Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(10), 1123-1131
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.910138

Infinitely Many Solutions for Quasilinear Elliptic Equations with Φ-Laplacian Operator

Mingmin Wang*, Gao Jia

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
Email: *745136863@qq.com, gaojia89@163.com

Received: Nov. 14th, 2019; accepted: Nov. 27th, 2019; published: Dec. 4th, 2019

Abstract

By using fountain theorem, we studied a class of the Dirichlet boundary value problems of quasilinear elliptic equation with Φ-Laplacian operator. Without the Ambrosetti-Rabinowitz condition, we obtained infinitely many weak solutions.

Keywords

Quasilinear Elliptic Equation, Concave-Convex Nonlinearity, Fountain Theorem

含Φ-Laplace算子的拟线性椭圆型方程的无穷多解

王明旻*，贾　高

上海理工大学理学院，上海
Email: *745136863@qq.com, gaojia89@163.com

收稿日期：2019年11月14日；录用日期：2019年11月27日；发布日期：2019年12月4日

摘　要

本文利用喷泉定理讨论了一类具有Φ-Laplacian算子的拟线性椭圆型方程Dirichlet问题，在非线性项不满足(AR)条件的情况下，得到无穷多解的存在性。

*通讯作者。

文章引用: 王明旻, 贾高. 含 Φ-Laplace 算子的拟线性椭圆型方程的无穷多解[J]. 理论数学, 2019, 9(10): 1123-1131.
DOI: 10.12677/pm.2019.910138

关键词

拟线性椭圆型方程，凹凸非线性项，喷泉定理

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

本文考虑如下带有 Dirichlet 边界的拟线性椭圆型方程存在无穷多解：

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = \lambda u^{\tau-1} + f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$\Delta_\Phi u = \operatorname{div}\left(\phi(|\nabla u|)\nabla u\right)$ 是 Φ-Laplace 算子，$s \mapsto s\phi(s)$ 是奇函数，$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s)s\mathrm{d}s$，$f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数，$\lambda > 0$。

在过去几十年里，对具有 Φ-Laplace 算子的拟线性椭圆型方程解的存在性等相关问题得到了广泛研究，如文献[1] [2]。并且这类方程有很好的物理背景，在偏微分方程、非牛顿流体、图像处理、等离子物理等领域有着广泛的应用。近年来，讨论无穷多解存在性的文章有很多，如文献[3] [4]，分别研究了方程和方程组解的存在性和多重性问题，其中具有代表性的结果是

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(a(|\nabla u|)\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

作者 Chung [5]等利用山路定理和喷泉引理研究了问题(2)非平凡弱解和无穷解序列的存在性问题。

本文的目的是在没有(AR)条件的情况下得到问题(1)的无穷多解的存在性。

首先，给出函数 $\phi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ 满足下列假设：

(ϕ_1) 当 $t \to 0$ 时，$t\phi(t) \to 0$，当 $t \to \infty$ 时，$t\phi(t) \to \infty$；

(ϕ_2) $t\phi(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格增的；

(ϕ_3) $0 < \ell - 1 \le \dfrac{(t\phi(t))'}{\phi(t)} \le m - 1 < \ell^* - 1 < \mathbb{N}$，其中 $\ell^* = \dfrac{N\ell}{N-\ell}$，$0 < \tau < \ell$；

(ϕ_4) 存在常数 $\mu_1 > 0$，使得对任意的 $a \in [0,1]$，$t > 0$，有

$$\bar{\Phi}(at) \le \bar{\Phi}(t) + \mu_1,$$

其中 $\bar{\Phi}(t) = m\Phi(t) - \phi(t)t^2$。

进一步，假设 $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数且满足下面条件：

(f_1) f 满足次临界增长条件，即对任意的 $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$，有

$$|f(x,t)| \le c_0\left(1 + |t|^{q-1}\right),$$

其中 $m < q < \ell^*$，$c_0 > 0$；

(f_2) $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{F(x,t)}{|t|^m} = +\infty$ 对几乎所有 $x \in \Omega$ 一致成立；

(f_3) 存在常数 $\mu_2>0$，使得对任意的 $a\in[0,1]$，有

$$\bar{F}(x,at)\le \bar{F}(x,t)+\mu_2,\quad \forall (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R},$$

