Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(2), 237-242
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.92030

Hans汉斯

Green's Relations of Semigroup Monotone and *k*-Preserving Transformations

Yan Sun

School of Mathematics, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou
Email: 371574568@qq.com

Received: Mar. 6th, 2019; accepted: Mar. 20th, 2019; published: Mar. 27th, 2019

Abstract

Let $X_n = \{1,2,\cdots,n\}$ denote a finite set, $Sing_n$ is Singular transformation semigroups on it. O_n and R_n is Order-preserving and anti-order-preserving transformation semigroups of $Sing_n$. Let $OR_n(k) = \{\alpha \in O_n : k\alpha = k\} \cup \{\alpha \in R_n : k\alpha = k\}$, this paper describes Green's relations of $OR_n(k)$.

Keywords

Order Preserving, Transformation Semigroups, Green's Relations

单调保k变换半群$OR_n(k)$的Green关系

孙　艳

贵州师范大学，数学科学学院，贵州　贵阳
Email: 371574568@qq.com

收稿日期：2019年3月6日；录用日期：2019年3月20日；发布日期：2019年3月27日

摘　要

设$X_n = \{1,2,\cdots,n\}$是有限集，$Sing_n$是X_n上的奇异变换半群，O_n和R_n是$Sing_n$上的保序变换之集和反保序变换之集，令$OR_n(k) = \{\alpha \in O_n : k\alpha = k\} \cup \{\alpha \in R_n : k\alpha = k\}$，刻画了半群$OR_n(k)$的Green关系。

关键词

保序，变换半群，Green关系

文章引用：孙艳. 单调保 k 变换半群$OR_n(k)$的 Green 关系[J]. 理论数学, 2019, 9(2): 237-242.
DOI: 10.12677/pm.2019.92030

1. 引言与准备

众所周知，半群的Green关系研究对于半群代数理论的形成和发展起了极其重要的作用，是研究半群的秩、组合数等的重要内容之一，许多学者对其进行了研究[1] [2] [3]。本文考虑 $OR_n(k)$ 的Green关系，标准定义及未解释符号请参考文献[4]。

设 $X_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 并赋予自然序，T_n 是 X_n 上的全变换半群，$Sing_n=\{\alpha\in T_n:|im\alpha|<n\}$ 是 X_n 上的奇异变换半群。设 $\alpha\in Sing_n$，若对任意 $x,y\in X_n$，有 $x\le y\Rightarrow x\alpha\le y\alpha\,(x\le y\Rightarrow x\alpha\ge y\alpha)$，称 α 是保序(反序)的。设 O_n 和 R_n 分别为 $Sing_n$ 上的保序变换之集和反保序变换之集，则 O_n 是 $Sing_n$ 的子半群，称 O_n 为 $Sing_n$ 上的保序变换半群。对任意 $1\le k\le n$，令

$$O_n(k)=\{\alpha\in O_n:k\alpha=k\},$$

$$R_n(k)=\{\alpha\in R_n:k\alpha=k\},$$

则 $O_n(k)$ 和 $R_n(k)$ 是 $Sing_n$ 的子集。

定义1：设 $1\le k\le n$，令

$$OR_n(k)=O_n(k)\cup R_n(k),$$

显然，$OR_n(k)$ 在变换的合成下构成 $Sing_n$ 的一个子半群，称之为单调保 k 变换半群。

定义2：设 S 是半群，$a\in S,B\subseteq S$ 及 $aB=\{ab:b\in B\}$，则下列五个关系：

$$L=\{(a,b):a,b\in S,S^1a=S^1b\},$$

$$R=\{(a,b):a,b\in S,aS^1=bS^1\},$$

$$D=L\cdot R,$$

$$H=L\cap R,$$

$$J=\{(a,b):a,b\in S,S^1aS^1=S^1bS^1\}$$

统称为半群 S 上的Green关系。显然，每个 D_类是一些 L_类与一些 R_类的无交并。因此，每个 D_类都具有矩阵结构(称为蛋盒图)，该矩阵的每一行是一个 R_类，每一列是一个 L_类，行与列的交叉位置是由 R_类与 L_类共同决定的 H_类，且有限变换半群中 $D=J$。

2. 主要结果及证明

设 $A_i,A_j\subseteq X_n$，对任意 $x\in A_i,y\in A_j$，都有 $x<y$，记作 $A_i<A_j$。

设 $1\le k\le n$，$\alpha\in OR_n(k)$，记：

$$P_\alpha(k)=\{y\in im(\alpha):y<k\},p_\alpha(k)=|P_\alpha(k)|;$$

$$Q_\alpha(k)=\{y\in im(\alpha):y<k\},q_\alpha(k)=|Q_\alpha(k)|;$$

易知，对于 $A_1<A_2<\cdots<A_{p_\alpha(k)}<K_\alpha<B_1<B_2<\cdots<B_{q_\alpha(k)}$（$K_\alpha$ 表示 α 中 k 所在的核类)，半群 $OR_n(k)$ 的元素 α 有如下标准表示：

