Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(2), 174-181
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92022

Hans汉斯

Suzuki Group and Flag-Transitive Point-Primitive 2-(v,k,λ) Designs

Yujie Wang

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 692450052@qq.com

Received: Feb. 20th, 2019; accepted: Mar. 6th, 2019; published: Mar. 13th, 2019

Abstract

There are important internal connections between groups and combinatorial designs, which reflected by the flag-transitivity, point-primitivity or other properties of the automorphism groups. Let $\mathcal{D}$ be non-trivial 2-designs with $\lambda \le 10$. Assume that $G = Sz(q)$ is a flag-transitive point-primitive automorphism group of $\mathcal{D}$. Then $\mathcal{D}$ is a 2-(65, 8, 7) design and $G = Sz(8)$.

Keywords

2-Design, Flag-Transitive, Suzuki Group

Suzuki群与旗传递点本原2-(v,k,λ)设计

王雨洁

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: 692450052@qq.com

收稿日期：2019年2月20日；录用日期：2019年3月6日；发布日期：2019年3月13日

摘　要

群论与组合设计有着紧密的内在关系，主要通过设计的自同构群的旗传递性、点本原性等性质来体现。本文研究$\mathcal{D}$是一个非平凡的2-(v,k,λ)设计，其中$\lambda \le 10$。若$G \le Aut(\mathcal{D})$是旗传递、点本原的群，且$G = Sz(q)$，则$\mathcal{D}$是一个2-(65, 8, 7)设计，且$G = Sz(8)$。

文章引用: 王雨洁. Suzuki 群与旗传递点本原 2-(v,k,λ) 设计[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 174-181.
DOI: 10.12677/pm.2019.92022

关键词

2-设计，旗传递，Suzuki群

1. 引言

1.1. 研究背景

设t,v,k,λ为正整数，满足$t<k<\lambda$。一个设计t-(v,k,λ)或t-设计$\mathcal{D}$定义为符合以下条件的一对符号$(\mathcal{P},\mathcal{B})$，满足：

1) $\mathcal{P}$是有v个点的有限集，$\mathcal{P}$的元素为点；

2) $\mathcal{B}$是$\mathcal{P}$的一组k-子集，$\mathcal{B}$的元素称为区组或区；

3) $\mathcal{P}$的任意给定的t-子集都恰好包含在$\mathcal{B}$的λ个区组之中。

这里r是过一个点的区的个数，b是区组的总数。我们总假设B的成员都不相同，即B中的区组不允许重复出现，称(v,b,r,k,λ)为设计D的参数。当$t<k<v-1$时，称t-设计$\mathcal{P}$是非平凡的。

设计$D=(\mathcal{P},\mathcal{B})$的一个旗是指点－区对$(\alpha,B)$，这里$\alpha\in P$，$B\in\mathcal{B}$且$\alpha\in B$。$G\le Aut(D)$，若$G$在$\mathcal{P}$上的作用是本原的，称$G$是点本原的。若$G$在$\mathcal{D}$的旗的集合上是传递的，称G或者$\mathcal{D}$是旗传递的。

1988年，P. H. Zieschang [1]已经证明若G是一个旗传递2-(v,k,λ)设计的自同构群且$(r,\lambda)=1$，T是G的一个极小正规子群那么T是仿射型或者几乎单型。Regueiro [2]证明了当$\lambda\le 3$时，G是仿射型或者几乎单型。当$\lambda\le 4$时[3] [4]，可以得到相同的结果。2013年周胜林和田德路[5]证明了若G旗传递、点本原作用在$\mathcal{D}$上且$\lambda\le 100$，则G是仿射型或者几乎单型。最近梁洪雪和周胜林[6]分析了$\mathcal{D}$是非对称的情况，并证明了一个旗传递、点本原、非对称2-$(v,k,2)$设计的自同构群是仿射型或者几乎单型。

本文研究了旗传递、点本原2-(v,k,λ)设计当$\lambda\le 10$且自同构群G为Suzuki群时的情况，得到如下结果：

设D是一个非平凡的2-(v,k,λ)设计，其中$\lambda\le 10$，若$G=Sz(q)$是D的旗传递、点本原的自同构群。则D是一个2-$(65,8,7)$设计，且$G=Sz(8)$。

