Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(2), 182-187
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92023

Hans汉斯

$K_{2,4}$-Factorization of Complete Bipartite Multigraphs

Li Zhu

Nantong Vocational University, Nantong Jiangsu
Email: ntjulie@126.com

Received: Feb. 26th, 2019; accepted: Mar. 13th, 2019; published: Mar. 20th, 2019

Abstract

Let $\lambda K_{m,n}$ be a complete bipartite multigraph with two partite sets having m and n vertices, respectively. A $K_{p,q}$-factorization $\lambda K_{m,n}$ is a set of edge-disjoint $K_{p,q}$-factors of $\lambda K_{m,n}$. When $p = 1$, $q = 2$ and $p = 2$, $q = 3$, the $K_{p,q}$-factorization of $\lambda K_{m,n}$ has been completely solved. When $p = 1$, $q = 3$ and $p = 1$, $q = 4$, the $K_{p,q}$-factorization of $K_{m,n}$ has been totally solved. In this article, the $K_{2,4}$-factorization of $\lambda K_{m,n}$ is researched. We will give a necessary and sufficient condition for $K_{2,4}$-factorization of $\lambda K_{m,n}$, that is: 1) $m \equiv n \equiv 0 \pmod 2$, 2) $m \le 2n$, 3) $n \le 2m$, 4) $m+n \equiv 0 \pmod 6$, 5) $3\lambda mn/[4(m+n)]$.

Keywords

Complete Bipartite Multigraphs, Factor, Factorization

完全二部多重图的$K_{2,4}$-因子分解

朱 莉

南通职业大学，江苏 南通
Email: ntjulie@126.com

收稿日期：2019年2月26日；录用日期：2019年3月13日；发布日期：2019年3月20日

摘 要

如果完全二部多重图 $\lambda K_{m,n}$ 的边集可以划分为 $\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{p,q}$-因子，则称 $\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{p,q}$-因子分解。当p =

文章引用: 朱莉. 完全二部多重图的 $K_{2,4}$-因子分解[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 182-187.
DOI: 10.12677/pm.2019.92023

1、$q=2$和$p=2$、$q=3$时，$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{p,q}$ -因子分解的存在性问题已被完全解决。当$p=1$、$q=3$和$p=1$、$q=4$时，$K_{m,n}$的 $K_{p,q}$ -因子分解的存在性问题已被基本解决。文章研究当$p=2$和$q=4$时完全二部多重图 $\lambda K_{m,n}$ 的$K_{2,4}$-因子分解的存在性。证明完全二部多重图 $\lambda K_{m,n}$ 存在$K_{2,4}$-因子分解的充分必要条件是：1) $m\equiv n\equiv 0 \pmod 2$，2) $m\le 2n$，3) $n\le 2m$，4) $m+n\equiv 0 \pmod 6$，5) $3\lambda mn/\left[4(m+n)\right]$ 是整数。

关键词

二部多重图，因子，因子分解

1. 引言

$K_{m,n}$ 表示完全二部图，其两个部分点集 X和 Y分别具有 m 和 n 个点。$\lambda K_{m,n}$ 表示完全二部多重图，它是λ个两两不交的同构于 $K_{m,n}$ 的图的并。如果$\lambda K_{m,n}$ 的一个子图 F 包含了$\lambda K_{m,n}$ 的所有点，则称 F为$\lambda K_{m,n}$ 的一个支撑子图。若$\lambda K_{m,n}$ 的支撑子图 F 的每个分支均同构于图 $K_{p,q}$，则称 F 为$\lambda K_{m,n}$ 的一个 $K_{p,q}$-因子。如果$\lambda K_{m,n}$ 的边集可以划分为$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{p,q}$-因子，则称$\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{p,q}$-因子分解。在综述文章[1]中，Ushio 称$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{p,q}$-因子分解为可分解的(m, n, k, λ)二部 $K_{p,q}$-设计。如果$\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{p,q}$-因子分解，则称$\lambda K_{m,n}$ 是可 $K_{p,q}$-因子分解的。本文用到的图论方面的名词术语，均参照图论著作[2]。

