Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 259-264
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93033

Hans汉斯

Graceful Labeling of Graphs $P_n \curlyvee S_m$

Qi Guo[1], Chunfeng Liu[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun Jilin
[2]College of Science, Liaoning University of Technology, Jinzhou Liaoning
Email: 291665249@qq.com, Liuchunfeng968@163.com

Received: Apr. 9th, 2019; accepted: Apr. 20th, 2019; published: May 5th, 2019

Abstract

The labeling of a graph G is injection g of the labels of vertices to a set of integers, and the labels of each edge $e = uv$ are induced by the $g(u)$ and $g(v)$. In the paper, we obtain the graceful labeling for graphs $P_n \curlyvee S_m$, which proves its gracefulness, and then extend the original results.

Keywords

Graceful Graph, Vertex Degree, Vertex Labelling

图$P_n \curlyvee S_m$的优美标号

郭　奇[1]，刘春峰[2]

[1]东北师范大学数学与统计学院，吉林 长春
[2]辽宁工业大学理学院，辽宁 锦州
Email: 291665249@qq.com, Liuchunfeng968@163.com

收稿日期：2019年4月9日；录用日期：2019年4月20日；发布日期：2019年5月5日

摘　要

图G的标号是指G的顶点集到一个整数集的映射g，且对$e = uv \in E(G)$由$g(u)$和$g(v)$诱导出边e的标号。本文给出了图$P_n \curlyvee S_m$的优美性。即证明了图$P_n \curlyvee S_m$是优美图。进而推广了原有的一些结果。

关键词

优美图，顶点的度，顶点标号

文章引用：郭奇，刘春峰．图$P_n \curlyvee S_m$的优美标号[J]．理论数学, 2019, 9(3): 259-264.
DOI: 10.12677/pm.2019.93033

1. 引言

图的标号理论在编码、雷达、通信网络、射电天文学、密码设计、导弹控制码设计等方面均有广泛的应用。现实生活中的许多问题都可抽象为图的标号问题。在天文学和晶体学中的一些问题的解决需要研究图的标号，特别是优美标号。如在天文学中天文台希望发射的信号互相不发生干扰，发射的信号频率互不相同，并且这些信号的频率差距也互不相同。这些问题可化为图的优美标号来解决。优美图是图论中重要的研究领域之一，有较好的应用价值和广阔的研究前景。1963 年 G. Ringel 提出了一个猜想[1]，1960 年 A. Rosa 给出了第一篇论文[2]。1972 年，S. W. Gomomb 明确给出了优美图的定义[3]。近年来，在图的标号理论，特别是优美图方面，国内外获得了很多研究成果[4]。我们在图的标号理论方面也得到了一些结果[5]-[10]。

本文仅考虑没有孤立点的简单图，文中用 $V(G)$和 $E(G)$分别表示图 G 顶点集和边集，简记为 $V(G) = V$ 和 $E(G) = E$。本文将讨论图 $P_n \curlyvee S_m$ 的优美性。文中未提及的术语见[11]。

定义 1 称图 $G=(V,E)$ 是 k-优美(k-*graceful*)图，如果对任何正整数 k，

$$f:V(G)\to\{0,1,2,\cdots,|E|+k-1\}$$

使得由

$$f'(uv)=|f(u)-f(v)|$$

所导出的函数对所有的边 $e=uv\in E(G)$，其映射 $E(G)\to\{k,k+1,\cdots,k+|E|-1\}$ 是一个双射。则称 f 为 G 的一个 k-优美标号。显然 k-优美图，当 $k = 1$ 时，就是通常所说的优美图。