情形1：元素 $\alpha \in O_n(k)$：

$$\begin{pmatrix} A_i \left| \begin{matrix} \\ a_i \in P_\alpha(k) \\ \end{matrix} \right. & K_\alpha & B_j \left| \begin{matrix} \\ b_j \in Q_\alpha(k) \\ \end{matrix} \right. \\ a_i \,|\, i=1,2,\cdots,p_\alpha(k) & k & b_j \,|\, j=1,2,\cdots,q_\alpha(k) \end{pmatrix}$$

注1：当 $P_\alpha(k)=0$ 时，K_α 是 α 中最小的核类；当 $q_\alpha(k)=0$ 时，K_α 是 α 中最大的核类。

情形2：元素 $\alpha \in R_n(k)$：

$$\begin{pmatrix} A_i \left| \begin{matrix} \\ a_i \in Q_\alpha(k) \\ \end{matrix} \right. & K_\alpha & B_j \left| \begin{matrix} \\ b_j \in P_\alpha(k) \\ \end{matrix} \right. \\ a_i \,|\, i=1,2,\cdots,q_\alpha(k) & k & b_j \,|\, j=1,2,\cdots,p_\alpha(k) \end{pmatrix}$$

注2：当 $q_\alpha(k)=0$ 时，K_α 是 α 中最小的核类；当 $P_\alpha(k)=0$ 时，K_α 是 α 中最大的核类。

定理1： 设 $\alpha,\beta \in OR_n(k)$，则 $\alpha L \beta \Leftrightarrow im(\alpha)=im(\beta)$。

证明： 假设 $(\alpha,\beta)\in L$，则存在 $\delta,\gamma \in OR_n(k)$，使得 $\alpha=\delta\beta$ 且 $\beta=\gamma\alpha$，于是 $X_n\alpha=(X_n\delta)\beta$ 且 $X_n\beta=(X_n\gamma)\alpha$，从而 $im(\alpha)\subseteq im(\beta)$ 且 $im(\beta)\subseteq im(\alpha)$。因此 $im(\alpha)=im(\beta)$。反之，假设 $im(\alpha)=im(\beta)$，$\forall x\in X_n$，令

$$x\delta=\begin{cases}\min(x\alpha)\beta^{-1}, & x\in X_n\setminus\{k\},\\ k, & x=k;\end{cases}$$

$$x\gamma=\begin{cases}\min(x\beta)\alpha^{-1}, & x\in X_n\setminus\{k\},\\ k, & x=k;\end{cases}$$

则显然 $\alpha=\delta\beta$ 且 $\beta=\gamma\alpha$。且 $\delta,\gamma\in OR_n(k)$。因此，$(\alpha,\beta)\in L$。

定理2： 设 $\alpha,\beta\in OR_n(k)$，则 $\alpha R\beta \Leftrightarrow ker(\alpha)=ker(\beta)$。

证明： 假设 $(\alpha,\beta)\in R$，则存在 $\delta,\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha=\beta\delta$，$\beta=\alpha\gamma$。任取 $(x,y)\in ker(\alpha)$，若 $x\alpha=y\alpha$，则 $x\beta=(x\alpha)\gamma=(y\alpha)\gamma=y\beta$，从而 $(x,y)\in ker(\beta)$。由 x,y 的任意性可得，$ker(\alpha)\subseteq ker(\beta)$。同理可证得，$ker(\alpha)\supseteq ker(\beta)$。因此，$ker(\alpha)=ker(\beta)$。反之，假设 $ker(\alpha)=ker(\beta)$。不妨设

$$\alpha=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_l & k & b_1 & b_2 & \cdots & b_m\end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m\\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_l & k & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & \tilde{b}_m\end{pmatrix}$$

其中，$A_1<A_2<\cdots<A_l<K_\alpha<\cdots<B_1<B_2<\cdots<B_m$。下面分四种情形讨论：

情形1：设 $\alpha,\beta\in O_n(k)$，则 $a_1<\cdots<k<\cdots<b_m,\tilde{a}_1<\cdots<k<\cdots<\tilde{b}_m$ 令

$$\delta=\begin{pmatrix}[1,\tilde{a}_1] & (\tilde{a}_1,\tilde{a}_2] & \cdots & (\tilde{a}_l,k] & (k,\tilde{b}_1] & \cdots & (\tilde{b}_{m-1},n]\\ a_1 & a_2 & \cdots & k & b_1 & \cdots & b_m\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}[1,a_1] & (a_1,a_2] & \cdots & (a_l,k] & (k,\tilde{b}_1] & \cdots & (b_{m-1},n]\\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & k & b_1 & \cdots & \tilde{b}_m\end{pmatrix}$$

