**Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(10), 1132-1138**
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.910139

Hans汉斯

# A Classification on Cubic Symmetric Graphs of Order $4pq^n$

**Chao Wang**

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 2827700481@qq.com

Received: Nov. 14th, 2019; accepted: Nov. 27th, 2019; published: Dec. 4th, 2019

## Abstract

**Let $\Gamma$ be a connected graph and $G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Then $\Gamma$ is called a *G*-basic graph, if *G* is quasiprimitive or bi-quasiprimitive on $V\Gamma$. In this paper, we determine cubic symmetric *G*-basic graphs of order $4pq^n$, where $p < q$ are odd primes, and $n \ge 1$.**

## Keywords

**Symmetric Graph, Locally Primitive, Quasiprimitive, Bi-Quasiprimitive, Almost Simple**

# $4pq^n$阶3度对称图的分类

**王　超**

云南财经大学统计与数学学院，云南　昆明
Email: 2827700481@qq.com

收稿日期：2019年11月14日；录用日期：2019年11月27日；发布日期：2019年12月4日

## 摘　要

设$\Gamma$是一个连通图，$G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$，如果*G*作用在$V\Gamma$上是拟本原或顶点二部拟本原的，则称$\Gamma$是*G*-基图。在本文中，我们将$4pq^n$阶3度对称*G*-基图，其中$p < q$为奇素数，$n \ge 1$。

## 关键词

对称图，局部本原，拟本原，二部拟本原，几乎单

文章引用: 王超. $4pq^n$阶 3 度对称图的分类[J]. 理论数学, 2019, 9(10): 1132-1138.
DOI: 10.12677/pm.2019.910139

## 1. 引言

本文中所考虑的图都是连通的，无向的，无自环且无重边的。对于一个图$\Gamma$，我们用$V\Gamma$，$A\Gamma$和$\mathrm{Aut}(\Gamma)$分别表示其顶点集，弧集和全自同构群。$|V\Gamma|$表示图$\Gamma$的阶(即$\Gamma$顶点的个数)。如果$\mathrm{Aut}(\Gamma)$的一个子群$G$作用在$V\Gamma$ ($A\Gamma$)是传递的，则称$\Gamma$是 $G$-点传递的($G$-弧传递的)。一个弧传递图也称为对称图。对一个正整数 $s$，$V\Gamma$中$s+1$个点$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$满足$\alpha_{i-1}$与$\alpha_i$ ($1\le i\le s$)邻接且$\alpha_{i-1}\ne\alpha_{i+1}$ ($1\le i\le s-1$)，我们称$(\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$为$\Gamma$的一条$s$-弧。如果$G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$在$s$-弧集上是传递的，则称$\Gamma$是$(G,s)$-弧传递的。进一步，如果$G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$在$s$-弧集上传递，在$s+1$-弧集上不传递，那么$\Gamma$叫作$(G,s)$-传递。

对阶数固定的对称图的研究一直是代数图论领域一个很热门的课题，例如，文献([1] [2] [3])分别分类了阶为$p$，$2p$和$3p$的对称图。对于一些小度数的图也有很多学者研究，更多文献可参考([4]-[9])。1947年，Tutte在文献([10])中给出了3度图的点稳定子结构。此后，3度对称图得到了很多学者的关注，例如：Feng等在文献([4])中刻画了两倍素数幂的3度对称图；Lu等在文献([8])中研究了阶为$6p^2$的3度对称图；Zhou和Feng在([11])中分类了$2pq$阶的3度对称图。

设$G\le\mathrm{Sym}(\Omega)$是一个传递置换群，如果$G$的每个极小正规子群在$\Omega$上都是传递的，则称$G$是拟本原的；如果$G$的每个极小正规子群在$\Omega$上至多有两个轨道且存在一个极小正规子群在$\Omega$上恰好有两个轨道，则称$G$是二部拟本原的。对于一个图$\Gamma$，$G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$，如果$G$在顶点集$V\Gamma$上是拟本原或二部拟本原的，则称$\Gamma$是一个$G$-基图。研究对称图的方法分为以下两步：