用 P_n 和 S_m 分别代表 n 个顶点的路和 m 个顶点的星，设 $V(P_n)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{n-1},v_n\}$，$V(S_m)=\{u_0,u_1,\cdots,u_{m-1}\}$，不妨在图 P_n 和 S_m 中分别设，$d(v_1)=d(v_n)=1$，$d(u_0)=m-1$。用 P_n 和 S_m 构造一个新图，记为 $P_n \curlyvee S_m$，其中图 $P_n \curlyvee S_m$ 是把 P_n 中的一个 1 度点与 S_m 的 r 个($0\le r\le m$)顶点依次相连后得到的图，文中设在 $P_n \curlyvee S_m$ 中只有 P_n 的 1 度点 v_1 与 S_m 中的 r 个顶点依次相连。在 $P_n \curlyvee S_m$ 中，若 $u_0v_1\notin E$ ($P_n \curlyvee S_m$)，记 $G_0=P_n \curlyvee S_m$，否则记 $G_1=P_n \curlyvee S_m$，记 $G_2=G_1\cup\{u_0v_2\}$。如图 1~3 所示。

本文得到了图 G_i ($I = 1, 2, 3$)是优美图，且 G_0 是 k-优美图，从而推广了[12]中的结果。

2. 主要结果及证明

定理 2.1 图 G_i ($i = 0, 1, 2$)是优美图，且 G_0 是 k-优美图。

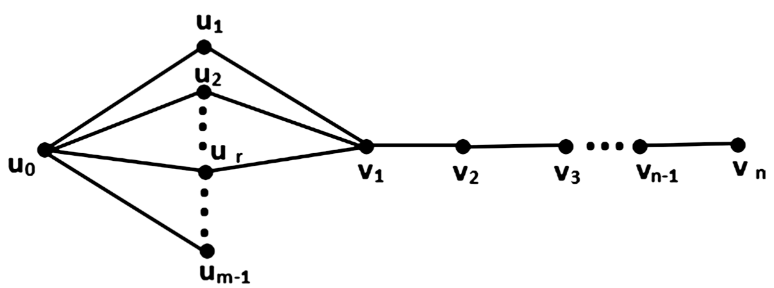

Figure 1. G_0
图 1. 图 G_0

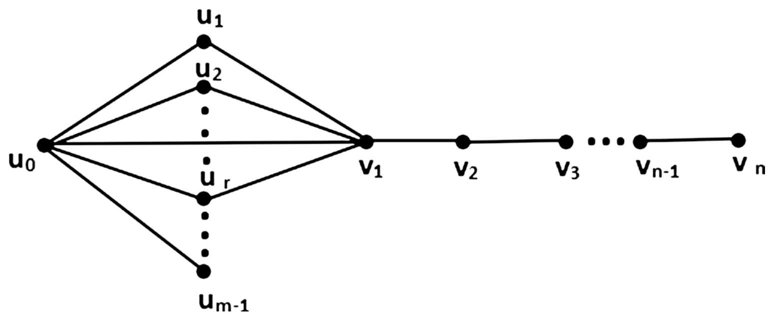

Figure 2. G_1
图 2. 图 G_1

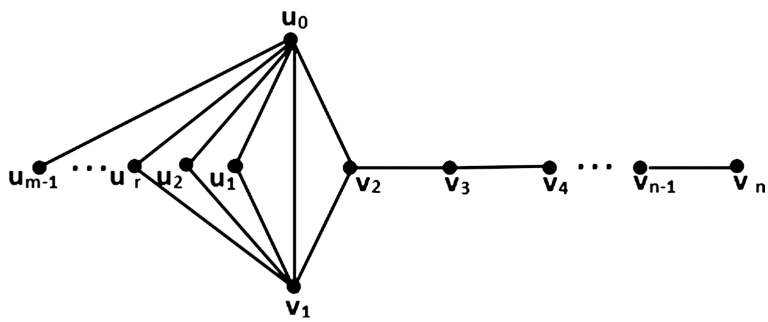

Figure 3. G_2
图 3. 图 G_2

在图 G_i (i = 0, 1, 2)中，有 $|V(G_i)| = m+n\,(i=0,1,2)$，$|E(G_i)| = m+n+r-2\,(i=0,1,2)$，$|E(G_2)| = m+n+r-1$。在 G_0 中，由于 $u_0v_1 \notin E(G_0)$，不妨设，$v_1u_i \in E(G_0)(i=1,2,\cdots,r)$；在 G_1 中，由于 $u_0v_1 \in E(G_0)$，不妨设，$v_1u_i \in E(G_0)(i=1,2,\cdots,r-1)$；在 G_0 中，由于 $u_0v_1, u_0v_2 \in E(G_2)$，不妨设 $v_1u_i \in E(G_0)(i=1,2,\cdots,r-2)$。