$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{p,q}$-因子分解有许多应用，特别是 Yamamoto 和 Ushio 等[3]用其建立了计算机数据存储的 $HUBMFS_2$ 方案。当 $p=1$ 和 $q=2$ 时，Ushio [4]、Wang 和 Du [5]完全解决了$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{1,2}$-因子分解的存在性问题。Martin 在论文[6] [7]中分别解决了当 $p=1$、$q=3$ 与 $p=1$、$q=4$ 时 $K_{m,n}$ 的 $K_{p,q}$-因子分解的存在性。当 $p=2$ 和 $q=3$ 时，Wang 和 Du [8]完全解决了$\lambda=1$ 时 $K_{m,n}$ 的 $K_{2,3}$-因子分解的存在性。我们在论文[9]中完全解决了$\lambda>1$ 时$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{2,3}$-因子分解的存在性。本文研究当 $p=2$ 和 $q=4$ 时，完全二部多重图$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{2,4}$-因子分解的存在性。即我们将证明$\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解的充分必要条件。

定理 1.1：完全二部多重图$\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解的充分必要条件是：1) $m\equiv n\equiv 0 \pmod 2$，2) $m\le 2n$，3) $n\le 2m$，4) $m+n\equiv 0 \pmod 6$，5) $3\lambda mn/\left[4(m+n)\right]$ 是整数。

2. 定理 1.1 的证明

定理 1.1 的必要性证明通过简单计算即可得到，充分性部分的证明由以下几个引理构成，第一个引理是显然的，其中 $\gcd(x,y)$ 表示 x 和 y 的最大公约数。

引理 2.1：设 u，v，x 和 y 是正整数。如果 $\gcd(ux,vy)=1$，则 $\gcd(uv,ux+vy)=1$。

引理 2.2：设 s 是任意正整数。如果$\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解，则$\lambda sK_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。

证明：重复$\lambda K_{m,n}$ 的 $K_{2,4}$-因子分解 s 次即得$\lambda sK_{m,n}$ 的 $K_{2,4}$-因子分解。

引理 2.3：设 s 是任意正整数。如果$\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解，则$\lambda K_{ms,ns}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。

证明：由于 $K_{s,s}$ 是可 1-因子分解的(参见[2])，可设 $\{F_i:1\le i\le s\}$ 是它的一个 1-因子分解。对于每一个 $1\le i\le s$，用$\lambda K_{m,n}$ 代替 F_i 的每条边，即得到$\lambda K_{ms,ns}$ 的一个支撑子图 G_i，且 $G_i\,(1\le i\le s)$ 边集的并为$\lambda K_{ms,ns}$。由于$\lambda K_{m,n}$ 是可 $K_{2,4}$-因子分解的，因而 G_i 也是可 $K_{2,4}$-因子分解的。所以$\lambda K_{ms,ns}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。

由引理 2.3 我们易得当 $m=2n$ 或 $n=2m$ 时，$\lambda K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。因此下面我们只需考虑 $m<2n$ 且 $n<2m$ 时的情形。在这种情形下，我们令 $a=(2n-m)/6$，$b=(2m-n)/6$，$t=(m+n)/6$ 和 $r=3\lambda mn/\left[4(m+n)\right]$。由定理 1.1 的条件(1)~(4)可知 a，b，t，r 是整数，且 $0<a<m$，$0<b<n$。于是是有 $2a+4b=m$，$4a+2b=n$。进而可得 $r=\lambda(a+b)+\lambda ab/\left[2(a+b)\right]$。设 $z=\lambda ab/\left[2(a+b)\right]$，它也是整数。设 $\gcd(2a,4b)=d$，$2a=dp$，$4b=dq$，其中 $\gcd(p,q)=1$。因此 $z=\lambda dpq/\left[4(2p+q)\right]$。于是我们可得下列各式：