第一步，刻画基对称图；

第二步，研究基图的正规覆盖。

上述步骤我们可以看出对基图的刻画是研究对称图的基础，它对作基图的覆盖具有重要的参考作用。设$\Gamma$是阶为$4pq^n$ ($n\ge1$)的3度$G$-弧传递图，本文中我们刻画$\Gamma$的基图，其中$p$，$q$为素数且$3\le p<q$，$G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$。主要结论如下：

**定理1.1** 设$\Gamma$是阶为$4pq^n$ ($n\ge1$)的3度$G$-弧传递图，其中$p$，$q$为素数且$3\le p<q$，设$G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$在$V\Gamma$上是拟本原或二部拟本原的，$\alpha\in V\Gamma$，则$(\Gamma,\mathrm{Aut}(\Gamma),G,s)$满足表1。

**Table 1.** $G$-basic symmetric graphs of order $4pq^n$ and valency 3

**表1.** $4pq^n$阶3度$G$-基对称图

| $\Gamma$ | $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ | $G$ | $s$ |
|---|---|---|---|
| F084 | PSL(2,8) | PSL(2,8) | 2 |
| $\mathcal{G}_{220}^{1}$ | PSL(2,11) | PSL(2,11), | 1 |
| $\mathcal{G}_{364}^{1}$ | PSL(2,13) | PSL(2,13) | 1 |
| $\mathcal{G}_{1012}^{1}$ | PSL(2,23) | PSL(2,23) | 2 |
| F620* | PSL(2,31) | PSL(2,31 | 4 |
| $\mathcal{G}_{4324}^{1}$ | PSL(2,47) | PSL(2,47 | 3 |
| $\mathcal{G}_{220}^{2}$ | PGL(2,11) | PGL(2,11) | 2 |
| $\mathcal{G}_{364}^{2}$ | PGL(2,13) | PGL(2,13) | 2 |

关于本文中所使用的群论和图论的相关符号都是标准的，可参考文献([12] [13] [14])。例如：我们用 $\mathbb{Z}_n$，$\mathrm{A}_n$ 和 $\mathrm{S}_n$ 分别表示 $n$ 阶循环群，交错群和对称群。对于一个单群 $T$，我们用 $\pi(T)$ 表示 $|T|$ 的素因子集合。

## 2. 预备知识

在本节中，我们给出一些与本文相关的定理和例子。首先是 Tutte 在 1947 年确定的 3 度对称图的点稳定子的结构，它是我们研究 3 度图的基础。

**定理 2.1** ([10]) 设 $\Gamma$ 是一个连通的 3 度 $(G,s)$-弧传递图，则 $s \le 5$，则 $(G_\alpha, s)$ 满足表 2，其中 $\alpha \in V\Gamma$。

**Table 2.** Point-stabilizer groups of cubic symmetric groups
**表 2.** 3 度对称图的点稳定子

| $s$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $G_\alpha$ | $\mathbb{Z}_3$ | $\mathrm{S}_3$ | $\mathrm{S}_3 \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathrm{S}_4$ | $\mathrm{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$ |
| $\lvert G_\alpha \rvert$ | 3 | $2 \cdot 3$ | $2^2 \cdot 3$ | $2^3 \cdot 3$ | $2^4 \cdot 3$ |

对于一个图 $\Gamma$，如果点稳定子 $\mathrm{Aut}(\Gamma)_\alpha$ 在 $\alpha$ 的邻域 $\Gamma(\alpha)$ 上是本原的，则称 $\Gamma$ 为局部本原的，由于素数度的弧传递图是局部本原的，因此下面的结论([15]，引理 2.5)提供了研究局部本原图的基本方法，这个结论对 Praeger 的结果([16]，定理 4.1)进行了改进。

**定理 2.2** ([15]) 设 $\Gamma$ 是一个连通的奇素数度的 $G$-弧传递图，$G \le \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 有一个非传递正规子群 $N$ 在 $V\Gamma$ 上至少有三个轨道。则下列事实之一成立：