1.2. 预备知识

引理1：[7]若$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$是一个2-$(v,k,\lambda)$设计。则下面式子成立：

1) $bk=vr$；

2) $\lambda(v-1)=r(k-1)$；

3) $b\ge v$。

引理2：[8]设$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$是一个2-$(v,k,\lambda)$设计，$G\le Aut(\mathcal{D})$，对任意的$x\in P$和$B\in\mathcal{B}$，则$G$在$\mathcal{D}$上旗传递等价于下列的条件之一：

1) G是点－传递的，并且G_x在$P(x)$上传递；

2) G是区－传递的，并且G_B在B上传递。

引理 2：[8]设 $\mathcal{D}$ 是一个 2-(v,k,λ) 设计且 $G \le Aut(\mathcal{D})$ 是旗传递的，则 $r \mid \lambda\left(v-1,\left|G_\alpha\right|\right)$，其中 $\alpha \in P$。

引理 4：[9]设 $q = 2^{2e+1}$，e 是一个正整数，则 $3 \nmid q-1$，$5 \nmid q-1$。

证明：$q-2 = 2^{2e+1}-2 = 2\left(2^{2e}-1\right) = 2\left(4^e-1\right) = 2(4-1)\left(4^{e-1}+4^{e-2}+\cdots+1\right)$，得到 $3 \mid q-2$。由 $(q-1,q-2)=1$，得到 $3 \nmid q-1$。

$5 \mid q^2+1, q^2+1 = q^2-1+2, \left(5,q^2-1+2\right)=5$，得到 $5 \nmid q-1$。

2. 定理 1 的证明

设 $\mathcal{D} = (\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个满足 $\lambda \le 10$ 的 2-(v,k,λ) 设计，$G \le Aut(\mathcal{D})$ 是旗传递、点本原的群，且 $G = Sz(q)$。$|G| = |Sz(q)| = \left(q^2+1\right)q^2\left(q^2-1\right)$，其中 $q = 2^{2e+1} \ge 8$。G 的极大子群 G_α 的阶有 4 种情况，分别是 $q^2(q-1)$、$4\left(q+\sqrt{2q}+1\right)$、$4\left(q-\sqrt{2q}+1\right)$ 和 $\left(\rho^2+1\right)\rho^2(\rho-1)$。其中 $q=\rho^m, \rho \ge 8$ 并且 $m \ge 3$。现在我们来讨论点稳定子群 G_α 的阶在 4 种情况下，设计是否存在。

引理 5：$\mathcal{D} = (\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个满足 $\lambda \le 10$ 的 2-(v,k,λ) 设计，$G \le Aut(\mathcal{D})$ 是旗传递、点本原的群，且 $G = Sz(q)$。若 $\left|G_\alpha\right| = q^2(q-1)$，则 D 是一个 2-$(65,8,7)$ 设计，且 $G = Sz(8)$。

证明：$\left|G_\alpha\right| = q^2(q-1)$，则

$$v = \frac{|G|}{\left|G_\alpha\right|} = q^2+1$$

由于 G 是旗传递的，并且 $b = \dfrac{vr}{k} = \dfrac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)} = \dfrac{\lambda\left(q^2+1\right)q^2}{k(k-1)}$，可以得到

$$\left|G_B\right| = \frac{G}{b} = \frac{(q-1)k(k-1)}{\lambda}$$

由于 $G_B \le G$，则必存在 G 的一个极大子群 L，使得 $G_B \le L$。

首先假设 $|L| = q^2(q-1)$，则 $\dfrac{(q-1)k(k-1)}{\lambda} \,\Big|\, q^2(q-1)$，因此 $k(k-1) \mid \lambda q^2$。

由于 G 旗传递，可以得到 $r = \dfrac{\left|G_\alpha\right|}{\left|G_{\alpha B}\right|}$。而 $\left|G_\alpha\right| = q^2(q-1)$。故 $r \mid q^2(q-1)$。

若 $\lambda = 2,4,8$，则 $k(k-1) \mid 2^i q^2$，其中 i 是自然数，由 $(k,k-1)=1$ 可以得出 $k=2$ 与 $\mathcal{D}$ 非平凡矛盾。