$$d=4(2p+q)z/(\lambda pq)$$

$$m=4(p+q)(2p+q)z/(\lambda pq)$$

$$n=2(4p+q)(2p+q)z/(\lambda pq)$$

$$r=(p+q)(4p+q)z/(\lambda pq)$$

$$a=2p(2p+q)z/(\lambda pq)$$

$$b=q(2p+q)z/(\lambda pq)$$

则有以下引理

引理 2.4：1) 如果 $\gcd(p,4)=1$，$\gcd(q,16)=1$，设 $\gcd(2p+q,l)=\gamma$，则

$$d=4(2p+q)s/\gamma, m=4(p+q)(2p+q)s/\gamma, n=2(4p+q)(2p+q)s/\gamma,$$

$$r=(p+q)(4p+q)s\lambda/\gamma, a=2p(2p+q)s/\gamma, b=q(2p+q)s/\gamma$$

其中 s 是正整数。

2) 如果 $\gcd(p,4)=1$，$\gcd(q,16)=1$，设 $q=2q_1$，设 $\gcd(2(p+q_1),\lambda)=\gamma$，则

$$d=4(p+q_1)s/\gamma, m=4(p+2q_1)(p+q_1)s/\gamma, n=4(2p+q_1)(p+q_1)s/\gamma,$$

$$r=(p+2q_1)(2p+q_1)s\lambda/\gamma, a=2p(p+q_1)s/\gamma, b=2q_1(p+q_1)s/\gamma$$

其中 s 是正整数。

3) 如果 $\gcd(p,4)=1$，$\gcd(q,16)=4$，设 $q=4q_2$，设 $\gcd(p+2q_2,l)=\gamma$，则

$$d=2(p+2q_2)s/\gamma, m=2(p+4q_2)(p+2q_2)s/\gamma, n=4(p+q_2)(p+2q_2)s/\gamma,$$

$$r=(p+4q_2)(p+q_2)s\lambda/\gamma, a=p(p+2q_2)s/\gamma, b=2q_2(p+2q_2)s/\gamma$$

其中 s 是正整数。

4) 如果 $\gcd(p,4)=1$，$\gcd(q,16)=8$，设 $q=8q_3$，设 $\gcd(p+4q_3,\lambda)=\gamma$，则

$$d=2(p+4q_3)s/\gamma, m=2(p+8q_3)(p+4q_3)s/\gamma, n=4(p+2q_3)(p+4q_3)s/\gamma,$$

$$r=(p+8q_3)(p+2q_3)s\lambda/\gamma, a=p(p+4q_3)s/\gamma, b=4q_3(p+4q_3)s/\gamma$$

其中 s 是正整数。

5) 如果 $\gcd(p,4)=1$，$\gcd(q,16)=16$，设 $q=16q_4$，设 $\gcd(p+8q_4,\lambda)=\gamma$，则

$$d=2(p+4q_4)s/\gamma, m=2(p+16q_4)(p+8q_4)s/\gamma, n=4(p+4q_4)(p+8q_4)s/\gamma,$$

$$r=(p+16q_4)(p+4q_4)s\lambda/\gamma, a=p(p+8q_4)s/\gamma, b=8q_4(p+8q_4)s/\gamma$$

其中 s 是正整数。

6) 如果 $\gcd(p,4)=2$，$\gcd(q,16)=1$，设 $p=2p_1$，设 $\gcd(4p_1+q,\lambda)=\gamma$，则

$$d=4\left(4p_1+q\right)s/\gamma, m=4\left(2p_1+q\right)\left(4p_1+q\right)s/\gamma, n=2\left(8p_1+q\right)\left(4p_1+q\right)s/\gamma,$$

$$r=\left(2p_1+q\right)\left(8p_1+q\right)s\lambda/\gamma, a=4p_1\left(4p_1+q\right)s/\gamma, b=q\left(4p_1+q\right)s/\gamma$$

其中 s 是正整数。

7) 如果 $\gcd(p,4)=4$，$\gcd(q,16)=1$，设 $p=4p_2$，设 $\gcd(8p_2+q,\lambda)=\gamma$，则

$$d=4\left(8p_2+q\right)s/\gamma, m=4\left(4p_2+q\right)\left(8p_2+q\right)s/\gamma, n=2\left(16p_2+q\right)\left(8p_2+q\right)s/\gamma,$$

$$r=\left(4p_2+q\right)\left(16p_2+q\right)s\lambda/\gamma, a=8p_2\left(8p_2+q\right)s/\gamma, b=q\left(8p_2+q\right)s/\gamma$$