1) $N$ 在 $V\Gamma$ 上半正则，$G/N \le \mathrm{Aut}(\Gamma_N)$，$\Gamma_N$ 是 $G/N$-弧传递的且 $\Gamma$ 是 $\Gamma_N$ 的正规 $N$-覆盖；

2) $\Gamma$ 是 $(G,s)$-弧传递的当且仅当 $(G/N, s)$-弧传递的，其中 $1 \le s \le 5$ 或 $s = 7$；

3) $G_\alpha \cong (G/N)_\delta$，其中 $\alpha \in V\Gamma$，$\delta \in V\Gamma_N$。

在文献([16])中，Praeger 将拟本原置换群分为八类，我们将其称为 O'Nan-Scott-praeger 定理。下面我们简述 O'Nan-Scott-praeger 定理。

**定理 2.3** ([16])拟本原置换群可以分为以下八类：

HA (仿射型)：$\mathrm{soc}(X)$ 是交换的，$|\Omega| = p^k$，其中 $p$ 是素数，$k \ge 1$。

HS (全形单型)：$\mathrm{soc}(X) = M \times N$，其中 $N \cong M \cong T$。

HC (复合全型)：$\mathrm{soc}(X) = M \times N$，其中 $N \cong M \cong T^k$。

AS (几乎单型)：$\mathrm{soc}(X) = T$ 是非交换单群，$T \lhd X \le \mathrm{Aut}(T) \le T.\mathrm{Out}(T)$。

TW (扭圈积型)：$\mathrm{soc}(X) = T^d$ 在 $\Omega$ 上正则，$|\Omega| = |T|^k$，其中 $d \ge 2$。

SD (单对角型)：$\mathrm{soc}(X) = T^k$，$\mathrm{soc}(X)_\alpha = T$，$|\Omega| = |T|^{k-1}$，其中 $d \ge 2$，$\alpha \in \Omega$。

CD (复合对角型)：$\mathrm{soc}(X) = T^k$，$\mathrm{soc}(X)_\alpha = T^l$，$|\Omega| = |T|^{k-l}$，其中 $k \ge 2$，$l \mid k$，$\alpha \in \Omega$。

PA (乘积作用型)：$\mathrm{soc}(X) = T^r$，$\mathrm{soc}(X)_\alpha \ne 1$，其中 $1 \le r \le k$，$\alpha \in \Omega$。

对于以下较小的群 $G$，我们可以利用 Magma ([17])确定所有同构意义下的弧传递图，并且得到下面的几个例子。

例 2.4 (1) $G = \mathrm{PSL}(2,11)$，则 $G$ 存在子群同构于 $\mathbb{Z}_3$，此时存在一个阶为 220 阶的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{220}^1$。$\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathrm{PSL}(2,11)$。

(2) $G = \mathrm{PSL}(2,11)$，则 $G$ 存在子群同构于 $\mathrm{S}_3$，此时存在一个阶为 220 阶的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{220}^2$。$\mathrm{Aut}(\Gamma) \cong \mathrm{PSL}(2,11)$。

例 2.5 (1) $G = \mathrm{PSL}(2,13)$，则 $G$ 存在子群同构于 $\mathbb{Z}_3$，此时存在一个阶为 364 阶的 3 度对称图，记为

$\mathcal{G}_{364}^{1}$。 $\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong \mathrm{PSL}(2,13)$。

(2) $G=\mathrm{PSL}(2,13)$，则 $G$ 存在子群同构于 $\mathrm{S}_3$，此时存在一个阶为 364 阶的 3 度对称图，记为$\mathcal{G}_{364}^{2}$。$\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong \mathrm{PSL}(2,13)$。

例 2.6 $G=\mathrm{PSL}(2,23)$，则 $G$ 存在子群同构于 $\mathrm{S}_3$，此时存在一个阶为 1012 阶的 3 度对称图，记为$\mathcal{G}_{1012}^{1}$。$\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong \mathrm{PSL}(2,23)$。