其中 $\bar{F}(x,t)=tf(x,t)-mF(x,t)$，$F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$；

(f_4) $f(x,-t)=-f(x,t)$，$\forall (x,t)\in\Omega\times\mathbb{R}$。

假设 f 在无穷远处 m 次超线性增长，即 (f_2)，但不满足(AR)条件(见文献[6])，这对我们解决问题造成了困难。为了克服这一困难，我们需要证明 $(C)_c$ 条件，从而利用喷泉定理，得到问题(1)的无穷多解的存在性。

本文的主要结果如下：

定理 1.1：在满足 (ϕ_1)-(ϕ_4) 和 (f_1)-(f_4) 假设下，问题(1)对任意的 $\lambda>0$，有无穷解序列 $\{u_k\}$ 满足

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_k|)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega |u_k|^\tau \mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_k)\mathrm{d}x\to\infty,\quad k\to\infty。$$

2. 预备知识和基本引理

记 $L_\Phi(\Omega)=\left\{u\mid u:\Omega\to\mathbb{R}是可测的,\int_\Omega\Phi(|u(x)|)\mathrm{d}x<\infty\right\}$，在 $L_\Phi(\Omega)$ 上定义 Luxemburg 范数：

$$\|u\|_\Phi=\inf_k\left\{k>0\middle|\int_\Omega\Phi\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\mathrm{d}x\le 1\right\}。$$

记 $W^{1,\Phi}(\Omega)=\left\{u\middle|u\in L_\Phi(\Omega),D_iu\in L_\Phi(\Omega),i=1,\cdots,n\right\}$，在 $W^{1,\Phi}(\Omega)$ 上定义范数：

$$\|u\|_{1,\Phi}=\|u\|_\Phi+\|\nabla u\|_\Phi。$$

记 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,\Phi}(\Omega)$ 中的闭包。设 Φ 满足 Δ_2-条件，即 $\Phi(2t)\le K\Phi(t)$，$\forall t\ge 0$，则 $L_\Phi(\Omega)$ 和 $W^{1,\Phi}(\Omega)$ 是可分、自反的 Banach 空间(见文献[7])。

设 $d_\Omega=diam(\Omega)$，则对任意 $u\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，有 $\int_\Omega\Phi(u)\mathrm{d}x\le\int_\Omega\Phi(2d_\Omega|\nabla u|)\mathrm{d}x$，那么 $\|u\|_\Phi\le 2d_\Omega\|\nabla u\|_\Phi$。因此，定义在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 上的范数 $\|u\|:=\|\nabla u\|_\Phi$ 与 $\|\cdot\|_{1,\Phi}$ 等价。

设 $\Phi_*^{-1}=\int_0^t\frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{\frac{N+1}{N}}}\mathrm{d}s$，且当 $t<0$ 时，$\Phi_*(t)=\Phi_*(-t)$。如果对于所有的 $\nu>0$，都有 $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\Upsilon(\nu t)}{\Phi_*(t)}=0$，则称函数 Υ 在无穷远处比 Φ_* 增长得更慢，记 $\Upsilon\ll\Phi_*$。如果 $\Upsilon\ll\Phi_*$，则 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L_\Upsilon(\Omega)$。进一步，有 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\hookrightarrow L_{\Phi_*}(\Omega)$。在条件 (ϕ_1)-(ϕ_3) 下，有连续嵌入：$L^m(\Omega)\hookrightarrow L_\Phi(\Omega)\hookrightarrow L^\ell(\Omega)$，$L_{\Phi_*}(\Omega)\hookrightarrow L^{\ell^*}(\Omega)$。

注记 2.1：在条件 (ϕ_3) 下，可推得下式成立：

$$\ell-2\le\frac{\phi'(t)t}{\phi(t)}\le m-2,\quad \ell\le\frac{\phi(t)t^2}{\Phi(t)}\le m,\quad t>0。$$

下面给出本文需要的几个基本引理。

引理 2.2 [1]：设 (ϕ_1)-(ϕ_3) 成立，对所有的 $t\ge 0$，令

$$\eta_1(t)=\min\left\{t^\ell,t^m\right\},\quad \eta_2(t)=\max\left\{t^\ell,t^m\right\}。$$

