Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 291-298
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93039

Existence of Three Solutions for a Choquard Equation

Yue Li, Anran Hou

School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: liyue9412@163.com, 18724591409@163.com

Received: Apr. 15th, 2019; accepted: Apr. 26th, 2019; published: May 9th, 2019

Abstract

We study the following Choquard equation by the Theorem 1.1 in [1]

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta\left(\dfrac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) + \lambda u - |u|^{p-2} u + h(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

where, $\Omega \subset R^3$ is an open, and bounded domain with a smooth boundary, $h \in L^2(\Omega)$, $0 < \mu < 3$, $4 < p < 6$, $\beta > 0$, $\lambda > 0$. Under suitable assumption $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, we prove this problem at least three weak solutions.

Keywords

Choquard Equation, Three Critical Points

整数阶Choquard方程三解的存在性

李　月，侯安然

云南师范大学数学学院，云南　昆明
Email: liyue9412@163.com, 18724591409@163.com

收稿日期：2019年4月15日；录用日期：2019年4月26日；发布日期：2019年5月9日

摘　要

应用[1]中的 **Theorem 1.1** 来研究下面的方程

文章引用: 李月, 侯安然. 整数阶 Choquard 方程三解的存在性[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 291-298.
DOI: 10.12677/pm.2019.93039

$$\begin{cases} -\Delta u = \beta\left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) + \lambda u - |u|^{p-2} u + h(x), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中，$\Omega \subset R^3$ 是具有光滑边界的有界开集，$h \in L^2(\Omega)$，$0 < \mu < 3$，$4 < p < 6$，$\beta > 0$，$\lambda > 0$。非线性函数 $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 在满足一定条件下得出该方程至少有三个弱解。

关键词

Choquard方程，三临界点

1. 引言

近年来，越来越多的人开始关注整数阶Choquard方程

$$\begin{aligned} &-\varepsilon^2 \Delta u + V(x) u \\ &= \varepsilon^{\mu-N}\left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right) f(u) + h(u), \quad x \in \mathbb{R}^N \end{aligned} \tag{1.1}$$

此外，也有很多人研究(1.1)式中 $\varepsilon = 1$ 时的经典问题。当 $\varepsilon = 1$，$V = 1$，$F(u) = u^q$ 且 $h = 0$ 时，(1.1)式就会是著名的Choquard-Pekar方程

$$-\Delta u + u = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{\mu}} * |u|^q \, \mathrm{d}y\right) |u|^{q-2} u, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{1.2}$$

当 $N = 3$，$q = 2$ 且 $\mu = 1$ 时的情况，是1954年Pekar在[2]中用来描述极化子静止时的量子理论时提出的。(1.2)式是1976年Choquard在[3]中描述单组分等离子体的Hartree-Fock理论时提出的。Lions在[4]中由临界点定理得到方程在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有无穷多镜像解的存在性。对于基态解的一些性质，L. Ma和L. Zhao在[5]中证明了对于 $q \ge 2$ 时，广义的Choquard方程(1.2)式的每个正解都是径向对称的，并且单调递减到某一点。后来Moroz和Schaftingen在[6] [7]中消除了这种限制，并得出最佳参数的、基态的正则性和径向对称性，并推导出这些解在无限远处渐近衰减。还有一些人专注于半经典问题，即(1.1)式中的 $\varepsilon \to 0$。非局部问题(1.1)的半经典解的存在性已经在[8]中给出。

在证明解的存在性时，临界点理论是解决问题的基本工具之一。1978年P. H. Rabinowitz在文献[9]介绍了鞍点理论，这迅速成为临界点理论的基础，也是极大极小原理之一。Jonas Volek在文献[1]中提出，如果泛函满足P. H. Rabinowitz的鞍形假设，再满足PS紧性条件以及下方有界，就可以得出方程至少有三个临界点。到目前为止，人们主要研究关于整数阶Choquard方程解的存在性、多重性以及集中性，据我们掌握的文献来看，还没有人研究Choquard方程的三临界点问题。因此受文献[1]中方法的启发，本文就对如下整数阶Choquard方程进行研究

$$\begin{cases} -\Delta u=\beta\left(\dfrac{1}{|x|^{\mu}}*F(u)\right)f(u)+\lambda u-|u|^{p-2}u+h(x), & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

其中，$\Omega\subset R^3$ 是具有光滑边界的有界开集，$h\in L^2(\Omega)$，$0<\mu<3$，$4<p<6$，$\beta>0$，$\lambda>0$。非线性函数 $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$f\ge 0$，在 $t\le 0$ 时有 $f(t)=0$，且满足：

(f1) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=0$.