例 2.7 $G=\mathrm{PSL}(2,47)$，则 $G$ 存在子群同构于 $\mathrm{S}_4\times\mathbb{Z}_2$，此时存在一个阶为 4324 阶的 3 度对称图，记为$\mathcal{G}_{4324}^{1}$。 $\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong \mathrm{PSL}(2,47)$。

## 3. 定理 1.1 的证明

本节中，我们分以下三个引理来完成定理 1.1 的证明。

**引理 3.1** 设 $T$ 是一个非交换单群，$|T|\,\big|\,2^6\cdot 3\cdot r\cdot s^l$，且 $3rs^l\,\big|\,|T|$，其中 $3\le r<s$ 为素数。则 $T\cong \mathrm{A}_6$，$\mathrm{PSL}(2,8)$，$\mathrm{PSL}(2,11)$，$\mathrm{PSL}(2,13)$，$\mathrm{PSL}(2,16)$，$\mathrm{PSL}(2,17)$，$\mathrm{PSL}(2,23)$，$\mathrm{PSL}(2,31)$，$\mathrm{PSL}(2,32)$，$\mathrm{PSL}(2,47)$，或 $\mathrm{PSL}(2,193)$。

证明：由于有限 $p$-群和 $m^a n^b$ ($m$，$n$ 为素数，$a$，$b$ 为正整数)阶群都可解，而可解单群必为素数阶循环群，所以$|\pi(T)|\ne 1$或 2，因此$|\pi(T)|=3$或 4。如果$|\pi(T)|=3$，由文献([12]，定理 1)，$T$ 同构于([12]，表 1)中的八个群之一，又因为$3rs^l\,\big|\,|T|$通过检查群的阶，满足条件的群只有 $\mathrm{A}_6$，$\mathrm{PSL}(2,8)$，或 $\mathrm{PSL}(2,17)$。

假设$|\pi(T)|=4$。则 $5\le r<s$ 且 $|T|\,\big|\,2^6\cdot 3\cdot r\cdot s^l$。由此可知

$$2^7\nmid |T|,\ 3^2\nmid |T|,\ r^2\nmid |T|。\tag{1}$$

由文献([12]，定理 1)，$T$ 同构于([12]，表 3)中的某个群或 $\mathrm{PSL}(2,q)$，其中 $q$ 是一个素数幂。对于前一种情况，由于 $3rs^l\,\big|\,|T|$，由([12]，表 3)查得不存在满足条件的群。

如果 $T\cong \mathrm{PSL}(2,q)$，则有 $|T|=\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)\,\big|\,2^6\cdot 3\cdot r\cdot s^l$ 且 $|\pi(q^2-1)|=3$，因此 $q=t^e$，其中 $e\ge 1$ 且 $t\in\{2,3,5,s\}$。如果 $t\in\{2,3,5\}$，由式子(1)和 $|\pi(q^2-1)|=3$ 可知，$q=2^4$ 或 $2^5$，即 $T\cong \mathrm{PSL}(2,16)$，或 $\mathrm{PSL}(2,32)$，如果 $t=s$，此时有

$$\frac{1}{2}(q-1)(q+1)\,\big|\,2^6\cdot 3\cdot r，$$

即

$$\frac{q-1}{2}\cdot\frac{q+1}{2}\,\big|\,2^5\cdot 3\cdot r。$$

我们注意到$\left(\frac{q-1}{2},\frac{q+1}{2}\right)=1$，于是$\frac{q-1}{2}\,\big|\,2^5\cdot 3$或$\frac{q+1}{2}\,\big|\,2^5\cdot 3$，因此 $q$ = 11，13，23，31，47，49，97 或 193。通过检查群的阶可得，$T\cong \mathrm{PSL}(2,11)$，$\mathrm{PSL}(2,13)$，$\mathrm{PSL}(2,23)$，$\mathrm{PSL}(2,31)$，$\mathrm{PSL}(2,47)$或 $\mathrm{PSL}(2,193)$。

