Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 282-286
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93037

A Note on Cauchy Integral Formula

Hongying Si

College of Math Mathematics and Statistics, Shangqiu Normal University, Shangqiu Henan
Email: sihongying@126.com

Received: Apr. 14th, 2019; accepted: Apr. 25th, 2019; published: May 6th, 2019

Abstract

In this paper, according to integral calculation based on $\int_c \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z$ in Example 3.2, the integral value of Example 3.2 is calculated by the parametric equation method and the case 3.2 is generalized from the integral curve and the integrand function. First, the integral curve is generalized, and the circle with z_0 as the center and *r* as the radius is generalized to any closed curve containing z_0; after the promotion, this example has a wider scope of application. Secondly, the integrand function is promoted, $\frac{1}{z-z_0}$ is promoted to $\frac{f(z)}{z-z_0}$ and $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ respectively, the close relationship between the case 3.2 and the Cauchy integral formula and the high-order derivative formula of the analytic function is discussed further.

Keywords

Integral Curve, Cauchy Integral Formula, Higher Derivative Formula

柯西积分公式的一点注记

司红颖

商丘师范学院数学与统计学院，河南 商丘
Email: sihongying@126.com

收稿日期：2019年4月14日；录用日期：2019年4月25日；发布日期：2019年5月6日

摘 要

本文从例3.2计算积分 $\int_c \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z$ 出发，用参数方程法计算例3.2的积分值，并分别从积分曲线和被积

文章引用：司红颖. 柯西积分公式的一点注记[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 282-286. DOI: 10.12677/pm.2019.93037

函数两方面对例3.2进行推广。首先，把积分曲线进行推广，从以 z_0 为中心 r 为半径的圆推广到包含 z_0 的任一条闭曲线，推广后具有更广的适用范围。其次，把被积函数进行推广，由 $\frac{1}{z-z_0}$ 分别推广到 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 及 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$，进一步讨论了例3.2与柯西积分公式和解析函数高阶导数公式之间的密切联系。

关键词

积分曲线，柯西积分公式，高阶导数公式

1. 引言

复变函数积分的计算在复变函数课程的教学中有着举足轻重的地位，它是研究解析函数的一个重要工具，是人们讨论的热点问题[1] [2] [3] [4] [5]。但讨论最多的是复积分的计算方法[6] [7] [8] [9]以及复积分的应用[10] [11]。例 3.2 在复积分的计算中有着举足轻重的地位，它与柯西积分公式、高阶导数公式之间有着密切的联系，但是有关例 3.2 与柯西积分公式之间的文章却很少。本文就从例 3.2 出发，先用复积分计算的最基本的方法即参数方程法来求解例 3.2，再将例 3.2 推广，讨论例 3.2 与柯西积分公式和高阶导数公式之间的联系。

2. 回顾例 3.2

定理 1 [12] 若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 沿曲线 C 连续，则 $f(z)$ 沿 C 可积，且

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_c u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_c v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y. \tag{1}$$

此定理给出了复积分存在的条件，并给出了一个计算复积分的公式，该定理在文献[12]中用定义进行了证明，但对于工科的学生来说此证明有一定的难度，因此我直接推导出计算复积分的公式，从公式得出复积分存在的条件，学生更容易接受。

证 由 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$z=x+iy$，故

$$\begin{aligned}\int_c f(z)\mathrm{d}z&=\int_c (u+iv)\mathrm{d}(x+iy)\\&=\int_c (u+iv)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y)\\&=\int_c u\mathrm{d}x+iu\mathrm{d}y+iv\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y\\&=\int_c u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_c v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y\end{aligned}$$

这就把复积分的计算转化为第二类曲线积分的计算问题，而等号右端的第二类曲线积分存在的条件是二元函数 u,v 在曲线 C 上连续，从而 $f(z)$ 在曲线 C 上连续，于是得到 $f(z)$ 沿曲线 C 可积的条件是 $f(z)$ 在曲线 C 上连续，定理得证。

公式(1.1)说明，复变函数积分的计算问题可以化为其实部、虚部两个二元实函数曲线积分的计算问

题，曲线积分的计算对工科的学生来说也是一个难点，更进一步把复变函数积分的计算转化为定积分来求解。设有光滑曲线 $C\colon z=z(t)=x(t)+iy(t)\,(\alpha\le t\le\beta)$，这就表示 $z'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且有不为零的导数 $z=z'(t)=x'(t)+iy'(t)$。

又设 $f(z)$ 沿 C 连令 $f[z(t)]=u[x(t),y](t)+iv[x(t),y(t)]=u(t)+iv(t)$。

由公式(1.1)我们有

$$\begin{aligned}\int_c f(z)\mathrm{d}z&=\int_c u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+i\int_c v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y\\&=\int_\alpha^\beta\left[u(t)x'(t)-v(t)y'(t)\right]\mathrm{d}t+i\int_\alpha^\beta\left[u(t)y'(t)+v(t)x'(t)\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

即

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f\left[z(t)\right]z'(t)\mathrm{d}t, \tag{2}$$

或

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left\{f\left[z(t)\right]z'(t)\right\}\mathrm{d}t+i\int_\alpha^\beta \mathrm{Im}\left\{f\left[z(t)\right]z'(t)\right\}\mathrm{d}t. \tag{3}$$

用公式(1.2)或(1.3)计算复变函数的积分，是从积分路径 C 的参数方程出发的，称为参数方程法。

例 3.2 [13] 计算积分 $\int_c\frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z$，其中 n 为任意整数，C 为以 z_0 为中心，r 为半径的圆周。