则对于任意 $\rho,t>0$， $u\in L_\Phi(\Omega)$，成立

$$\eta_1(t)\phi(\rho)\le\phi(\rho t)\le\eta_2(t)\phi(\rho),\quad \eta_1\left(\|u\|_\Phi\right)\le\int_\Omega\Phi(u)\,\mathrm{d}x\le\eta_2\left(\|u\|_\Phi\right)。$$

定义 2.3： 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是实 Banach 空间，$I\in C^1(X,\mathbb{R})$，我们说泛函在水平 $c\in\mathbb{R}$ 处满足 Cerami 条件(简称 $(C)_c$ 条件)是指：如果对任意序列 $\{u_n\}\subset X$，当 $n\to\infty$ 时，有 $I(u_n)\to c$，且 $\|I'(u_n)\|_*(1+\|u_n\|)\to 0$，那么 $\{u_n\}$ 在 X 中存在收敛的子序列。

引理 2.4 [8]**：** 设 (ϕ_1)-(ϕ_3) 成立，则 $-\Delta_\Phi$ 是 (S_+) 型算子，即对任意给定序列 $\{u_n\}\subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，若 $u_n\rightharpoonup u$，且 $\limsup\limits_{n\to\infty}\langle-\Delta_\Phi u_n,u_n-u\rangle\le 0$，则在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中有 $u_n\to u$。

为了证明主要结果需要使用下列的喷泉定理(见文献[9])。

设 X 为可分自反的 Banach 空间，存在 $\{e_j\}\subset X$， $\{e_j^*\}\subset X^*$，使得

$$X=\overline{\operatorname{span}\{e_j:j=1,2,\cdots\}},\quad X^*=\overline{\operatorname{span}\{e_j^*:j=1,2,\cdots\}},$$

且

$$\langle e_j,e_j^*\rangle=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\ne j.\end{cases}$$

记 $X_j=\operatorname{span}\{e_j\}$，对任意的 $k\in\mathbb{N}$，定义 $Y_k=\bigoplus_{j=1}^{k}X_j$， $Z_k=\overline{\bigoplus_{j=k}^{\infty}X_j}$。

引理 2.5： (喷泉定理)设 X 是可分的自反实 Banach 空间，$I\in C^1(X,\mathbb{R})$ 是偶泛函，如果对任意的 $k\in\mathbb{N}$，存在 $\rho_k>r_k>0$，使得

i) $a_k:=\inf\limits_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}I(u)\to+\infty$， $k\to\infty$；

ii) $b_k:=\max\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}I(u)\le 0$。

iii) 对任意 $c>0$，I 满足 $(C)_c$ 条件；

则 I 有一列趋于无穷的临界点，即存在序列 $\{u_k\}\subset X$，使得 $I'(u_k)=0$，且 $I(u_k)\to\infty$， $k\to\infty$。

问题(1)对应的能量泛函为 $I_\lambda:W_0^{1,\Phi}(\Omega)\to\mathbb{R}$，

$$I_\lambda(u)=\int_\Omega\Phi(|\nabla u|)\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega|u|^\tau\,\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\,\mathrm{d}x。\tag{3}$$

在基本假设 (ϕ_1)-(ϕ_4) 和 (f_1)-(f_4) 成立前提下，容易验证(3)是有意义的，且

$$I_\lambda'(u)v=\int_\Omega\phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega|u|^{\tau-2}uv\,\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)v\,\mathrm{d}x,\quad\forall v\in W_0^{1,\Phi}(\Omega)。$$

因此，寻找问题(1)的弱解等价于求 I_λ 的临界点。

3. 主要结果的证明

引理 3.1： 设 (ϕ_1)-(ϕ_4) 和 (f_1)-(f_3) 成立，则对任意的 $c>0$，泛函 I_λ 满足 $(C)_c$ 条件。

证明： 设 $(C)_c$ 序列 $\{u_n\}\subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$，满足

$$I_\lambda(u_n)\to c,\quad n\to\infty,\tag{4}$$

$$\|I_\lambda'(u_n)\|_*(1+\|u_n\|)\to 0,\quad n\to\infty。\tag{5}$$

由(4)、(5)可得

$$I_\lambda(u_n)+o(1)=c,\tag{6}$$

$$\left\langle I_\lambda'(u_n),v\right\rangle = o(1)\text{。}\tag{7}$$

首先，证明序列$\{u_n\}\subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$有界。事实上，如果$\{u_n\}\subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$无界，则存在子序列(仍记为其本身)，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|=\infty\text{，且}\|u_n\|>1\text{，}\quad\forall n\in\mathbb{N}\text{。}$$