2.1. 证明 G_0 是 k-优美图

分两种情况证明 G_0 是 k-优美图。

情况 1 $n \equiv 0 \pmod 2$

定义 G_0 的顶点标号 f 为：

$$f(u_0) = 0,$$

$$f(u_i) = n+k-2+2i,\ \ i=1,2,\cdots,r,$$

$$f(u_{r+i}) = n+k-2+2r+i,\ \ i=1,2,\cdots,m-r-1,$$

$$f(v_{2i-1}) = i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},$$

$$f(v_{2i}) = n+k-i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

由 f 的定义有，f 是 $V(G_0)$到 $\{0,1,2,\cdots,n+m+r+k-3\}$ 的一个单射。

图 G_0 中，$\forall x,y \in V(G_0)$，$x \neq y$，$f(x) \neq f(y)$，$\max\{f(x) \mid x \in V(G_0)\} = f(u_{m-1}) = |E(G_0)| + k - 1$。

$\forall e = xy \in E(G_0)$，由 $f'(xy) = |f(x) - f(y)|$ 易推得，$\forall e_1, e_2 \in E(G_0)$，若 $e_1 \neq e_2$，有 $f(e_1) \neq f(e_2)$，且有 $\max\{f(e) | e \in E(G_0)\} = |f(u_{m-1}) - f(u_0)| = f(u_{m-1}) = |E(G_0)| + k - 1$。事实上，设 $A_1 = E(P_n)$，$A_2 = \{v_1u_i | i = 1, 2, \cdots, r\}$，$A_3 = \{u_0u_i | i = 1, 2, \cdots, r\}$，$A_4 = \{u_0u_i | i = r+1, \cdots, m-1\}$。于是有

$$\begin{aligned} I_1 &= \{f'(e) | e \in E(P_n)\} = \left\{f(u_{2i}) - f(v_{2i-1}) | i = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}\right\} \\ &= \left\{n + k - 2i | i = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}\right\} = \{k, k+1, \cdots, n+k-3, n+k-2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \{f'(e) | e \in E(P_n)\} = \{f(u_i) - f(v_1) | i = 1, 2, \cdots, r\} \\ &= \{n + k - 3 + 2i | i = 1, 2, \cdots, r\} = \{n+k-1, n+k+1, \cdots, n+k-3+2r\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \{f'(e) | e \in A_3\} = \{f(u_i) - f(u_0) | i = 1, 2, \cdots, r\} \\ &= \{n + k - 2 + 2i | i = 1, 2, \cdots, r\} = \{n+k, n+k+2, \cdots, n+k-2+2r\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \{f'(e) | e \in A_4\} = \{f(u_{r+i}) - f(u_0) | i = 1, 2, \cdots, m-1-r\} \\ &= \{n + k - 2 + 2r + 2i | i = 1, 2, \cdots, m-1-r\} \\ &= \{n+k-1+2r, n+k+2r, \cdots, m+n+k-3\}. \end{aligned}$$

由集合 $I_i\ (i = 1, 2, 3, 4)$，有 $I_i \cap I_j = \varnothing$，$i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4$，且 $\forall e_1, e_2 \in E(G_0)$，若 $e_1 \neq e_2$，有 $f(e_1) \neq f(e_2)$。于是得 f 是 G_0 的 k-优美标号。

情况 2 $n \equiv 1 \pmod 2$

定义 G_0 的顶点标号 f 为：

$$f(u_0) = 0,$$
$$f(u_i) = n + k - 2 + 2i,\ i = 1, 2, \cdots, r,$$
$$f(u_{r+i}) = n + k - 2 + 2r + i,\ i = 1, 2, \cdots, m - r - 1,$$
$$f(v_{2i-1}) = i,\ i = 1, 2, \cdots, \frac{n+1}{2},$$
$$f(v_{2i}) = n + k - i,\ i = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}.$$

