Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 111-118
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91014

Using the Extend (G'/G) Expansion Method to Obtain the Exact Solution of the (3 + 1)-Dimensional Potential YTSF Equation

Houxu Mo, Yanfeng Guo, Pingli Zhu, Ganjie Liao

College of Science, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou Guangxi
Email: 1051740009@qq.com

Received: Jan. 4th, 2019; accepted: Jan. 22nd, 2019; published: Jan. 29th, 2019

Abstract

Using the extend (G'/G)-expansion method and the new auxiliary equations, the new exact solutions of (3 + 1)-dimensional potential Yu-Toda-Sasa-Fukuyama (YTSF) equation are obtained on the basis of the homogeneous balance method. And some forms of exact solutions of (3 + 1)-dimensional potential (YTSF) equation are given. Furthermore, the corresponding figures are given.

Keywords

(G'/G)-Expansion Methods, YTSF Equation, Exact Solution

利用扩展的(G'/G)展开法求(3 + 1)维YSFY势方程的精确解

莫厚旭，郭艳凤，朱萍丽，廖干杰

广西科技大学，理学院，广西 柳州
Email: 1051740009@qq.com

收稿日期：2019年1月4日；录用日期：2019年1月22日；发布日期：2019年1月29日

摘 要

利用扩展的(G'/G)展开法和新的辅助方程，通过借助齐次平衡法确定相关次幂，求解(3 + 1)维Yu-Toda-Sasa-Fukuyama (YTSF)势方程的新精确解，得到了(3 + 1)维YTSF势方程的一些新的精确解的

文章引用: 莫厚旭, 郭艳凤, 朱萍丽, 廖干杰. 利用扩展的(G'/G)展开法求(3 + 1)维 YSFY 势方程的精确解[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 111-118. DOI: 10.12677/pm.2019.91014

形式，并给出解的相应图形。

关键词

扩展的(G'/G)展开法，YTSF势方程，精确解

1. 前言

随着社会的进步，科技的发展，非线性偏微分方程在物理、数学等学科上的应用越来越广泛，因此也引起了许多数学家的关注。近年来，在许多学者的努力下，提出了许多求解非线性偏微分方程的精确解的方法，例如：Fourier 变换[1]，三波法[2] [3] [4]，可变分离法[5]等方法来求解某类非线性偏微分方程的精确解。

本文主要考虑(3 + 1)维 Yu-Toda-Sasa-Fukuyama (YTSF)势方程的新精确解。此方程为

$$-4u_{xt}+u_{xxxz}+4u_xu_{xz}+2u_{xx}u_z+3u_{yy}=0. \tag{1}$$

在 1998 年，Song-Ju Yu 等人[6]将 Bogoyavlenskii-Schiff 方程[7]

$$v_t+\phi(v)v_z=0,\phi(v)=\partial_x^2+4v+2v_x\partial_x^{-1},$$

拓展为一个新的(3 + 1)维非线性演化方程

$$(-4v_t+\phi(v)v_z)+3v_{yy}=0,\phi(v)=\partial_x^2+4v+2v_x\partial_x^{-1},$$

于是它被称为(3 + 1)维的 Yu-Toda-Sasa-Fukuyama (YTSF)势方程，他们随后给出了该方程的行波解。为了方便研究，利用变换 $v=u_x$ 把此方程化为它的潜在形式，也就是本文将要考虑的(3 + 1)维 Yu-Toda-Sasa-Fukuyama (YTSF)势方程。

通过扩展的同宿测试法[8] [9]，可以获得(3 + 1)维 Yu-Toda-Sasa-Fukuyama (YTSF)势方程[10]的精确纽结呼吸波解，利用 auto-Backland [11]变换和广义投影的 Riccati [12]方程方法可以得到关于(3 + 1)维 YTSF 势方程的一些类孤立波子解和非行波解。本文将利用扩展的(G'/G)展开法[13]和新的辅助方程[13]