若 $\lambda = 3$，则 $k(k-1) \mid 3q^2$，得出 $3 \mid k$ 或者 $3 \mid k-1$。否则，则 $3 \nmid k$ 且 $3 \nmid k-1$，此时可以得到 $(3,k)=1$ 且 $(3,k-1)=1$，即 $(3,k(k-1))=1$，故 $k(k-1) \mid q^2$。而 $q^2 = 2^{4e+2}$，因此可以得到 $k=2^i$，i 是自然数且 $k-1=2^j$，j 是自然数。又 $(k,k-1)=1$，可以得到 $k-1=1$，即 $k=2$，与 D 非平凡矛盾。故而 $3 \mid k$ 或者 $3 \mid k-1$。

若 $3 \mid k$，则 $k = 3\cdot 2^i$，其中 i 是自然数，$k-1 \mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $i=0$，$k=3$。$\lambda(v-1) = r(k-1)$ 即 $3q^2 = 2r$，得出 $3 \mid r$，又 $r \mid q^2(q-1)$，得出 $3 \mid q^2(q-1)$。与引理 4 矛盾。

若 $3 \mid k-1$，则 $k-1 = 3\cdot 2^j$，其中 j 是自然数，$k-1 \mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $j=0$，$k=4$。已知 G 在 v 个点上是 2-传递的[10]，则

$$\left|G:G_{\alpha\beta}\right| = \left|G:G_\alpha\right|\left|G_\alpha:G_{\alpha\beta}\right| = v(v-1) = q^2\left(q^2+1\right)$$

因此 $\left|G_{\alpha\beta}\right| = q-1$。记 Q 是包含一些区的集合，且 Q 里的区均包含 α 和 β。则 $|Q| = \lambda = 3$。

现在证明存在 $B \in Q$，使得 $G_{\alpha\beta} \le G_B$。否则 $G_{\alpha\beta}$ 不固定 Q 中任一个区，则 $G_{\alpha\beta}$ 在 Q 上传递，且 $3 \,\|\, G_{\alpha\beta}|$。又 $\left|G_{\alpha\beta}\right| = q-1$。与引理 4 矛盾。所以一定存在 $B \in Q$，使得 $G_{\alpha\beta} \le G_B$。

已知 $G_{\alpha\beta}$ 半正则作用于 $P \setminus \{\alpha,\beta\}$ [10]，则 $\left|G_{\alpha\beta\Gamma}\right| = 1$，任取 $\Gamma \in B \setminus \{\alpha,\beta\}$。故 $\Gamma^{G_{\alpha\beta}} \subseteq B \setminus \{\alpha,\beta\}$，得出

$\left|G_{\alpha\beta}:G_{\alpha\beta\Gamma}\right|=\left|G_{\alpha\beta}\right|=q-1\le k-2$，则 $k\ge q-1$。与 $k=4$ 矛盾。

若 $\lambda=5$，则 $k(k-1)\mid 5q^2$，得出 $5\mid k$ 或者 $5\mid k-1$。否则，则 $5\nmid k$ 且 $5\nmid k-1$，此时可以得到 $(5,k)=1$ 且 $(5,k-1)=1$，即 $(5,k(k-1))=1$，故 $k(k-1)\mid q^2$。而 $q^2=2^{4e+2}$，因此可以得到 $k=2^i$，i 是自然数且 $k-1=2^j$，j 是自然数。又 $(k,k-1)=1$，可以得到 $k-1=1$，即 $k=2$，与 D 非平凡矛盾。故而 $5\mid k$ 或者 $5\mid k-1$。

若 $5\mid k-1$，则 $k-1=5\cdot 2^i$，其中 j 是自然数，$k-1\mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $i=0$，$k=6$，与 $k\mid q^2$ 矛盾。

若 $5\mid k$，则 $k=5\cdot 2^i$，其中 i 是自然数，$k-1\mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $i=0$，$k=5$。$\lambda(v-1)=r(k-1)$ 即 $5q^2=4r$，得出 $5\mid r$，又 $r\mid q^2(q-1)$，得出 $5\mid q^2(q-1)$。与引理 4 矛盾。