令$w_n:=\dfrac{u_n}{\|u_n\|}$，$n=1,2,\cdots$，则$\{w_n\}\subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$且$\|w_n\|=1$，$\forall n\in\mathbb{N}$，因此，存在子列(仍记为其本身)，

$$w_n\rightharpoonup w\quad(\text{在}\,W_0^{1,\Phi}(\Omega)\,\text{中})\text{，}\tag{8}$$

$$w_n\to w\quad(\text{在}\,L^q(\Omega)\,\text{中})\text{，}\tag{9}$$

$$w_n\to w\qquad a.e.\ x\in\Omega\text{。}\tag{10}$$

我们断言$w_n\to 0$ a.e. $x\in\Omega$。事实上，令$\Omega_0=\left\{x\in\Omega\,\middle|\,w(x)\neq 0\right\}$，假设$meas(\Omega_0)>0$，那么，对给定的$x\in\Omega_0$，由(6)推得$|u_n(x)|=|w_n(x)|\|u_n(x)\|\to\infty$，$n\to\infty$。由$(f_2)$可得

$$\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}=\frac{F(x,u_n)}{|u_n|^m}|w_n|^m\to\infty\text{，}\quad n\to\infty\text{，}$$

且存在$t_0>0$，使得对任意的$x\in\Omega$，当$|t|>t_0>0$时，有

$$\frac{F(x,t)}{|t|^m}>1\text{。}\tag{11}$$

因为$F(x,t)$在$\bar{\Omega}\times[-t_0,t_0]$上连续，所以存在$c_1>0$，使得对任意的$(x,t)\in\bar{\Omega}\times[-t_0,t_0]$，有

$$|F(x,t)|\le c_1\text{。}\tag{12}$$

因此，由(11)、(12)式知，存在$c_2>0$，使得$F(x,t)\ge c_2$，$\dfrac{F(x,u_n)-c_2}{\|u_n\|^m}=\dfrac{F(x,u_n)-c_2}{|u_n|^m}|w_n|^m\ge 0$。

根据(6)式，有

$$c+o(1)=I_\lambda(u_n)=\int_\Omega\Phi(|\nabla u_n|)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega|u_n|^\tau\,\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u_n)\mathrm{d}x\text{。}$$

再结合引理 2.2 和$\|u_n\|>1$推得

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega\frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x&=\frac{\varliminf\limits_{n\to\infty}\int_\Omega\Phi(|\nabla u_n|)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega|u_n|^\tau\,\mathrm{d}x-(c+o(1))}{\|u_n\|^m}\\&\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{\int_\Omega\Phi(|\nabla u_n|)\mathrm{d}x-(c+o(1))}{\|u_n\|^m}\\&\le\varliminf_{n\to\infty}\frac{\|u_n\|^m-(c+o(1))}{\|u_n\|^m}\end{aligned}\text{。}$$

由 Fatou 引理，可得

$$\begin{aligned}\infty &= \int_{\Omega_0} \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{F(x,u_n)-c_2}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\Omega_0} \frac{F(x,u_n)-c_2}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x \\ &= \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\Omega_0} \frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x - \overline{\lim}_{n\to\infty} c_2 \int_{\Omega_0} \frac{1}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\Omega} \frac{F(x,u_n)}{\|u_n\|^m}\mathrm{d}x \le 1\end{aligned},$$

上式是一个矛盾的结论。故 $w_n \to 0$ a.e. $x\in\Omega$。

因为对任意的 $n\in\mathbb{N}$，当 $t\in[0,1]$ 时，$I_\lambda(tu_n)$ 连续，则存在 $t_n\in[0,1]$，使得

$$I_\lambda(t_n u_n) = \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(tu_n)。$$