$$AGG''-BGG'-C(G')^2-EG^2=0, \tag{2}$$

来求解 YTSF 势方程的一些新精确解的形式。

2. 扩展的(G'/G)展开法的概述

1) 对于一般的非线性偏微分方程

$$L(w,w_t,w_x,w_{tt},w_{xt},w_{xx},\cdots)=0, \tag{3}$$

其中 L 是 u 及关于 x,y,z,t 的各阶导数的多项式。然后对(3)进行行波变换

$$w(\zeta)=w(x,y,z,t),\zeta=ax+by+cz+d_1t, \tag{4}$$

a,b,c,d_1 为待定常数，将(4)代入(3)中，(3)就可化为

$$Q\left(w',w'',w''',w^{(4)},\cdots\right)=0. \tag{5}$$

其中 $w'=\dfrac{dw}{d\xi},u''=\dfrac{d^2w}{d\xi^2},L$

2) 设方程(5)的拟解为

$$w(\xi)=\sum_{g=-m}^{m}e_g\left(d+H\right)^g+\sum_{g=1}^{m}f_g\left(d+H\right)^g. \tag{6}$$

其中 $H(\xi)=\left(\dfrac{G'}{G}\right)$，$e_g,f_g$ 中为待定常数，g 可取 $0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m$，m 可通过齐次平衡法求出来，并且 $G(\xi)$ 满足以下非线性常微分方程

$$AGG''-BGG'-C\left(G'\right)^2-EG^2=0, \tag{7}$$

其中 A,B,C,E 为待定常数。

3) 将方程(6)和方程(7)代入方程(5)中，并将 $(d+H)$ 中相同的指数幂的系数合并，令各次幂的系数为零，得到一个关于 $e_g,d,f_g\left(g=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm m\right)$，$a,b,c,d_1$，$A,B,C,E$ 的代数方程组。

4) 利用 maple 软件求解代数方程组，确定待定常数之间的关系。

5) 通过文献[13]，得到 5 组关于 $H(\xi)$ 的表达式

a) 当 $B\neq0,\phi=A-C$ 且 $\Omega=B^2+4E\phi>0$ 时，

$$H(\zeta)=\left(\frac{G'}{G}\right)=\frac{B}{2\phi}+\frac{\sqrt{\Omega}}{2\phi}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\phi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\phi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\phi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\phi}\zeta\right)} \tag{8}$$

b) 当 $B\neq0,\phi=A-C$ 且 $\Omega=B^2+4E\phi<0$ 时，

$$H(\zeta)=\left(\frac{G'}{G}\right)=\frac{B}{2\phi}+\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\phi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\phi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\phi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\phi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\phi}\zeta\right)} \tag{9}$$

c) 当 $B\neq0,\phi=A-C$ 且 $\Omega=B^2+4E\phi=0$ 时，

$$H(\zeta)=\left(\frac{G'}{G}\right)=\frac{B}{2\phi}+\frac{C_2}{C_1+C_2\zeta} \tag{10}$$

d) 当 $B=0,\phi=A-C$ 且 $\Delta=\phi E>0$ 时，

$$H(\zeta)=\left(\frac{G'}{G}\right)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\phi}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\phi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\phi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\phi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\phi}\zeta\right)} \tag{11}$$

e) 当 $B=0,\phi=A-C$，$\Delta=\phi E<0$ 时，

$$H(\zeta)=\left(\frac{G'}{G}\right)=\frac{\sqrt{\Delta}}{\phi}\frac{-C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\phi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\phi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\phi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\phi}\zeta\right)} \tag{12}$$

3. Yu-Toda-Sasa-Fukuyama 势方程的新精确解

对方程(1)引入变换(4) $w(\zeta)=w(x,y,z,t),\zeta=ax+by+cz+d_1t$，可将(1)化为方程

$$-4ad_1w''+a^3cw^{(4)}+6a^2cw'w''+3b^2=0. \tag{13}$$

对方程(13)两边进行一次积分得

$$\left(-4ad_1+3b^2\right)w'+a^3cw'''+3a^2c\left(w'\right)^2+k=0. \tag{14}$$

其中 k 为待定常数，由(6)可知 w 关于 $(d+H)$ 的最高次幂为 m，w' 关于 $(d+H)$ 的最高次幂为 $m+1$，w''' 关于 $(d+H)$ 的最高次幂为 $m+3$，由齐次平衡法得,最高阶导数线性项 w''' 和非线性项 $(w')^2$ 进行平衡，则 $m+3=2m+2$，解得 $m=1$。则(6)的表达式为