若 $\lambda=6$，则 $k(k-1)\mid 6q^2$，得出 $3\mid k$ 或者 $3\mid k-1$。否则，则 $3\nmid k$ 且 $3\nmid k-1$，此时可以得到 $(3,k)=1$ 且 $(3,k-1)=1$，即 $(3,k(k-1))=1$，故 $k(k-1)\mid 2q^2$。而 $2q^2=2^{4e+3}$，因此可以得到 $k=2^i$，i 是自然数且 $k-1=2^j$，j 是自然数。又 $(k,k-1)=1$，可以得到 $k-1=1$，即 $k=2$，与 D 非平凡矛盾。故而 $3\mid k$ 或者 $3\mid k-1$。

若 $3\mid k$，则 $k=3\cdot 2^i$，其中 i 是自然数，$k-1\mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $i=0$,，$k=3$。$\lambda(v-1)=r(k-1)$ 即 $6q^2=2r$，得出 $3\mid r$，又 $r\mid q^2(q-1)$，得出 $3\mid q^2(q-1)$。与引理 4 矛盾。

若 $3\mid k-1$，则仿照证明 $\lambda=3$ 的方法可得 $k=4$，此时 $|Q|=\lambda=6$。

现在证明存在 $B\in Q$，使得 $G_{\alpha\beta}\le G_B$。否则 $G_{\alpha\beta}$ 不固定 Q 中任一个区。此时 $G_{\alpha\beta}$ 的轨道长度可能为 2，3，4，6，都不能整除 $q-1$，得出矛盾。所以一定存在 $B\in Q$，使得 $G_{\alpha\beta}\le G_B$。

已知 $G_{\alpha\beta}$ 半正则作用于 $P\setminus\{\alpha,\beta\}$，则 $\left|G_{\alpha\beta\Gamma}\right|=1$，任取 $\Gamma\in B\setminus\{\alpha,\beta\}$。故 $\Gamma^{G_{\alpha\beta}}\subseteq B\setminus\{\alpha,\beta\}$，得出 $\left|G_{\alpha\beta}:G_{\alpha\beta\Gamma}\right|=\left|G_{\alpha\beta}\right|=q-1\le k-2$，则 $k\ge q-1$。与 $k=4$ 矛盾。

若 $\lambda=9$，则 $k(k-1)\mid 9q^2$，得出 $3\mid k$ 或者 $3\mid k-1$。否则，则 $3\nmid k$ 且 $3\nmid k-1$，此时可以得到 $(3,k)=1$ 且 $(3,k-1)=1$，即 $(3,k(k-1))=1$，故 $k(k-1)\mid q^2$。而 $q^2=2^{4e+2}$，因此可以得到 $k=2^i$，i 是自然数且 $k-1=2^j$，j 是自然数。又 $(k,k-1)=1$，可以得到 $k-1=1$，即 $k=2$，与 D 非平凡矛盾。故而 $3\mid k$ 或者 $3\mid k-1$。

若 $3\mid k$，则 $k=3^i\cdot 2^j$，其中 $i=1$，2，j 是自然数，$k-1\mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $i=0$，$k=3$。$\lambda(v-1)=r(k-1)$，若 $k=3$，则 $9q^2=2r$，得出 $9\mid r$，又 $r\mid q^2(q-1)$，得出 $9\mid q^2(q-1)$。与引理 4 矛盾。若 $k=9$，则 $9q^2=8r$，得出 $9\mid r$，又 $r\mid q^2(q-1)$，得出 $9\mid q^2(q-1)$。与引理 4 矛盾。

若 $3\mid k-1$，则仿照证明 $\lambda=3$ 的方法可得 $k=4$。$\lambda(v-1)=r(k-1)$ 即 $9q^2=3r$，得出 $3\mid r$，又 $r\mid q^2(q-1)$，得出 $3\mid q^2(q-1)$。与引理 4 矛盾。

若 $\lambda=10$，则 $k(k-1)\mid 10q^2$，得出 $5\mid k$ 或者 $5\mid k-1$。否则，则 $5\nmid k$ 且 $5\nmid k-1$，此时可以得到 $(5,k)=1$ 且 $(5,k-1)=1$，即 $(5,k(k-1))=1$，故 $k(k-1)\mid 2q^2$。而 $2q^2=2^{4e+3}$，因此可以得到 $k=2^i$，i 是自然数且 $k-1=2^j$，j 是自然数。又 $(k,k-1)=1$，可以得到 $k-1=1$，即 $k=2$，与 D 非平凡矛盾。故而 $5\mid k$ 或者 $5\mid k-1$。