之后，我们总假设 $\Gamma$ 是一个阶为 $4pq^n$ ($3\le p<q,n\ge 1$)的连通 $G$-弧传递 3 度图，且 $G$ 在 $V\Gamma$ 上是拟本原或二部拟本原的，其中 $G\le \mathrm{Aut}(\Gamma)$。令 $\alpha\in V\Gamma$。

**引理 3.2** 假设 $G$ 在 $V\Gamma$ 上是拟本原的，则 $\Gamma\cong$ F084，$\mathcal{G}_{220}^{1}$，$\mathcal{G}_{364}^{1}$，$\mathcal{G}_{1012}^{1}$，$\mathcal{G}_{620}^{1}$ 或 $\mathcal{G}_{4324}^{1}$。

证明：设 $N$ 是 $G$ 的一个极小正规子群。则 $N$ 为同构单群的直积，即 $N=T^d=T_1\times T_2\times\cdots\times T_d$，其中 $T_i\cong T$ ($i=1,\cdots,d$)是一个单群。因为 $G$ 在 $V\Gamma$ 上拟本原，所以 $N$ 在 $V\Gamma$ 上是传递的。如果 $N$ 是交换的，则 $N$ 在 $V\Gamma$ 上半正则，于是 $|T|^d=|N|\,\big|\,4pq^n$，这是不可能的，故 $N$ 是非交换的。首先我们断言 $d=1$。事实上，由 $\Gamma$ 的

连通性及$1\neq N_\alpha \lhd G_\alpha$，我们可知$\Gamma$是$N$-弧传递的。此时，如果$T_1$在$V\Gamma$上传递，由([14]，定理4.2A)可知$T_1$的中心化子$C_N(T_1)$（即$T_2$)是半正则的，与$|T_2|\nmid 4pq^n$矛盾。如果$T_1$在$V\Gamma$上至少有三个轨道，则由定理2.2可知$T_1$是半正则的，同样是一个矛盾。从而$T_1$在$V\Gamma$上恰好有两个轨道$U$和$W$。又因为$T_1 \lhd N$，因此$U$和$W$构成$V\Gamma$上一个$N$-不变划分，这就意味着集合稳定子$N_U$在$N$中的指数为2，而$N=T^d$中没有指数为2子群，矛盾。于是$N=T$。

因此$\Gamma$是$T$-弧传递的，故$T_\alpha$满足定理2.1。于是由$T$的传递性可以得到，$|V\Gamma|\cdot|T_\alpha|=|T|\,|2^6\cdot 3\cdot p\cdot q^n$。又因为$\Gamma$是$T$-弧传递的，故$3\,\|\,|T_\alpha|$，从而$3pq^n\,\|\,|T|$，即$T$满足引理3.1。

假设$|\pi(T)|=3$，则$T$和$(p,q^n)$如表3所示。

**Table 3.** Nonabelian groups with 3 prime factors and $(p,q^n)$

**表3.** 含有3个素因子的单群及对应$(p,q^n)$取值

| $T$ | $A_6$ | PSL(2,8) | PSL(2,17) |
|---|---|---|---|
| $(p,q^n)$ | (3,5) | (3,7) | (3,17) |

如果$T\cong A_6$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=6$，即$T_\alpha\cong S_3$。由Magma ([17])计算可得，满足条件的图$\Gamma$不存在。如果$T\cong \mathrm{PSL}(2,8)$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=6$，即$T_\alpha\cong S_3$。由文献([18])可知$\Gamma\cong$ F084，如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,17)$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=12$，即$T_\alpha\cong S_3\times\mathbb{Z}_2$。但是$\mathrm{PSL}(2,17)$中没有子群同构于$S_3\times\mathbb{Z}_2$，这是不可能的。