$$W(\zeta)=e_0+\left(e_{-1}+f_1\right)(d+H)^{-1}+e_1(d+H) \tag{15}$$

将(15)代入(14)，得到 3 组解符合我们(3 + 1)维方程的系数关系

第一组：

$$a=a,b=b,c=c,d=d,k=0,d_1=\frac{1}{4}\frac{a^3c\Omega+3A^2b^2}{aA^2},e_{-1}=-\frac{2ad^2\varphi+f_1A-2aE}{A},e_1=0,f_1=f_1.$$

第二组：

$$a=a,b=b,c=c,d=-\frac{1}{2}\frac{B}{\phi},k=0,d_1=\frac{1}{4}\frac{4a^3c\Omega+3A^2b^2}{aA^2},e_{-1}=-\frac{1}{2}\frac{2Af_1\varphi-a\Omega}{A\varphi},e_1=\frac{2a\varphi}{A},f_1=f_1.$$

第三组：

$$a=a,b=b,c=c,d=d,k=0,d_1=\frac{1}{4}\frac{a^3c\Omega+3A^2b^2}{aA^2},e_{-1}=-f_1,e_1=\frac{2a\varphi}{A},f_1=f_1.$$

当第一、二、三组解满足 $H(\zeta)$ 的条件时，$w(\zeta)$ 的表达式为

$$w_{11}(\zeta)=e_0+\left(e_{-1}+f_1\right)\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1},$$

$$w_{12}(\zeta)=e_0+\left(e_{-1}+f_1\right)\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1},$$

$$w_{13}(\zeta)=e_0+\left(e_{-1}+f_1\right)\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{C_2}{C_1+C_2\zeta}\right)^{-1},$$

$$w_{14}(\zeta)=e_0+\left(e_{-1}+f_1\right)\left(d+\frac{\sqrt{\Delta}}{M}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1},$$

$$w_{15}(\zeta)=e_0+(e_{-1}+f_1)\left(d+\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1}.$$

$$w_{21}(\zeta)=e_0+(e_{-1}+f_1)\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1}$$
$$+e_1\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right),$$

$$w_{22}(\zeta)=e_0+(e_{-1}+f_1)\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1}$$
$$+e_1\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right),$$

$$w_{23}(\zeta)=e_0+(e_{-1}+f_1)\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{C_2}{C_1+C_2\zeta}\right)^{-1}+e_1\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{C_2}{C_1+C_2\zeta}\right),$$

$$w_{24}(\zeta)=e_0+(e_{-1}+f_1)\left(d+\frac{\sqrt{\Delta}}{M}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1}$$
$$+e_1\left(d+\frac{\sqrt{\Delta}}{M}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right),$$

$$w_{25}(\zeta)=e_0+(e_{-1}+f_1)\left(d+\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right)^{-1}$$
$$+e_1\left(d+\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right).$$

$$w_{31}(\zeta)=e_0+e_1\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right),$$

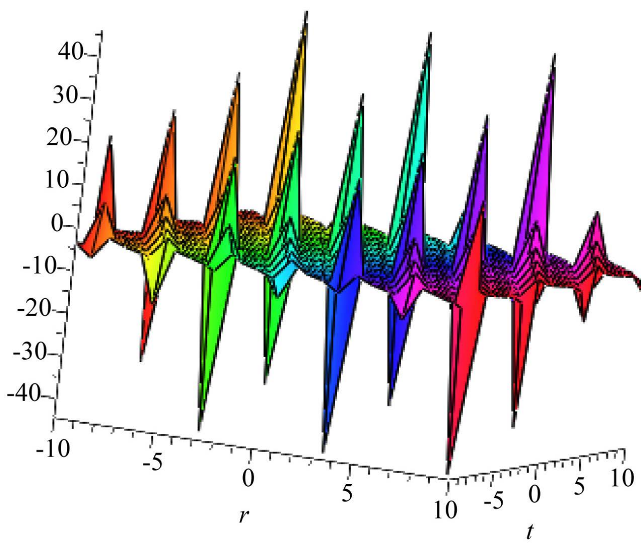
$$w_{32}(\zeta)=e_0+e_1\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Omega}}{2\varphi}\zeta\right)}\right),$$