从而存在 $\delta,\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha=\beta\delta,\beta=\alpha\gamma$。

情形2：设 $\alpha,\beta\in R_n(k)$，则 $a_1>\cdots>k>\cdots>b_m,\tilde{a}_1>\cdots>k>\cdots>\tilde{b}_m$

令

$$\delta=\begin{pmatrix}[1,\tilde{b}_m] & \cdots & (\tilde{b}_1,k] & (k,\tilde{a}_l] & \cdots & (\tilde{a}_2,n] \\ b_m & \cdots & k & a_l & \cdots & a_1\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}[1,b_m] & \cdots & (b_1,k] & (k,a_l] & \cdots & (a_1,n] \\ \tilde{b}_m & \cdots & k & \tilde{a}_l & \cdots & \tilde{a}_1\end{pmatrix}$$

从而存在 $\delta,\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha=\beta\delta,\beta=\alpha\gamma$。

情形3：设 $\alpha\in O_n(k),\beta\in R_n(k)$，则 $a_1<\cdots<k<\cdots<b_m,\tilde{a}_1>\cdots>k>\cdots>\tilde{b}_m$。

令

$$\delta=\begin{pmatrix}[1,\tilde{b}_m] & \cdots & (\tilde{b}_1,k] & (k,\tilde{a}_l] & \cdots & (\tilde{a}_2,n] \\ b_m & \cdots & k & a_l & \cdots & a_1\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}[1,a_1] & (a_1,a_2] & \cdots & (a_l,k] & (k,b_1] & \cdots & (b_{m-1},n] \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & k & \tilde{b}_1 & \cdots & \tilde{b}_m\end{pmatrix}$$

从而存在 $\delta,\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha=\beta\delta,\beta=\alpha\gamma$。

情形4：设 $\alpha\in R_n(k),\beta\in O_n(k)$，则 $a_1>\cdots>k>\cdots>b_m,\tilde{a}_1<\cdots<k<\cdots<\tilde{b}_m$，

$$\delta=\begin{pmatrix}[1,\tilde{a}_1] & (\tilde{a}_1,\tilde{a}_2] & \cdots & (\tilde{a}_l,k] & (k,\tilde{b}_1] & \cdots & (\tilde{b}_{m-1},n] \\ a_1 & a_2 & \cdots & k & b_1 & \cdots & b_m\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}[1,b_m] & \cdots & (b_1,k] & (k,a_l] & \cdots & (a_1,n] \\ \tilde{b}_m & \cdots & k & \tilde{a}_l & \cdots & \tilde{a}_1\end{pmatrix},$$

从而存在 $\delta,\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha=\beta\delta,\beta=\alpha\gamma$。

综上，$(\alpha,\beta)\in R$。

定理3： 设 $\alpha\in OR_n(k)$，$\alpha D\beta\Leftrightarrow|im(\alpha)|=|im(\beta)|$，$p_\alpha(k)=p_\beta(k)$ 或 $p_\alpha(k)=q_\beta(k)$。

证明： 必要性 先证 $(\alpha,\beta)\in D\Rightarrow|im(\alpha)|=|im(\beta)|$。

假设 $(\alpha,\beta)\in D$，则存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使得 $\alpha L\gamma$ 且 $\gamma R\beta$。由定理(1) (2)可得，$im(\alpha)=im(\gamma)$，$ker(\gamma)=ker(\beta)$，从而

$$|im(\alpha)|=|im(\gamma)|=|X_n/ker(\gamma)|=|X_n/ker(\beta)|=|im(\beta)|。$$

再证 $(\alpha,\beta)\in D\Rightarrow p\alpha(k)=p\beta(k)$ 或 $p\alpha(k)=q\beta(k)$。

假设 $(\alpha,\beta)\in D$，则存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使得 $\alpha L\gamma$ 且 $\gamma R\beta$。则 $im(\alpha)=im(\gamma)$，$ker(\gamma)=ker(\beta)$，分以下八种情形：

情形1：设 $\alpha,\beta,\gamma\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=p_\beta(k)$；

情形2：设 $\alpha,\gamma\in O_n(k),\beta\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=q_\beta(k)$；

情形3：设 $\alpha,\beta\in O_n(k),\gamma\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=q_\beta(k)$；

情形4：设 $\beta,\gamma\in O_n(k),\alpha\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=p_\beta(k)$；

情形5：设 $\alpha,\beta,\gamma\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=p_\beta(k)$；

情形6：设 $\alpha,\gamma\in R_n(k),\beta\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=q_\beta(k)$；