由(7)式知，$\langle I'_\lambda(t_n u_n), t_n u_n\rangle \to 0$，$n\to\infty$。

一方面，取序列 $\{s_k\}$，使得对任意的 $k\in\mathbb{N}$，有 $s_k>1$，且 $\lim_{k\to\infty} s_k=\infty$，则对任意的 $k,n\in\mathbb{N}$，有

$$\|s_k w_n\| = s_k > 1。$$

根据 (f_1) 和(9)知，$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,s_k w_n)\mathrm{d}x \le c_3 \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left(s_k|w_n| + s_k{}^q |w_n|^q\right)\mathrm{d}x = 0$，那么，

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,s_k w_n)\mathrm{d}x = 0。$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|=\infty$，所以当 n 足够大时，有 $\|u_n\|>s_k$，即 $0<\frac{s_k}{\|u_n\|}<1$。

于是结合引理 2.2，

$$\begin{aligned} I_\lambda(t_n u_n) &= \max_{t\in[0,1]} I_\lambda(tu_n) \ge I_\lambda\left(\frac{s_k}{\|u_n\|}u_n\right) = I_\lambda(s_k w_n) \\ &= \int_\Omega \Phi(|\nabla s_k w_n|)\mathrm{d}x - \frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega s_k |w_n|^\tau \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,s_k w_n)\mathrm{d}x \\ &\ge \min\left\{\|s_k w_n\|^\ell, \|s_k w_n\|^m\right\} - \frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega s_k|w_n|^\tau \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,s_k w_n)\mathrm{d}x \\ &\ge \frac{1}{2}\|s_k w_n\|^\ell = \frac{1}{2}s_k^\ell \end{aligned}。\tag{13}$$

令 $s_k = \|u_k\|^\theta > 1$，$\theta\in\left(\frac{\tau}{\ell},+\infty\right)$，则 $I_\lambda(t_n u_n) \ge \frac{1}{2}\|u_k\|^{\ell\theta}$。

另一方面，由条件 (f_3)、(ϕ_4) 和(4)、(7)式，当 n 充分大时，有

$$\begin{aligned} I_\lambda(t_n u_n) &= I_\lambda(t_n u_n) - \frac{1}{m}\langle I'(t_n u_n), t_n u_n\rangle + o(1) \\ &= \frac{1}{m}\int_\Omega \overline{\Phi}(|t_n u_n|)\mathrm{d}x + \frac{1}{m}\int_\Omega \overline{F}(t_n u_n)\mathrm{d}x + \lambda\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{\tau}\right)\int_\Omega |t_n u_n|^\tau \mathrm{d}x + o(1) \\ &\le \frac{1}{m}\int_\Omega \left(\overline{\Phi}(|\nabla u_n|)+\mu_1\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{m}\int_\Omega \left(\overline{F}(x,u_n)+\mu_2\right)\mathrm{d}x + o(1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(\int_\Omega \Phi\left(|\nabla u_n|\right)\mathrm{d}x-\int_\Omega F\left(x,u_n\right)\mathrm{d}x\right)\\
&\quad-\frac{1}{m}\left(\int_\Omega \phi\left(|\nabla u_n|\right)|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x-\int_\Omega f\left(x,u_n\right)u_n\mathrm{d}x\right)+\frac{\mu_1+\mu_2}{m}|\Omega|+o(1)\\
&=I_\lambda\left(u_n\right)-\frac{1}{m}\left\langle I_\lambda'\left(u_n\right),u_n\right\rangle+\lambda\left(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{m}\right)\int_\Omega|u_n|^\tau\,\mathrm{d}x+\frac{\mu_1+\mu_2}{m}|\Omega|+o(1)\\
&\le c+c_4\|u_n\|^\tau+\frac{\mu_1+\mu_2}{m}|\Omega|+o(1)
\end{aligned}
$$

结合(13)式，有

$$\frac{1}{2}\|u_k\|^{\ell\theta}-c_4\|u_n\|^\tau\le c+\frac{\mu_1+\mu_2}{m}+o(1)\text{。}$$