$$w_{33}(\zeta)=e_0+e_1\left(d+\frac{B}{2\varphi}+\frac{C_2}{C_1+C_2\zeta}\right),$$

$$w_{34}(\zeta)=e_0+e_1\left(d+\frac{\sqrt{\Delta}}{M}\frac{C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right),$$

$$w_{35}(\zeta)=e_0+e_1\left(d+\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\frac{-C_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}{C_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)+C_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{\varphi}\zeta\right)}\right).$$

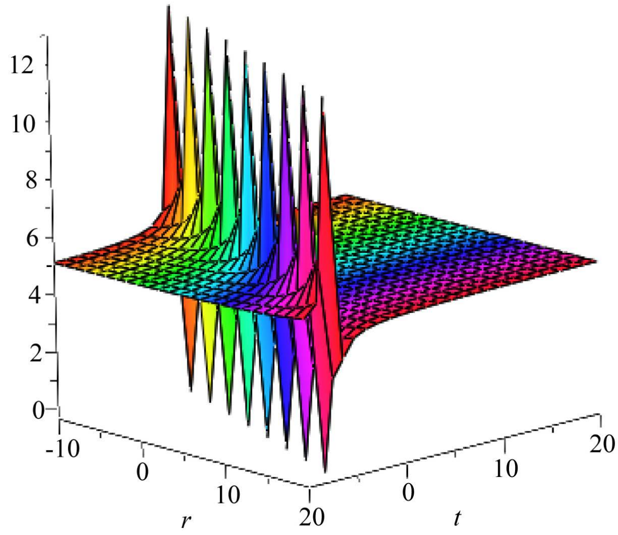
令 $r=\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z$ （$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为不为零的常数)，利用 maple 软件画出部分解的图像，如下：(图 1~图 3)



$w_{12}(\zeta): a=C=C_1=d=1, b=4, c=16, d_1=8, C_2=A=B=2, E=f_1=-2,$
$e_{-1}=-3, e_1=0, e_0=-1.$

Figure 1. Triangle function solution $w_{12}(\zeta)$ schematic diagram

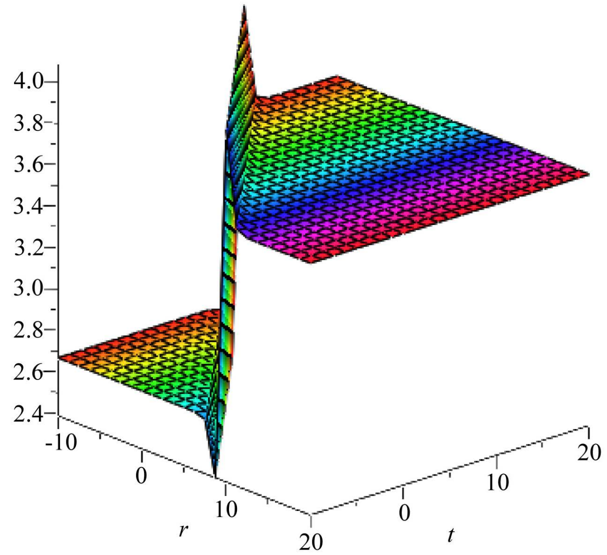
图 1. 三角函数求解示意图



$w_{33}(\zeta): a = A = E = C_1 = e_0 = 1, b = c = B = C_2 = 2, d = 0, d_1 = 3, e_1 = -4.$

Figure 2. Rational partition solution $w_{33}(\zeta)$ schematic diagram

图 2. 合理分区解示意图



$w_{24}(\zeta): a = b = c = f_1 = C_1 = d_1 = e_0 = 1, d = 2, A = 4, C_2 = C = 2, B = 0,$
$E = \frac{1}{2}, e_1 = 1, e_{-1} = -\frac{3}{4}.$