其中 s 是正整数。

证明： 1) 由条件我们有 $\gcd(p,4)=\gcd(q,16)=\gcd(p,q)=1$，因此 $\gcd(4p,q)=1$。此时 $r=(p+q)(4p+q)z/(pq)$。根据引理 2.1，我们有 $\gcd(pq,p+q)=\gcd(pq,4p+q)=1$。所以 $z/(pq)$ 是正整数。令 $z'=z/(pq)$。设 $\gcd(2p(2p+q),\lambda)=\gamma_1$，$\gcd(q(2p+q),\lambda)=\gamma_2$。由 $a=2p(2p+q)z'/\lambda$，$b=q(2p+q)z'/\lambda$。我们知 $z'\gamma_1/\lambda$ 和 $z'\gamma_2/\lambda$ 是正整数。因为 $\gcd(2p,q)=1$，所以 $z'\gamma/\lambda$ 是正整数，这里 $\gcd(2p+q,\lambda)=\gamma$。令 $s=z'\gamma/\lambda$，即得(1)中的等式。

(2)~(7)中各式的证明类似于(1)。

引理 2.5： 对于任意正整数 γ，p 和 q，如果 $m=4(p+q)(2p+q)/\gamma$，$n=2(4p+q)(2p+q)/\gamma$，则当 $(2p+q)/\gamma$ 是正整数时，$\gamma K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。

证明： 记 $a=2p(2p+q)/\gamma$，$b=q(2p+q)/\gamma$，$r=(p+q)(4p+q)$，$r_1=p+q$ 和 $r_2=4p+q$。并令 X 和 Y 是 $\gamma K_{m,n}$ 两个部分点集

$$X=\left\{x_{i,j} \middle| 1\le i\le r_1, 1\le j\le 4(2p+q)/\gamma\right\},$$

$$Y=\left\{y_{i,j} \middle| 1\le i\le r_2, 1\le j\le 2(2p+q)/\gamma\right\}。$$

我们将构作 $\gamma K_{m,n}$ 的一个 $K_{2,4}$-因子分解。我们约定 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$ 的第一个下标分别在 $\{1,2,\cdots,r_1\}$ 和 $\{1,2,\cdots,r_2\}$ 中进行模 r_1 和模 r_2 的运算，它们的第二个下标分别在 $\{1,2,\cdots,4(2p+q)/\gamma\}$ 和 $\{\{1,2,\cdots,2(2p+q)/\gamma\}$ 中进行模 $4(2p+q)/\gamma$ 和模 $2(2p+q)/\gamma$ 的运算。

对于每一个正整数 i，x，y，z，$1\le I\le p$，$0\le x\le 1$ 和 $0\le y\le 3$，令 $f(x)=2(2p+q)x/\gamma$，$g(i,y)=4(i-1)+y+1$，$h(i,y)=4(i-1)+y$ 并构作如下边集

$$E_i=\left\{x_{i,f(x)+j}y_{g(i,y),h(i,y)+j}:1\le j\le 2(2p+q)/\gamma, 0\le x\le 1, 0\le y\le 3\right\}。$$

对于每一个正整数 i，x，y，z，$1\le i\le q$ 和 $0\le x$，y，$z\le 1$，令 $u(x,y)=(2p+q)(2x+y)/\gamma$，$v(i,y,z)=4p+2(i-1)+(2p+q)y/\gamma+z$ 并构作如下边集

$$E_{p+i}=\left\{x_{p+i,u(x,y)+j}y_{4p+i,v(i,y,z)+j}:1\le j\le 2(2p+q)/\gamma, 0\le x,y,z\le 1\right\}。$$

令 $F=\cup_{1\le i\le p+q}E_i$，则图 F 就是 $\gamma K_{m,n}$ 的一个 $K_{2,4}$-因子。定义 $X\cup Y$ 到 $X\cup Y$ 上的双射 $\sigma:\sigma\left(x_{i,j}\right)=x_{i+1,j}$，$\sigma\left(y_{i,j}\right)=y_{i+1,j}$。对于每一个 $i\in\{1,2,\cdots,r_1\}$ 和每一个 $j\in\{1,2,\cdots,r_2\}$，令

$$F_{i,j}=\left\{s^i\left(x_j\right)s^j\left(y_j\right) \middle| x\in X. y\in Y, xy\in F\right\}。$$