若 $5\mid k-1$，则 $k-1=5\cdot 2^j$，其中 j 是自然数，$k-1\mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $i=0$，$k=6$，与 $k\mid q^2$ 矛盾。

若 $5\mid k$，则 $k=5\cdot 2^i$，其中 i 是自然数，$k-1\mid q^2$，由于 $(k,k-1)=1$，得出 $i=0$，$k=5$。$\lambda(v-1)=r(k-1)$ 即 $10q^2=4r$，得出 $5\mid r$，又 $r\mid q^2(q-1)$，得出 $5\mid q^2(q-1)$。与引理 4 矛盾。

若 $\lambda=7$，则 $k(k-1)\mid 7q^2$，得出 $7\mid k$ 或者 $7\mid k-1$。否则，则 $7\nmid k$ 且 $7\nmid k-1$，此时可以得到 $(7,k)=1$ 且 $(7,k-1)=1$，即 $(7,k(k-1))=1$，故 $k(k-1)\mid q^2$。而 $q^2=2^{4e+2}$，因此可以得到 $k=2^i$，i 是自然数且 $k-1=2^j$，j 是自然数。又 $(k,k-1)=1$，可以得到 $k-1=1$，即 $k=2$，与 D 非平凡矛盾。故而 $7\mid k$ 或者 $7\mid k-1$。

若 $7\mid k$，则 $k=7$，显然 $7\times 6\nmid 7q^2$。得出矛盾。

若 $7\mid k-1$，则 $k=8$。当 $q=8$ 时，$v=65$，$r=64$，$b=520$。接下来利用 Magma [11]验证存在参数组为(56, 65, 520, 64, 8, 7)的设计。

利用指令 Primitive Group (65, 3)可返回本原群库中作用在 65 个点上排在第 3 个位置的本原群，即 $Sz(q)$。

由于 G 是旗传递的，则 $|G:G_B|=b$，故必存在指数为 b 的子群。利用指令 Subgroups (G: Order Equal: = n)，其中 $n=\frac{|G|}{b}=56$，可得到 G 的指数为 b 的子群，符合条件的子群又 1 个，即为 G_B。

由于 G_B 在 B 上是点传递的，则 $k=|B|=|G_B:G_{\alpha B}|$，则 G_B 中至少存在一个长度为 k 的轨道。利用指令 $Orbits(G_b)$ 可知有 1 个长度为 k 即 8 的轨道，记这个轨道为

$$O=\{11,13,21,22,27,37,43,49\}。$$

由于 G 在 $\mathcal{B}$ 上是区传递的，对于 $B\in\mathcal{B}$ 必有 $|B^G|=b$。利用指令 $\#(O^G)$ 可知轨道 O 符合条件。利用指令 $Design\langle 2,v|B\rangle$，返回(65, 8, 7)。可知参数组(56, 65, 520, 64, 8, 7)是我们要找的符合条件的参数。

其次，设 $|L|=4(q+\sqrt{2q}+1)$。则 $\frac{(q-1)k(k-1)}{\lambda}\Big|4(q+\sqrt{2q}+1)$，可以得到

$$(q-1)k(k-1)\big|4\lambda(q+\sqrt{2q}+1)$$

当 $\lambda\le 10$ 且 $\lambda\ne 7$ 时，$(q-1,\lambda)=1$，可得

$$q-1\big|4(q+\sqrt{2q}+1)$$

此时 $\frac{4(q+\sqrt{2q}+1)}{q-1}=4+\frac{4\sqrt{2q}+8}{q-1}$，因此 $4\sqrt{2q}+8\ge q-1$，可得 $8\le q\le 32, q=2^{2e+1}$，故 $q=8$，32。当 $q=8$ 时，$q-1=7\nmid 4(q+\sqrt{2q}+1)$。当 $q=32$ 时，$q-1=31\nmid 4(q+\sqrt{2q}+1)$。存在矛盾。

当 $\lambda=7$ 时，若 $(q-1,\lambda)=1$，则可得出矛盾。若 $(q-1,\lambda)=7$，则 $\frac{q-1}{7}\Big|4(q+\sqrt{2q}+1)$，此时 $\frac{4(q+\sqrt{2q}+1)}{\frac{q-1}{7}}=28+\frac{28\sqrt{2q}+56}{q-1}$，因此 $28\sqrt{2q}+56\ge q-1$，可得 $8\le q\le 512$，得到 $q=8$，32，512，在这三种情况下均可得到 $q-1\nmid 4(q+\sqrt{2q}+1)$，得出矛盾。