(f2) $\exists q\in\left(\dfrac{6-\mu}{3},\min\left\{6-\mu,\dfrac{p}{2}\right\}\right)$ $s.t.$ $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t^{q-1}}=0$.

得出如下结论：

定理1.1 设 $\lambda_k<\lambda<\lambda_{k+1}$，存在 $\alpha_0>0$，$\beta_0>0$ 使得 $\|h\|_2<\alpha_0$，$\beta\in(0,\beta_0)$ 时，方程(1.3)式至少有三个弱解。

2. 泛函设置

设 $\Omega\in\mathbb{R}^3$ 是具有光滑边界的有界开集，Sobolev空间 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的范数为

$$\|u\|_{1,2}=\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

Lebesgue空间 $L^p(\Omega)(p\ge 1)$ 的范数为

$$\|u\|_p=\left(\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

接下来介绍一些本文用到的结论。

引理 2.1 (Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式) 令 $t,r>1$ 且 $0<\mu<N$ 使得 $\dfrac{1}{r}+\dfrac{\mu}{N}+\dfrac{1}{t}=2$。若 $f\in L^r(\mathbb{R}^N)$ 且 $h\in L^t(\mathbb{R}^N)$。则存在一个与 f,h 都无关的常数 $C(r,N,\mu,t)>0$，使得

$$\iint_{\mathbb{R}^{2N}}\frac{f(x)h(y)}{|x-y|^{\mu}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le C(r,N,\mu,t)\|f\|_r\|h\|_t$$

引理 2.2 ([1], Theorem1.1) 设 X 是实 Banach 空间，$X=Y\oplus Z$ 其中 $Y\ne 0$ 维数有限。假设 $J\in C^1(X,\mathbb{R})$ 有下界，并且满足

(R) $\exists R>0$ $s.t.$ $\max\limits_{u\in\partial B_Y(R)}J(u)<\inf\limits_{u\in Z}J(u)$

(PS) 对任意的序列 $\{u_n\}\subset X$ 使得 $\{J(u_n)\}\subset\mathbb{R}$ 有界，并且 $\|J'(u_n)\|_{X^*}\to 0$ 有收敛子列。

则 J 至少有三个临界点。

经过计算可以推出方程(1.3)相应的能量泛函为

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2}\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^{\mu}}*F(u)\right)F(u)\,\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{p}\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega|h(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

引理 2.3 设 $h\in L^2(\Omega)$，则泛函 J 满足：

a) $J\in C^1\left(W_0^{1,2}(\Omega),\mathbb{R}\right)$ 并且满足

$$\langle J'(u),\varphi\rangle=\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi \mathrm{d}x-\beta\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right)f(u)\varphi \mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x+\int_\Omega |u|^{p-2}u\varphi \mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)\varphi \mathrm{d}x$$

其中 $u,\varphi\in W_0^{1,2}(\Omega)$。

b) $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是(1.3)的弱解，当且仅当 $u\in W_0^{1,2}(\Omega)$ 是 J 的临界点。

由上述引理可知，想要证明定理 1.1 只需证明 J 有至少三个临界点。

引理 2.4 设 $h\in L^2(\Omega)$ 则泛函 J 在 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 上弱强制，即当 $\|u\|_{1,2}\to\infty$ 时，有 $J(u)\to\infty$ 且 J 有下界。

证明：根据(f_1)以及(f_2)可以得出，对任意的 $\xi>0$ 存在 $C_\xi>0$ 使得下式成立

$$f(t)\le\xi|t|+C_\xi|t|^{q-1},\quad F(t)\le\xi|t|^2+C_\xi|t|^q \tag{2.1}$$

根据(2.1)以及引理 2.1，可以推出下面不等式成立

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right)F(u)\mathrm{d}x\right|&\le C\|F(u)\|_t\|F(u)\|_t\\&\le C\left(\int_\Omega\left(|u|^2+|u|^q\right)^t\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{t}}\\&\le C\left(\|u\|_{2t}^4+\|u\|_{qt}^{2q}\right)\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中 $t=\dfrac{6}{6-\mu}$。注意到 $t<2$ 则有 $2t<p$，$tq<2q<p$。故结合(2.1)和(2.2)式可以推出