情形7：设 $\alpha,\beta\in R_n(k),\gamma\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=q_\beta(k)$；

情形8：设 $\beta,\gamma\in R_n(k),\alpha\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\gamma(k)=q_\beta(k)$。

充分性：假设 $|im(\alpha)|=|im(\beta)|=r$，设

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_l & k & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

$$\beta=\begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 & \cdots & \tilde{A}_l & K_\alpha & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 & \cdots & \tilde{B}_j \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_l & k & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & \tilde{b}_j \end{pmatrix}$$

其中，$A_1<A_2<\cdots<A_l<K_\alpha<\cdots<B_1<B_2<\cdots<B_m$，$\tilde{A}_1<\tilde{A}_2<\cdots<\tilde{A}_i<K_\beta<\cdots<\tilde{B}_1<\tilde{B}_2<\cdots<\tilde{B}_j$，$l+m=i+j=r-1$。

情形1：$p_\alpha(k)=p_\beta(k)$，分四种情形：

子情形 1：设 $\alpha,\beta\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\beta(k)=l=i,m=j$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_l & k & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & \tilde{b}_j \end{pmatrix}\in O_n(k)$$

从而存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha R\gamma,\gamma L\beta$，即 $\alpha D\beta$。

子情形2：$\alpha,\beta\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\beta(k)=m=j,l=i$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_l & k & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & \tilde{b}_j \end{pmatrix}\in R_n(k)$$

从而存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha R\gamma,\gamma L\beta$，即 $\alpha D\beta$。

子情形3：设 $\alpha\in O_n(k)$，$\beta\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\beta(k)=l=j,m=i$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{b}_j & \tilde{b}_{j-1} & \cdots & \tilde{b}_l & k & \tilde{a}_i & \tilde{a}_{i-1} & \cdots & \tilde{a}_1 \end{pmatrix}\in O_n(k)$$

从而存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha R\gamma,\gamma L\beta$，即 $\alpha D\beta$。

子情形4：设 $\alpha\in R_n(k)$，$\beta\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=p_\beta(k)=m=i,l=j$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{b}_j & \tilde{b}_{j-1} & \cdots & \tilde{b}_l & k & \tilde{a}_i & \tilde{a}_{i-1} & \cdots & \tilde{a}_1 \end{pmatrix}\in R_n(k)$$

从而存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha R\gamma,\gamma L\beta$，即 $\alpha D\beta$。

情形2：$p_\alpha(k)=q_\beta(k)$，分四种情形：

子情形1：设 $\alpha,\beta\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=q_\beta(k)=l=j,m=i$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{b}_j & \tilde{b}_{j-1} & \cdots & \tilde{b}_l & k & \tilde{a}_i & \tilde{a}_{i-1} & \cdots & \tilde{a}_1 \end{pmatrix}\in R_n(k)$$

从而存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha R\gamma,\gamma L\beta$，即 $\alpha D\beta$。

子情形2：设 $\alpha,\beta\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=q_\beta(k)=m=i,l=j$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{b}_j & \tilde{b}_{j-1} & \cdots & \tilde{b}_l & k & \tilde{a}_i & \tilde{a}_{i-1} & \cdots & \tilde{a}_1 \end{pmatrix}\in O_n(k)$$

从而存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha R\gamma,\gamma L\beta$，即 $\alpha D\beta$。

子情形3：设 $\alpha\in O_n(k)$， $\beta\in R_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=q_\beta(k)=l=i,m=j$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_l & k & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & \tilde{b}_j \end{pmatrix}\in R_n(k)$$

从而存在 $\gamma\in OR_n(k)$，使 $\alpha R\gamma,\gamma L\beta$，即 $\alpha D\beta$。

子情形4：设 $\alpha\in R_n(k)$， $\beta\in O_n(k)$，则 $p_\alpha(k)=q_\beta(k)=m=j,l=i$，令

$$\gamma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_l & K_\alpha & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \tilde{a}_1 & \tilde{a}_2 & \cdots & \tilde{a}_l & k & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \cdots & \tilde{b}_j \end{pmatrix}\in O_n(k)$$

因此， $\alpha R\gamma L\beta$ 且 $\gamma\in OR_n(k)$，从而 $\alpha D\beta$。

参考文献

[1] 陈先军. 保整除变换半群的 Green 关系及一些组合结果[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2010, 28(2): 93-114.

[2] Deng, L.Z., Zeng, J.W. and Xu, B. (2010) Green's Relations and Regularity for Semigroups of Transformations That Preserve Double Direction Equivalence. *Semigroup Forum*, **80**, 416-425.

[3] 龙伟锋, 龙伟芳, 高荣海. TE(X)中局部方向保序变换半群的 Green 关系和正则性[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 2009, 27(2): 79-82.

[4] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, Oxford.