因为 $\ell\theta>\tau$，当 $n\ge n_k\ge k\to\infty$ 时，从上式可得 $+\infty\le\overline{c}$，矛盾。故 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中有界，则存在子列(仍记为其本身)，有

$$u_n\rightharpoonup u\quad(\text{在 }W_0^{1,\Phi}(\Omega)\text{ 中}),\tag{14}$$

$$u_n\to u\quad(\text{在 }L^q(\Omega)\text{ 中}),\tag{15}$$

$$u_n\to u\qquad a.e.\ x\in\Omega\text{。}\tag{16}$$

取测试函数 $v=u_n-u$ 代入(7)式中，再结合(14)、(15)式、Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\phi\left(|\nabla u_n|\right)\nabla u_n\nabla\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x\\
&=\lambda\int_\Omega|u_n|^{\tau-2}u_n\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x+\int_\Omega f\left(x,u_n\right)\left(u_n-u\right)\mathrm{d}x+o(1)\\
&\le\lambda\|u_n\|_{L^\tau(\Omega)}^{\tau-1}\|u_n-u\|_{L^\tau(\Omega)}+c_5\|u_n\|_{L^q(\Omega)}^{q-1}\|u_n-u\|_{L^q(\Omega)}+c_6\|u_n-u\|_{L^1(\Omega)}+o(1)\\
&\to0,\quad n\to\infty
\end{aligned}
\text{。}
$$

于是得到

$$\limsup_{n\to\infty}\left\langle-\Delta_\Phi u_n,u_n-u\right\rangle\le0\text{。}\tag{17}$$

又 $-\Delta_\Phi$ 算子满足 (S_+) 型条件。因此，由引理 2.4、(14)和(17)式，推得在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中，$u_n\to u$。证毕。

引理 3.2 若 $m<q<\ell^*$，则下式成立 $\alpha_k:=\sup\left\{\|u\|_{L^q(\Omega)}:\|u\|=1,u\in Z_k\right\}\to0,k\to\infty$。

证明： 显然，对任意的 $k\in\mathbb{N}$，有 $0<\alpha_{k+1}\le\alpha_k$，则当 $k\to\infty$ 时，。

令 $u_k\in Z_k$，使得 $\|u_k\|=1$，且 $0\le\alpha_k-\|u_k\|_{L^q(\Omega)}<\frac{1}{k}$。由此，$\{u_k\}$ 存在子列(仍记为其本身)，使得在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中 $u_n\rightharpoonup u$，且 $\left\langle e_j^*,u\right\rangle=\lim_{k\to\infty}\left\langle e_j^*,u_k\right\rangle=0$，$j=1,2,\cdots$。

由于 Z_k 是 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 的闭集，那么对任意的 $k\in\mathbb{N}$，$u\in Z_k$，可推得在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中 $u_n\rightharpoonup0$。又由 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega)$ 是紧的，则在 $L^q(\Omega)$ 中 $u_n\to0$。故 $\lim_{k\to\infty}\alpha_k=0$。证毕。

引理 3.3 在 (f_1) 和 (f_2) 假设下，对任意的 $k\in\mathbb{N}$，存在 $\rho_k>r_k>0$，使得

i) $a_k:=\inf_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}I_\lambda(u)\to+\infty$，$k\to\infty$；

ii) $b_k:=\max_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}I_\lambda(u)\le0$。

证明： i) 对任意的 $u\in Z_k$，当 $\|u\|>1$ 时，由引理 2.2 和 (f_1)，有

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)&=\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega |u|^\tau \mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x\\&\ge \min\left\{\|u\|^\ell,\|u\|^m\right\}-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega|u|^\tau\mathrm{d}x-c_6\int_\Omega\left(|u|+|u|^q\right)\mathrm{d}x,\\&\ge \|u\|^\ell-\frac{\lambda}{\tau}\|u\|^\tau-c_7\alpha_k^q\|u\|^q-c_8\|u\|\end{aligned}$$

其中 $\alpha_k:=\sup\left\{\|u\|_{L^q(\Omega)}:\|u\|=1,u\in Z_k\right\}$。取 $\|u\|=r_k=\left(2c_7\alpha_k^q\right)^{\frac{1}{\ell-q}}$，则

$$\begin{aligned}I_\lambda(u)&\ge\left(2c_7\alpha_k^q\right)^{\frac{\ell}{\ell-q}}-\frac{\lambda}{\tau}r_k^\tau-c_7\alpha_k^q\left(2c_7\alpha_k^q\right)^{\frac{q}{\ell-q}}-c_9r_k\\&=\frac{1}{2}\left(2c_7\alpha_k^q\right)^{\frac{\ell}{\ell-q}}-\frac{\lambda}{\tau}r_k^\tau-c_9r_k\\&=\frac{1}{2}r_k^\ell-\frac{\lambda}{\tau}r_k^\tau-c_9r_k\end{aligned}。$$