易证每一个图 $F_{i,j}\left(1\le i\le r_1, 1\le i\le r_2\right)$ 都是 $\gamma K_{m,n}$ 的 $K_{2,4}$-因子。于它们边集的并构成 $\gamma K_{m,n}$，因此 $\left\{F_{i,j} \middle| 1\le i\le r_1, 1\le i\le r_2\right\}$ 就是 $\gamma K_{m,n}$ 的一个 $K_{2,4}$-因子分解。

引理得证。

DOI: 10.12677/pm.2019.92023

以下引理的证明同引理 2.5 相类似，因此我们只写出其中 X，Y，E_i 和 E_{p+i} 的表达式。

引理 2.6： 对于任意正整数 γ，p 和 q，如果 $m=4(p+2q)(p+q)/\gamma$，$n=4(2p+q)(p+q)/\gamma$，则当 $(2p+q)/\gamma$ 是正整数时，$\gamma K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。

证明： 记 $a=2p(p+q)/\gamma$，$b=2q(p+q)/\gamma$，$r=(p+2q)(2p+q)$，$r_1=p+2q$ 和 $r_2=2p+q$。并令

$$X=\left\{x_{i,j}\,\middle|\,1\le i\le r_1,1\le j\le 4(p+q)/\gamma\right\},$$

$$Y=\left\{y_{i,j}\,\middle|\,1\le i\le r_2,1\le j\le 4(p+q)/\gamma\right\}。$$

对于每一个正整数 i,x,y,z，$1\le i\le p,0\le x,y,z\le 1$，令 $f(x)=2(p+q)x/\gamma$，$g(i,y)=2(i-1)+y+1$，$h(i,y,z)=4(i-1)+y+4(p+q)z/\gamma$ 并构作如下边集

$$E_i=\left\{x_{i,f(x)+j}y_{g(i,y),h(i,y,z)+j}:1\le j\le 2(p+q)/\gamma,0\le x,y,z\le 1\right\}。$$

对于每一个正整数 i,x,y,z，$1\le i\le q,0\le x,y,z\le 1$，令 $f(x)=2(p+q)x/\gamma$，$g(i,y)=2(i-1)+y+1$，$u(i,y,z)=2p+2(p+q)z/\gamma+2(i-1)+y+1$ 并构作如下边集

$$E_{p+i}=\left\{x_{p+g(i,y),f(x)+j}y_{2p+i,u(i,y,z)+j}:1\le j\le 2(p+q)/\gamma,0\le x,y,z\le 1\right\}。$$

引理 2.7： 对于任意正整数 γ，p 和 q，如果 $m=2(p+8q)(p+4q)/\gamma$，$n=4(p+2q)(p+4q)/\gamma$。则当 $(p+4q)/\gamma$ 是正整数时，$\gamma K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。

证明： 记 $a=p(p+4q)/\gamma$，$b=4q(p+4q)/\gamma$，$r=(p+8q)(p+2q)$，$r_1=p+8q$ 和 $r_2=p+2q$。并令

$$X=\left\{x_{i,j}\,\middle|\,1\le i\le r_1,1\le j\le 2(p+4q)/\gamma\right\},$$

$$Y=\left\{y_{i,j}\,\middle|\,1\le i\le r_2,1\le j\le 4(p+4q)/\gamma\right\}。$$

对于每一个正整数 i，x，y，$1\le i\le p$，$0\le x\le 1$ 和 $0\le y\le 3$，令 $f(x)=(p+4q)x/\gamma$，$g(i,y)=i-1+(p+4q)y$，并构作如下边集

$$E_i=\left\{x_{i,f(x)+j}y_{i,g(i,y)+j}:1\le j\le (p+4q)/\gamma,0\le x\le 1,0\le y\le 3\right\}。$$