Figure 3. Hyperbolic function solution $w_{24}(\zeta)$ schematic diagram

图 3. 双曲函数求解示意图

4. 结论

本文通过引用文献[13]中扩展的(G'/G)方法求解(3 + 1)维 YTSF 势方程的精确解，此方法是把原来(G'/G)正次幂的形式扩展成$(d+G'/G)$展正负次幂的形式，在此基础上引入新的辅助常微分方程(2)的解的不同形式。通过 maple 软件确定表达式中待定参数之间的关系，即当方程(2)系数 A, B, C, E 满足(8)~(12)的关系时，得到了非线性偏微分方程的(3 + 1)维 YTSF 势方程的新的负幂次形式的精确解，包括双曲函数

解、有理分式解和三角函数解的形式，并且此方法还可以用于求解其它非线性偏微分方程。三角函数具有周期性，三角函数解的图像如图 1；有理分式的图像如图 2 所示，由图可以看出此图为中心对称图形；双曲函数是一种类似于三角函数的函数，具有三角函数的一些性质，双曲函数解的图像如图 3，是中心对称图像。同时也希望能为大家拓宽解决此类问题的方法。

参考文献

[1] 王元明. 数学物理方程与特殊函数(第三版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[2] 傅海明, 戴正德. (2+1)维广义 KdV 方程的周期孤波解[J]. 平顶山学院学报, 2013, 28(5): 35-38.

[3] 刘建国, 曾志芳. 变系数 Sine-Gordon 方程的 Bäcklund 变换和新的精确解[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(6): 763-768.

[4] 傅海明, 戴正德. (2+1)维 Nizhnik-Novikov 方程的周期孤波解[J]. 江苏师范学报(自然科学版), 2016, 34(2): 33-36.

[5] Kongl, Q. and Dai, C.Q. (2015) Some Discussions about Variable Separation of Nonlinear Models Using Riccati Equation Expansion Method. *Nonlinear Dynamics*, **81**, 1553-1561. https://doi.org/10.1007/s11071-015-2089-y

[6] Yu, S.J., Toda, K., Sasa, N. and Fukuyama, T. (1998) N-Solitions to the Bogoyavlenskii-Schiff Equation and Aquest for the Solition in (3+1)-Dimensions. *Journal of Physics A*, **31**, 3337. https://doi.org/10.1088/0305-4470/31/14/018

[7] Schff, J. and Painleve, T. (1992) Their Asymptotics and Physical Applications. Plenum, New York.

[8] Vladimirov, V.A. and Maczka, C. (2007) Exact Solutions of Generalized Burgers Equation, Describing Travelling Fronts and Their Interaction. *Reports on Mathematical Physics*, **60**, 317-328. https://doi.org/10.1016/S0034-4877(07)80142-X

[9] Darvishi, M.T., Najafi, M., Kavitha, L. and Venkatesh, M. (2012) Stair and Step Solition Solutions of the Integrable (2+1) and (3+1)-Dimensional Boiti-Leon-Manna-Pempinelli Equations. *Communications in Theoretical Physics*, **58**, 785-794. https://doi.org/10.1088/0253-6102/58/6/01

[10] Tan, W. and Dai, Z.D. (2016) Dynamics of Kinky Wave for (3+1)- Dimensional Potential Yu-Toda-Sasa-Fukuyama. *Nonlinear Dynamics*, **85**, 817-823. https://doi.org/10.1007/s11071-016-2725-1

[11] Yun, Z. (2003) New Families of Nontravelling Wave Solutions to a New (3+1)-Dimensional Potential-YTSF Equation. *Physics Letters A*, **318**, 78-83. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2003.08.073

[12] Zhang, T., Xuan, H.N., Zhang, D.F. and Wang, C.J. (2007) Nontraveling Wave Solutions to a (3+1) Dimensional Potential YTSF Equation and a Simplified Model for Reacting Mixtures. *Chaos*, *Solitions Fractals*, **34**, 1006-1013. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.04.005

[13] Hasibun, N. and Farah, A. (2014) New Generalized and Improved (G'/G)-Expansion Method for Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physic. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **22**, 390-395. https://doi.org/10.1016/j.joems.2013.11.008