第三，设 $|L|=4(q-\sqrt{2q}+1)$，则可以得到 $(q-1)k(k-1)\big|4\lambda(q-\sqrt{2q}+1)$。

当 $\lambda\le 10$ 且 $\lambda\ne 7$ 时，$(q-1,\lambda)=1$，可得 $q-1\big|4(q-\sqrt{2q}+1)$。此时 $\frac{4(q-\sqrt{2q}+1)}{q-1}=4+\frac{8-4\sqrt{2q}}{q-1}$，因此 $8-4\sqrt{2q}\ge q-1$，可得 $8-2^{e+3}\ge 2^{2e+1}-1$，不存在正解，得出矛盾。

当 $\lambda=7$ 时，若 $(q-1,\lambda)=1$，则可得出矛盾。若 $(q-1,\lambda)=7$，则 $7(8-4\sqrt{2q})\ge q-1$，不存在正解，得出矛盾。

最后，设 $|L|=4(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)$。则可以得到 $q-1\big|\lambda(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)$。

当 $\lambda\le 10$ 且 $\lambda\ne 7$ 时，$(q-1,\lambda)=1$，可得 $q-1\big|(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)$。此时 $\frac{(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)}{q-1}=\frac{(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)}{\rho^m-1}=\frac{(\rho^2+1)\rho^2}{\rho^{m-1}+\rho^{m-2}+\cdots+1}$，故。又，得到 $\rho^{m-1}+\rho^{m-2}+\cdots+1\big|(\rho^2+1)\rho$，推出 $m=3$。事实上 $\rho^2+\rho+1\nmid\rho^3+\rho$，得出矛盾。

当 $\lambda=7$ 时，若 $(q-1,\lambda)=1$，则可得出矛盾。若 $(q-1,\lambda)=7$，则 $q-1\big|7(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)$。

$\frac{7(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)}{q-1}=\frac{7(\rho^2+1)\rho^2(\rho-1)}{\rho^m-1}=\frac{7(\rho^2+1)\rho^2}{\rho^{m-1}+\rho^{m-2}+\cdots+1}$ 又 $(\rho,\rho^{m-1}+\rho^{m-2}+\cdots+1)=1$，得到

$\rho^{m-1}+\rho^{m-2}+\cdots+1 \mid 7\left(\rho^2+1\right)\rho$，事实上得到 $\rho^{m-1}+\rho^{m-2}+\cdots+1 \mid 7\left(\rho^2+1\right)$，推出 $m=3$。但是 $\rho^2+\rho+1 \nmid 7\left(\rho^2+1\right)$，得出矛盾。

引理 6：$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个满足 $\lambda \le 10$ 的 2-(v,k,λ) 设计，$G \le Aut(\mathcal{D})$ 是旗传递、点本原的群，且 $G=Sz(q)$。则 $|G_\alpha| \ne 4\left(q+\sqrt{2q}+1\right)$。

证明：假设存在点稳定子群 G_α 使得 $|G_\alpha|=4\left(q+\sqrt{2q}+1\right)$，已知 $\lambda|G|<|G_\alpha|^3$，即 $\lambda\left(q^2+1\right)q^2(q-1)<4^3\left(q+\sqrt{2q}+1\right)^3$。又 $\frac{q^4-q^3+q^2}{q^5}=\frac{1}{q}-\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}\le\frac{1}{q}\le\frac{1}{8}$ 则

$\lambda\left(q^2+1\right)q^2(q-1)=\lambda q^5-\lambda\left(q^4-q^3+q^2\right)>\lambda q^5-\frac{1}{8}\lambda q^5=\frac{7}{8}\lambda q^5$。

$q+\sqrt{2q}+1<q+\sqrt{q\cdot q}+1=2q+1\le 2q+\frac{q}{8}=\frac{17}{8}q$。则 $\frac{7}{8}\lambda q^5<4^3\left(\frac{17}{8}q\right)^3$。即