假设$|\pi(T)|=4$，则$T$和$(p,q^n)$如表4所示。

**Table 4.** Nonabelian groups with 4 prime factors and $(p,q^n)$

**表4.** 含有4个素因子的单群及对应$(p,q^n)$取值

| $T$ | PSL(2,11) | PSL(2,13) | PSL(2,16) | PSL(2,23) |
|---|---|---|---|---|
| $(p,q^n)$ | (5,11) | (7,13) | (5,17) | (11,23) |
| $T$ | PSL(2,31) | PSL(2,32) | PSL(2,47) | PSL(2,193) |
| $(p,q^n)$ | (5,31) | (11,31) | (23,47) | (97,193) |

如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,11)$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=3$，即$T_\alpha\cong\mathbb{Z}_3$，由例2.4可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{220}^1$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,13)$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=3$，即$T_\alpha\cong\mathbb{Z}_3$。由例2.5可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{364}^1$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,2^4)$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=12$，即$T_\alpha\cong S_3\times\mathbb{Z}_2$，但$\mathrm{PSL}(2,2^4)$中没有同构于$S_3\times\mathbb{Z}_2$的12阶子群。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,23)$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=6$，即$T_\alpha\cong S_3$，由例2.6可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{1012}^1$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,31)$，则$|T_\alpha|=|T|/|V\Gamma|=24$，即$T_\alpha\cong S_4$，由文献([18])可知$\Gamma\cong$ F620$^*$。同样地，由例2.7可以得到$\Gamma\cong\mathcal{G}_{4324}^1$，此时$T\cong\mathrm{PSL}(2,47)$，$T_\alpha\cong S_3\times\mathbb{Z}_2$。而对于$T\cong\mathrm{PSL}(2,2^5)$和$T\cong\mathrm{PSL}(2,193)$，有$T_\alpha\cong S_4$和$S_4\times\mathbb{Z}_2$，但是对应的$T$都没有子群同构于$S_4$和$S_4\times\mathbb{Z}_2$。

**引理3.3** $G$在$V\Gamma$上是二部拟本原的，则$\Gamma\cong\mathcal{G}_{220}^2$，或$\mathcal{G}_{364}^2$。

证明：因为$G$在$V\Gamma$上二部拟本原，所以$G$存在极小正规子群$N=T^d$在$V\Gamma$上恰好有两个轨道$\Delta_1$和$\Delta_2$，那么$\Gamma$就是一个二部图。令$G^+=G_{\Delta_1}=G_{\Delta_2}$，则有$N\le G^+$，$|G:G^+|=2$且$G_\alpha=G_\alpha^+$。假设$G^+$作用在$\Delta_1$上是不忠实的，由([19]，引理5.2)，是一个完全二部图，又因为$\Gamma$为3度图，则$\Gamma\cong K_{3,3}$，即$|V\Gamma|=6$，与$|V\Gamma|=4pq^n$矛盾。从而$G^+$作用在$\Delta_i$（$i=1,2$)上忠实，由([20]，定理1.5)可知，下述之一成立：

1) $G^+$ 在 $\Delta_i$ 上是拟本原的；或

2) $G^+$ 中存在两个正规子群 $M_1$ 和 $M_2$，使得 $M_1 \cong M_2$ 且在 $V\Gamma$ 上半正则。进一步地，有群 $M = M_1 \times M_2$ 在 $\Delta_i$ 上是正则的。

对于(2)，我们可以得到 $|M| = |M_1|^2 = 2pq^n$，这是不可能的。

故(1)成立，因为 $|\Delta_i| = 2pq^n$，由定理 2.3 可知，$G^+$ 是几乎单或乘积作用型。设 $N = \mathrm{soc}(G^+) = T^d$ 是 $G^+$ 的基柱。其中 $T$ 是非交换单群且 $d \ge 1$。

