable. Inequalities in statistics and Probability, Hayward, 127-140.

[12] 杨善朝. 随机变量部分和的矩不等式[J]. 中国科学, A 辑, 2000, 30(3): 218-223.