$q^2<\frac{4913}{7\lambda}\le\frac{4913}{14}\le\frac{4913}{14}(2e+1)^2$，得出 $q=2^{2e+1}\le\sqrt{\frac{4913}{14}}(2e+1)$。故 $q=8$，32。

当 $q=8$ 时，$|G|=29120, |G_\alpha|=52, v=\frac{|G|}{|G_\alpha|}=560, r \mid \left(|G_\alpha|, v-1\right)$ 即 $r \mid 13\lambda$。

若 $\lambda=2$，则 $r \mid 2\times 13$，故 $r=13$，26。已知 $bk=vr, r(k-1)=\lambda(v-1)$，可以算出 b 不是整数，得出矛盾。

若 $\lambda=3$，则 $r \mid 3\times 13$，故 $r=13$，39。若 $r=39$，可以算出 b 不是整数。若 $r=13$，则 $k=130$, $b=56, |G_B|=\frac{|G|}{b}=520$。而 G 的极大子群的阶只能为 448，52 或 20。并且 G 是旗传递的，与 $G_B \prec G$ 矛盾。

若 $\lambda=4$，则 $r \mid 4\times 13$，故 $r=13$，26，52。若 $r=13$，26，可以算出 b 不是整数。若 $r=52$，可以算出 k 不是整数，得出矛盾。

若 $\lambda=5$，则 $r \mid 5\times 13$，故 $r=13$，65。若 $r=65$，可以算出 b 不是整数。若 $r=13$，则 $k=216, b=112, |G_B|=\frac{|G|}{b}=260$。由 G_B 在 B 上传递可知 $k \,\|\, G_B|$，但是 $216 \nmid 260$。得出矛盾。

若 $\lambda=6$，则 $r \mid 6\times 13$，故 $r=13$，26，39，78。若 $r=13$，26，78，可以算出 b 不是整数。若 $r=39$，则 $k=87, b=168, |G_B|=\frac{|G|}{b}=\frac{29120}{168}$ 不是整数，矛盾。

若 $\lambda=7$，则 $r \mid 7\times 13$，故 $r=13$，91。可以算出 b 不是整数，得出矛盾。

若 $\lambda=8$，则 $r \mid 8\times 13$，故 $r=13$，26，52，104。可以算出 b 不是整数，得出矛盾。

若 $\lambda=9$，则 $r \mid 9\times 13$，故 $r=13$，39，117。可以算出 b 不是整数，得出矛盾。

若 $\lambda=10$，则 $r \mid 10\times 13$，故 $r=13$，26，65，130。可以算出 b 不是整数，得出矛盾。

当 $q=32$ 时，$|G|=32537600, |G_\alpha|=164, v=\frac{|G|}{|G_\alpha|}=198400, r \mid \lambda\left(|G_\alpha|, v-1\right)$，即 $r \mid 41\lambda$。

通过计算可得，当 $\lambda=2\sim 10$ 时，b 均不是整数，得出矛盾。

引理 7：$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$ 是一个满足 $\lambda \le 10$ 的 2-(v,k,λ) 设计，$G \le Aut(\mathcal{D})$ 是旗传递、点本原的群，且 $G=Sz(q)$。则 $|G_\alpha| \ne 4\left(q-\sqrt{2q}+1\right)$。

证明：假设存在点稳定子群 G_α 使得 $|G_\alpha|=4\left(q-\sqrt{2q}+1\right)$，已知 $\lambda|G|<|G_\alpha|^3$，即 $\lambda\left(q^2+1\right)q^2(q-1)<4^3\left(q-\sqrt{2q}+1\right)^3$。仿照上一引理可得

$$\lambda\left(q^2+1\right)q^2\left(q-1\right)>\frac{7\lambda}{8}q^5, q-\sqrt{2q}+1<q-\sqrt{2\times 2}+1=q-1<q。$$

故$\frac{7\lambda}{8}q^5<\lambda\left(q^2+1\right)q^2\left(q-1\right)<4^3\left(q-\sqrt{2q}+1\right)^3<4^3q^3$，由$\frac{7\lambda}{8}q^5<64q^3$，可以得到$q<6$，与$q\ge 8$矛盾。