假设 $G^+$ 是几乎单的，因此 $\mathrm{soc}(G^+) = T$。进一步地，如果 $T$ 不是 $G$ 唯一的极小正规子群，由于 $G = G^+.\mathbb{Z}_2$，我们很容易可以得到 $G = G^+ \times \mathbb{Z}_2$，也就是说 $G$ 有正规子群 $\mathbb{Z}_2$ 在 $V\Gamma$ 上有 $2pq^n$ 个轨道，与 $G$ 的二部拟本原性矛盾。从而 $G$ 是几乎单的，设 $\mathrm{soc}(G) = T$。因此我们可以令 $G = T.o$，$G^+ = T.o'$，其中 $\mathbb{Z}_2 \le o \le \mathrm{Out}(T)$ 且 $|o : o'| = 2$。

因为 $T_\alpha \trianglelefteq G_\alpha$，由定理 2.1 可知 $|T_\alpha| \,\big|\, 2^4 \cdot 3$，因此 $|\Delta_i| \cdot |T_\alpha| = |T| \,\big|\, 2^5 \cdot 3 \cdot p \cdot q^n$。另一方面，由于 $T_\alpha \ne 1$，我们可以得到 $3 \,\big|\, |T_\alpha|$，从而 $3pq^n \,\big|\, |T|$，故 $T$ 满足引理 3.1 且 $|\pi(T)| = 3$ 或 4。

当 $|\pi(T)| = 3$ 时，则 $T$ 和 $(p, q^n)$ 满足表 3。如果 $T \cong A_6$，则 $|T_\alpha| = |T|/|\Delta_i| = 12$。因为 $\mathrm{Out}(A_6) = \mathbb{Z}_2^2$，所以 $o = \mathbb{Z}_2$，$o' = 1$ 或 $o = \mathbb{Z}_2^2$，$o' = \mathbb{Z}_2$。故 $|G_\alpha| = |G_\alpha^+| = |T_\alpha| \cdot |o'| = 12$ 或 $24$，$G \cong S_6$ 或 $\mathrm{Aut}(A_6)$。由 Magma ([17])，这两种情况下都没有图 $\Gamma$ 存在。如果 $T \cong \mathrm{PSL}(2,8)$，因为 $\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,8)) = \mathbb{Z}_3$ 没有指数为 2 的子群，与 $|o : o'| = 2$ 矛盾。如果 $T \cong \mathrm{PSL}(2,17)$，因为 $\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,17)) = \mathbb{Z}_2$，$|T_\alpha| = |T|/|\Delta_i| = 24$，所以 $|G_\alpha| = |G_\alpha^+| = |T_\alpha| \cdot |o'| = 24$，$G \cong \mathrm{PSL}(2,17).\mathbb{Z}_2 = \mathrm{PGL}(2,17)$，由 Magma ([17])，不存在满足条件的图 $\Gamma$。

当 $|\pi(T)| = 4$ 时，$(T, p, q^n)$ 满足表 4。如果 $T \cong \mathrm{PSL}(2,193)$，则 $|T_\alpha| = |T|/|\Delta_i| = 96$，从而 $|G_\alpha| = |G_\alpha^+| = |T_\alpha| \cdot |o'| > 2^4 \cdot 3$。这与定理 2.1 矛盾。如果 $T \cong \mathrm{PSL}(2,32)$，则 $\mathrm{Out}(T) = \mathbb{Z}_5$，因为 $|o : o'| = 2$，矛盾。如果 $T \cong \mathrm{PSL}(2,2^4)$，则 $|T_\alpha| = |T|/|\Delta_i| = 24$。因为 $\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,2^4)) = \mathbb{Z}_2^2$，故 $G \cong \mathrm{PGL}(2,16)$ 或 $\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,16))$，且对应的 $G_\alpha$ 分别为 $S_4$ 或 $S_4 \times \mathbb{Z}_2$，由 Magma ([17])可知 $\mathrm{PGL}(2,2^4)$ 中没有 24 阶子群，$\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,2^4))$ 中没有同构于 $S_4 \times \mathbb{Z}_2$ 的 48 阶子群，矛盾。如果 $T \cong \mathrm{PSL}(2,31)$，则 $|T_\alpha| = 48$。又因为 $\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,31)) = \mathbb{Z}_2$，所以 $G \cong \mathrm{PGL}(2,31)$ 且 $|G_\alpha| = 48$。与 $\mathrm{PGL}(2,31)$ 中没有 48 阶子群矛盾。若 $T \cong \mathrm{PSL}(2,23)$ 或 $\mathrm{PSL}(2,47)$ 时，由 Magma ([17])，不存在这样的 3 度对称图。若 $T \cong \mathrm{PSL}(2,11)$ 或 $\mathrm{PSL}(2,13)$，由例 2.4 和 2.5 可知，$\Gamma \cong \mathcal{G}_{220}^2$ 或 $\mathcal{G}_{364}^2$。