解 C 的参数方程为：$z-z_0=r\mathrm{e}^{i\theta},0\le\theta\le 2\pi$。故

$$\begin{aligned}\int_c\frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi}\frac{ir\mathrm{e}^{i\theta}}{r^n\mathrm{e}^{in\theta}}\mathrm{d}\theta=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-i(n-1)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\cos(n-1)\theta\mathrm{d}\theta+\frac{1}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\sin(n-1)\theta\mathrm{d}\theta\\&=\begin{cases}2\pi i, & n=1;\\0, & n\ne 1.\end{cases}\end{aligned}$$

注：此例 3.2 中积分曲线 C 比较特殊是以 z_0 为中心，r 为半径的圆周，被积函数 $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 的奇点 z_0 刚好是 C 的圆心，如果 C 是包含 z_0 的任意闭曲线，则例 3.2 就不能直接用参数方程法来做了，下面讨论将例 3.2 推广后的情形。

3. 例 3.2 的推广形式

3.1. 将积分曲线推广

引理 2.1 (复合闭路定理)设 C 为复连通区域 D 的一条简单闭曲线，$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是在 C 内部的简单闭曲线，他们互不相交，互不包含，并且以 $C,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为边界的区域全含于 D，如果 $f(z)$ 在 D 内解析，则有

$$\int_c f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^n\int_{c_k}f(z)\mathrm{d}z$$

其中 C 及 $C_k\,(k=1,2,\cdots,n)$ 均取正方向。

证明见文献[13]。

例 3.2’ 计算积分 $\int_c \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z$，其中 n 为任意整数，C 为包含 z_0 的任意闭曲线。

解 以 z_0 为心，ρ 为半径的圆 C_1 包含于 C，将 z_0 挖去，由复合闭路定理

$$\int_c \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z = \int_{c_1} \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z$$

再根据例 3.2

$$\int_c \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z = \int_{c_1} \frac{1}{(z-z_0)^n}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i & n=1, \\ 0 & n\neq 1. \end{cases}$$

这是例 3.2 更为普遍的形式，适用的范围更广。

3.2. $n=1$ 时，将被积函数 $\frac{1}{z-z_0}$ 推广到 $\frac{f(z)}{z-z_0}$

在例 3.2’中，$n=1$ 时，将被积函数 $\frac{1}{z-z_0}$ 推广到 $\frac{f(z)}{z-z_0}$ 便得到我们的柯西积分公式。

定理 2 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析，在 $\bar{D}=D\cup C$ 上连续，z_0 是 D 内任一点，则

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

或

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$$

注：此定理的证明见[13]，此公式称为柯西积分公式，这个公式说明，如果一个函数在简单闭曲线 C 内部解析，在 C 上连续，则函数在 C 内部某一点的函数值完全可由 C 上的积分值而定；另一方面它也提供了一种计算简单闭曲线上复积分的一种方法。

3.3. $n\neq 1$ 时，将被积函数 $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 推广到 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$

在例 3.2’中，$n\neq 1$ 时，继续将被积函数 $\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 推广到 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$ 便得到我们的解析函数的高阶导数公式。

定理 3 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 所围成的区域 D 内解析，在 $\bar{D}=D\cup C$ 上连续，则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 内解析，对 D 内任一点 z_0，有

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \quad (n=1,2,\cdots)$$

此式叫做解析函数的高阶导数公式。可以从两个方面应用这个公式：一方面用求积分来代替求导数；另一方面则是用求导数的方法来计算复积分，即

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

从而为某些复积分的计算开辟了新的途径。

从以上讨论可知，例 3.2 与复积分计算的参数方程法，柯西积分公式和解析函数的高阶导数公式之间存在密切联系，了解它们之间的内在联系有助于我们更好地学习复积分的计算方法，而且可以帮助我们研究解析函数的许多重要性质。

基金项目

河南省高等学校重点项目(19A110031)，任务驱动下的复变函数教学研究与实践(2017jgxm26)。

参考文献

[1] 徐文莉. 复变函数积分计算与级数展开的教学探讨[J]. 考试周刊, 2015(95): 47-48.

[2] 王文鹏, 阙建华. 复变函数积分求解策略[J]. 重庆科技学院学报, 2007, 9(4): 145-147.

[3] 吴白旺. 利用复积分计算一种特殊类型的定积分[J]. 科技创新导报, 2010(2): 241-243.

[4] 朱敏慧, 崔艳. 浅析复变函数积分的计算[J]. 科技视界, 2012(31): 46-47.

[5] 郑唯唯, 朱敏慧, 李泽, 周立娜, 李海洋. 复变函数与积分变换[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2011.

[6] 陈静, 贠书杰. 复变函数积分的几种计算方法[J]. 河南机电高等专科学校学报, 2013, 21(2): 21-24.

[7] 杨华军, 王仕璠, 郝智明, 等. 复变函数论典型环路积分的理论分析[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2001(S1): 69-74.

[8] 黄得隆. 复变函数积分计算中的几种方法[J]. 宝鸡文理学院学报(自然科学版), 1995(2): 71-74.

[9] 王艳琴. 计算复积分的几种方法[J]. 湖南工业职业技术学院学报, 2011, 11(5): 8-11.

[10] 唐宝庆, 杨润生, 欧阳文, 李立军. 对复变函数积分 $\oint_c f(z)dz$ 的计算在教学上的探讨[J]. 数学理论与应用, 2010(1): 120-122.

[11] 张洁萍. 复变函数方法的两个应用研究[J]. 黑龙江科学, 2017, 8(16): 38-39.

[12] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.

[13] 李红, 谢松法. 复变函数与积分变换[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.