引理 8：$\mathcal{D}=(\mathcal{P},\mathcal{B})$是一个满足$\lambda\le 10$的2-$(v,k,\lambda)$设计，$G\le Aut(\mathcal{D})$是旗传递、点本原的群，且$G=Sz(q)$。则$\left|G_\alpha\right|\ne\left(\rho^2+1\right)\rho^2\left(\rho-1\right)$。

证明：假设存在点稳定子群G_α使得$\left|G_\alpha\right|=\left(\rho^2+1\right)\rho^2\left(\rho-1\right)$，则

$$\begin{aligned} v&=\frac{\left(q^2+1\right)q^2\left(q-1\right)}{\left(\rho^2+1\right)\rho^2\left(\rho-1\right)}=\frac{\left(\rho^{2m}+1\right)\rho^{2m}\left(\rho^m-1\right)}{\left(\rho^2+1\right)\rho^2\left(\rho-1\right)} \\ &=\frac{\left(\rho^{2m}+1\right)\rho^{2m-2}\left(\rho^{m-1}+\rho^{m-2}+\cdots+1\right)}{\left(\rho^2+1\right)} \end{aligned}$$

由$\lambda v<r^2$得出$\lambda<\lambda^2\left(\rho^2+1\right)^2\left(\rho-1\right)^2$。则$v<\lambda\left(\rho^2+1\right)^2\left(\rho-1\right)^2$。

$|G|=v\left|G_\alpha\right|<\lambda\left(\rho^2+1\right)^3\rho^2\left(\rho-1\right)^3<\lambda\rho^{11}$，又$|G|=\left(\rho^{2m}+1\right)\rho^{2m}\left(\rho^{2m}-1\right)>\frac{8}{7}\rho^{5m}$。可知$\frac{7}{8}\rho^{5m}<\lambda\rho^{11}<10\rho^{11}$。即$\frac{7}{8}\rho^{5m}<10\rho^{11}$。可以得到$8^{5m-11}\le\rho^{5m-11}<\frac{80}{7}$，从而$m<3$，得出矛盾。

定理 1 的证明：利用引理 5~引理 8 可以得到定理 1。

致　谢

本论文在写作过程中与张志林博士和张永莉博士进行了有益的讨论，在此表示感谢！论文还得到了广东省自然科学基金的资助。

基金项目

广东省自然科学基金(编号：2017A030313001)。

参考文献

[1] Zieschang, P.-H. (1988) Flag-Transitive Automorphism Groups of 2-Designs with (γ, λ) = 1. *Journal of Algebra*, **118**, 265-275. https://doi.org/10.1016/0021-8693(88)90027-0

[2] Regueiro, E.O. (2005) On Primitive and Reduction for Flag-Transitive Symmetric Designs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series A*, **109**, 135-148. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2004.08.002

[3] Regueiro, E.O. (2010) Reduction for Primitive Flag-Transitive (v, k, 4)-Symmetric Designs. *Designs*, *Codes and Cryptography*, **56**, 61-63. https://doi.org/10.1007/s10623-009-9341-8

[4] Fang, W.D., Dong, H.L. and Zhou, S.L. (2010) Flag-Transitive 2-(v, k, 4) Symmetric Designs. *Ars Combinatoria*, **95**, 333-342.

[5] Tian, D.L. and Zhou, S.L. (2013) Flag-Transitive Point-Primitive Symmetric (v, k, λ) Designs with λ at Most 100. *Journal of Combinatorial Designs*, **21**, 127-141. https://doi.org/10.1002/jcd.21337

[6] Liang, H.X. and Zhou, S.L. (2016) Flag-Transitive Point-Primitive Automorphism Groups of Nonsymmetric 2-(v, k, 2) Designs. *Journal of Combinatorial Designs*, **24**, 421-435. https://doi.org/10.1002/jcd.21516

[7] Ionin, Y.J. and van Trung, T. (2007) Symmetric Designs. In: Colbourn, C.J. and Dinitz, J.H., Eds., *Handbook of Combinatorial Designs*, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, 110-124.

[8] Dembowski, P. (1968) Finite Geometries. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-642-62012-6

[9] Davies, H. (1987) Flag-Transitive and Primitivity. *Discrete Mathematics*, **63**, 91-93. https://doi.org/10.1016/0012-365X(87)90154-3

[10] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1988) The Primitive Permutation Groups of Degree Less than 1000. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **103**, 213-238. https://doi.org/10.1017/S0305004100064793

[11] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125