类似情况 1 的论证，在情况中易验证 f 是 G_0 的 k-优美标号。

2.2. 证明 G_1 是优美图

分两种情况证明 G_1 是优美图。

情况 1 $n \equiv 0 \pmod 2$

定义 G_1 的顶点标号 f 为：

$$f(u_0) = 0,$$
$$f(u_i) = n + 2i,\ i = 1, 2, \cdots, r,$$
$$f(u_{r+i}) = n + 2r + i,\ i = 1, 2, \cdots, m - r - 1,$$
$$f(v_{2i-1}) = i,\ i = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2},$$

$$f\left(v_{2i}\right)=n+2-i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

情况 2 $n\equiv 1\left(\operatorname{mod}2\right)$

定义 G_1 的顶点标号 f 为：

$$f\left(u_0\right)=0,$$

$$f\left(u_i\right)=n+2i,\ \ i=1,2,\cdots,r,$$

$$f\left(u_{r+i}\right)=n+2r+i,\ \ i=1,2,\cdots,m-r-1,$$

$$f\left(v_{2i-1}\right)=i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2},$$

$$f\left(v_{2i}\right)=n+2-i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}.$$

类似 2.1 的论证，易验证标号 f 是 G_1 的优美标号。

2.3. 证明 G_2 是优美图

分两种情况证明 G_2 是优美图。

情况 1 $n\equiv 0\left(\operatorname{mod}2\right)$

定义 G_2 的顶点标号 f 为：

$$f\left(u_0\right)=0,$$

$$f\left(u_i\right)=n+1+2i,\ \ i=1,2,\cdots,r,$$

$$f\left(u_{r+i}\right)=n+1+2r+i,\ \ i=1,2,\cdots,m-r-1,$$

$$f\left(v_{2i-1}\right)=i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2},$$

$$f\left(v_{2i}\right)=n+2-i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}.$$

情况 2 $n\equiv 1\left(\operatorname{mod}2\right)$

定义 G_2 的顶点标号 f 为：

$$f\left(u_0\right)=0,$$

$$f\left(u_i\right)=n+1+2i,\ \ i=1,2,\cdots,r,$$

$$f\left(u_{r+i}\right)=n+1+2r+i,\ \ i=1,2,\cdots,m-r-1,$$

$$f\left(v_{2i-1}\right)=i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n+1}{2},$$

$$f\left(v_{2i}\right)=n+2-i,\ \ i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}.$$

类似 2.1 的论证，标号 f 是 G_2 的优美标号。

定理 2.1 证毕。

参考文献

[1] Ringel, G. (1963) Problem 25 in Theory and Its Application. *Proceedings of the Symposium*, Smolenice, 57-162.

[2] Rosa, A. (1966) On Certain Valuations of the Vertices of a Graph. *Theory of Graphs*, *Proceedings of International*

Symposium, Rome, 349-355.
[3] Golomb, S.W. (1972) How to Number a Graph. In: Read, R.C., Ed., *Graph Theory and Computing*, Academic Press, New York, 23-37.
[4] Gallian, J.A. (2013) A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **16**, 33-69.
[5] 梁怀学, 刘春峰. 关于图的 K——优美性[J]. 东北师大学报, 1991(1): 41-44.
[6] 刘春峰, 赵连昌. m 重-四角鲜人掌图的优美性和序列性[J]. 吉林师范大学学报, 2006, 27(2): 4-6.
[7] 刘春峰. 关于联图优美性的一点注记[J]. 辽宁工学院学报, 2005, 5(25): 347-348.
[8] 刘春峰, 林跃进, 赵连昌. 路及其相关图的序列性[J]. 数学理论与应用, 2006, 4(26): 17-20.
[9] 刘春峰. 关于图的标号的一点注记[J]. 湖北民族学院学报, 1996(2): 82-83.
[10] 刘春峰. 链路 $P_n(m)$的优美性和序列性[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 723-729.
[11] 马克杰. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991.
[12] 索南仁欠. 一类图 $\varphi^*(n, k+1)$的优美性[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 2008, 31(1): 15-16.