假设 $G^+$ 是乘积作用型的，则 $N = T^d = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_d \ (d \ge 2)$，其中 $T_i \cong T \ (i = 1, \cdots, d)$ 是一个单群。如果 $T_1$ 在 $\Delta_1$ 上是传递的，由([14]，定理 4.2A)可知 $T_2$ 是半正则的，故 $|T_2| \,\big|\, 2pq^n$，矛盾。从而 $T_1$ 在 $\Delta_1$ 和 $\Delta_2$ 上都不传递，由([8]，引理 3.2)可知 $T_1$ 是半正则的，同样可以推出矛盾。

## 基金项目

国家自然科学基金资助项目(80031010061)资助。

## 参考文献

[1] Chao, C.Y. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. https://doi.org/10.2307/1995785

[2] Cheng, Y. and Oxley, J. (1987) On Weakly Symmetric Graphs of Order Twice a Prime. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **42**, 196-211. https://doi.org/10.1016/0095-8956(87)90040-2

[3] Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) A Classification of Symmetric Graphs of Order 3*p*. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **58**, 197-216. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1037

[4] Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2006) Cubic Symmetric Graphs of Order Twice an Odd Prime Power. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **81**, 153-164. https://doi.org/10.1017/S1446788700015792

[5] Feng, Y.Q. and Kwak, J.H. (2007) Cubic Symmetric Graphs of Order a Small Number Times a Prime or a Prime

Square. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **97**, 627-646. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2006.11.001

[6] Feng, Y.Q., Zhou, J.X. and Li, Y.T. (2016) Pentavalent Symmetric Graphs of Order Twice a Prime Power. *Discrete Mathematics*, **339**, 2640-2651. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.05.008

[7] Hua, X.H., Chen, L. and Xiang, X. (2018) Valency Seven Symmetric Graphs of Order 2pq. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **68**, 581-599. https://doi.org/10.21136/CMJ.2018.0530-15

[8] Lu, Z.P., Wang, C.Q. and Xu, M.Y. (2004) On Semisymmetric Cubic Graphs of Order $6p^2$. *Science in China Series A Mathematics*, **47**, 1-17.

[9] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) Tetravalent s-Transitive Graphs of Order Twice a Prime Power. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **88**, 277-288. https://doi.org/10.1017/S1446788710000066

[10] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. https://doi.org/10.1017/S0305004100023720

[11] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) Cubic Vertex-Transitive Graphs of Order $2pq$. *Journal of Graph Theory*, **65**, 285-302. https://doi.org/10.1002/jgt.20481

[12] Huppert, B. and Lempken, W. (2000) Simple Groups of Order Divisible by at Most Four Primes. *Francisk Skorina Gomel State University*, **16**, 64-75.

[13] 徐明耀. 有限群导引(上, 下)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[14] Dixon, J. and Mortimer, D.B. (1997) Permutation Groups. Spring-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[15] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[16] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[17] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[18] Conder, M. and Dobcsabyi, P. (2002) Trivalent Symmetric Graphs on up to 768 Vertices. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **40**, 41-63.

[19] Giudici, M., Li, C.H. and Praeger, C.E. (2003) Analysing Finite Locally s-Arc-Transitive Graphs. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 291-317. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03361-0

[20] Li, C.H., Praeger, C.E., Venkatesh, A. and Zhou, S.M. (2002) Finite Locally-Quasiprimitive Graphs. *Discrete Mathematics*, **246**, 197-218. https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00258-8