由引理 3.2 知，$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=0$，又 $q>\ell>\tau>1$，因此，$\lim\limits_{k\to\infty}r_k=+\infty$。故 $\lim\limits_{k\to\infty}a_k:=\inf\limits_{u\in Z_k,\|u\|=r_k}I_\lambda(u)=+\infty$。

证毕。

ii) 根据 (f_2)，对任意的 $M>0$，存在 $C_M>0$（依赖于 M），使得

$$F(x,s)\ge M|s|^m-C_M,\quad \forall(x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}。$$

取 $h\in Y_k$，且 $\|h\|=1$，$t>1$，则

$$\begin{aligned}I_\lambda(th)&=\int_\Omega\Phi(|\nabla th|)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega|th|^\tau\mathrm{d}x-\int_\Omega F(x,th)\mathrm{d}x\\&\le\max\left\{t^\ell\|h\|^\ell,t^m\|h\|^m\right\}-\frac{\lambda}{\tau}\int_\Omega|th|^\tau\mathrm{d}x-M\int_\Omega|th|^m\mathrm{d}x+C_M|\Omega|\\&\le t^m\left(\|h\|^m-M\|h\|^m_{L^m(\Omega)}\right)+C_M|\Omega|\end{aligned}。$$

当 M 充分大时，$\|h\|^m<M\|h\|^m_{L^m(\Omega)}$。因此，$\lim\limits_{t\to\infty}I_\lambda(th)=-\infty$。于是，存在足够大的 $\overline{t}>r_k>1$，使得 $I_\lambda(\overline{t}h)\le 0$。

取 $\rho_k=\overline{t}$，则 $b_k:=\max\limits_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}I_\lambda(u)\le 0$。证毕。

定理 1.1 的证明： 首先，由引理 3.1 和引理 3.3 知泛函 I_λ 满足喷泉定理的(i)-(iii)假设；再由 (f_4) 知 I_λ 为偶泛函。因此，应用喷泉定理，推得在 $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ 中临界点序列 $\{u_k\}$ 满足 $I_\lambda(u_k)\to\infty$，$k\to\infty$。证毕。

参考文献

[1] Fukagai, N. and Narukawa, K. (2006) Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Equations with Critical Orlicz-Sobolev Nonlinearity on $\mathbb{R}^N$. *Funkcialaj Ekvacioj*, **49**, 235-267.

[2] Huentutripay, J. and Manasevich, R. (2006) Nonlinear Eigenvalues for a Quasilinear Elliptic System in Orlicz-Sobolev Spaces. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **18**, 901-929. https://doi.org/10.1007/s10884-006-9049-7

[3] Sunjun, W. (2019) Multiple Solutions for Quasilinear Elliptic Problems with Concave-Convex Nonlinearities in Orlicz-Sobolev Spaces. *Boundary Value Problems*, **2019**, Article Number: 142. https://doi.org/10.1186/s13661-019-1256-3

[4] Gang, L., Dumitru, M., Haitao, W. and Qihu, Z. (2018) Multiple Solutions with Constant Sign for a (p,q)-Elliptic System Dirichlet Problem with Product Nonlinear Term. *Boundary Value Problems*, **67**, 1-16.

[5] Chung, N.T. and Toan, H.Q. (2013) On a Nonlinear and Non-Homogeneous Problem without (A-R) Type Condition in Orlicz-Sobolev Spaces. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 7820-7829. https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.02.011

[6] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P.H. (1973) Dual Variational Methods in Critical Points Theory and Application. *Journal of Functional Analysis*, **14**, 349-381. https://doi.org/10.1016/0022-1236(73)90051-7

[7] Adams, R. (1975) Sobolev Spaces. Academic Press, New York.

[8] Carvalho, M.L., Goncalves, V. and Silva, E.D. (2015) On Quasilinear Elliptic Problems without the Ambrosettiı-Rabinowitz Condition. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **426**, 466-483. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.01.023

[9] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1