对于每一个正整数 i,x,y,z,w，$1\le i\le q,0\le y,w\le 1$ 和 $0\le x,z\le 3$，令 $h(i,x,y)=p+8(i-1)+2x+y$，$u(i,x,w)=p+4(i-1)+x+(p+4q)w/\gamma$ 并构作如下边集

$$E_{p+i}=\{x_{h(i,x,y),(p+4q)z/\gamma+j}y_{p+2(i-1)+y,u(i,x,w)+j}:1\le j\le (p+4q)/\gamma,0\le y,w\le 1\text{和}0\le x,z\le 3\}。$$

引理 2.8： 对于任意正整数 γ，p 和 q，如果 $m=2(p+16q)(p+8q)/\gamma$，$n=4(p+4q)(p+8q)/\gamma$。则当 $(p+8q)/\gamma$ 是正整数时，$\gamma K_{m,n}$ 存在 $K_{2,4}$-因子分解。

证明： 记 $a=p(p+8q)/\gamma$，$b=8q(p+8q)/\gamma$，$r=(p+16q)(p+4q)$，$r_1=p+16q$ 和 $r_2=p+4q$。并令

$$X=\left\{x_{i,j}\,\middle|\,1\le i\le r_1,1\le j\le 2(p+8q)/\gamma\right\},$$

$$Y=\left\{y_{i,j}\,\middle|\,1\le i\le r_2,1\le j\le 4(p+8q)/\gamma\right\}。$$

对于每一个正整数 i，x，y，满足 $1\le i\le p$，$0\le x\le 1$ 和 $0\le y\le 3$，令 $f(x)=(p+8q)x/\gamma$，$g(i,y)=(p+8q)y/\gamma+i-1$，并构作如下边集

$$E_i=\left\{x_{i,f(x)+j}y_{i,g(i,y)+1}:1\le j\le (p+8q)/\gamma,0\le x\le 1,0\le y\le 3\right\}。$$

对于每一个正整数 i，x，y，z，s，t，且 $1\le i\le q$，$0\le x\le 3$，$0\le y$，z，s，$t\le 1$，令 $h(i,x,y,z)=p+16(i-1)+4x+2y+z+1$，$u(s)=(p+8q)s/\gamma, v(i,x)=p+4(i-1)+x+1$，$w(i,x,y,t)=p+8(i-1)+2x+y+1+(p+8q)y/\gamma+(p+8q)t/\gamma$ 并构作如下边集

$$E_{p+i}=\left\{x_{h(i,x,y,z),u(s)+j}y_{v(i,x),w(i,x,y,t)+j}:1\le j\le(p+8q)/\gamma, 0\le x\le 3, 0\le y,z,s,t\le 1\right\}。$$

定理 1.1 的证明：定理 1.1 必要性的证明显然。结合引理 2.2 和引理 2.8，即可完成定理 1.1 充分性的证明。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11571251)。

参考文献

[1] Ushio, K. (1993) *G*-Designs and Related Designs. *Discrete Mathematics*, **116**, 299-311. https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90408-L

[2] Harary, F. (1972) Graph Theory. Addison-Wesley, Massachusetts.

[3] Yamamoto, S., Tazawa, S., Ushio, K. and Ikede, H. (1979) Design of a Generalized Balanced Multiple-Valued File Organization Scheme with the Least Redundancy. *ACM Transactions on Database Systems*, **4**, 518-530. https://doi.org/10.1145/320107.320123

[4] Ushio, K. (1988) P_3-Factorization of Complete Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **72**, 361-366. https://doi.org/10.1016/0012-365X(88)90227-0

[5] Wang, J. and Du, B.L. (2003) P_3-Factorization of Complete Bipartite Multigraphs and Symmetric Complete Bipartite Multi-Digraphs. *Utilitas Mathematica*, **63**, 213-228.

[6] Martin, N. (2004) Unbalanced Star-Factorisations of Complete Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **283**, 159-165. https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.01.003

[7] Martin, N. (2006) Unbalanced Bipartite Factorisations of Complete Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **306**, 2084-2090. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.04.004

[8] Wang, J. and Du, B.L. (2004) $K_{p,q}$-Factorization of the Complete Bipartite Graph $K_{m,n}$. *Discrete Mathematics*, **283**, 283-287. https://doi.org/10.1016/j.disc.2003.12.013

[9] 朱莉, 王建. 完全二部多重图的 $K_{2,3}$-因子分解[J]. 大学数学, 2011(27): 70-74.