$$\begin{aligned}J(u)&=\frac12\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x-\frac{\beta}{2}\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right)F(u)\mathrm{d}x-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x\\&\quad+\frac1p\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-\frac12\int_\Omega|h(x)|^2\mathrm{d}x\\&\ge\frac12\|u\|_{1,2}^2-C\left(\|u\|_{2t}^4+\|u\|_{qt}^{2q}\right)-\frac{\lambda}{2}\|u\|_2^2+\frac1p\|u\|_p^p-\frac12\|h\|_2^2\\&\ge\frac12\|u\|_{1,2}^2-C\left(\|u\|_p^4+\|u\|_p^{2q}+\frac{\lambda}{2}\|u\|_p^2\right)+\frac1p\|u\|_p^p-\frac12\|h\|_2^2\end{aligned}\tag{2.3}$$

当 $\|u\|_{1,2}\to\infty$ 时，有以下两种情况:

i) 若 $\|u\|_p$ 有界，则有 $J(u)\to\infty$。

ii) 若 $\|u\|_p\to\infty$，则由 $p>2q$ 以及 $p>4$ 可知~ $J(u)\to\infty$。

故 J 是弱强制的。此外，由(2.3)式可推出

$$J(u)\ge -C\left(\|u\|_p^4+\|u\|_p^{2q}+\frac{\lambda}{2}\|u\|_p^2\right)+\frac1p\|u\|_p^p-\frac12\|h\|_2^2$$

不等式右边是与 $\|u\|_p$ 有关的函数，又因为 $p>2q$ 且 $p>4$，所以不等式右边是有下界的，故出 J 有下界。

因为 J 是 C^1 且下方有界，由文献[10]知 J 存在 PS 序列。又因为 J 是弱强制的，所以 PS 序列 $\{u_n\}$ 有界，因此有下面引理成立。

引理 2.5 如果序列 $\{u_n\}\subset W_0^{1,2}(\Omega)$ 有界且 $J'(u_n)\to 0$，则 $\{u_n\}$ 有收敛子列。

证明： 由 $\{u_n\}\subset W_0^{1,2}(\Omega)$ 有界可知，在子列意义下有

$$u_n \xrightarrow{\text{弱}} u \text{ 于 } W_0^{1,2},\quad u_n \to u \text{ 于 } L^t(\Omega)\ \forall t\in\left[1,2^*\right)$$

注意到

$$\begin{aligned}o_n(1)&=\left\langle J'(u_n),u_n\right\rangle\\&=\|u_n\|_{1,2}^2-\beta\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u_n)\right)f(u_n)u_n\mathrm{d}x\\&\quad-\lambda\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_n|^p\,\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u_n\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\|u_n\|_{1,2}^2=\beta\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u_n)\right)f(u_n)u_n\mathrm{d}x+\lambda\|u_n\|_2^2-\|u_n\|_p^p+\int_\Omega h(x)u_n\mathrm{d}x+o_n(1)\tag{2.4}$$

此外

$$\begin{aligned}o_n(1)&=\left\langle J'(u_n),u\right\rangle\\&=\int_\Omega\nabla u_n\nabla u\mathrm{d}x-\beta\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u_n)\right)f(u_n)u\mathrm{d}x\\&\quad-\lambda\int_\Omega u_nu\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_n|^{p-2}u_nu\mathrm{d}x-\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x\end{aligned}$$

故

$$\|u\|_{1,2}^2=\beta\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u_n)\right)f(u_n)u\mathrm{d}x+\lambda\|u\|_2^2-\|u\|_p^p+\int_\Omega h(x)u\mathrm{d}x+o_n(1)\tag{2.5}$$

因为 $\{u_n\}$ 有界，由(f_1)-(f_2)，引理 2.1 以及 Hölder 不等式可得出

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u_n)\right)f(u_n)u_n\mathrm{d}x-\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u_n)\right)f(u_n)u\mathrm{d}x\right|\\&\le\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*|F(u_n)|\right)|f(u_n)||u_n-u|\mathrm{d}x\\&\le C\left(\int_\Omega|F(u_n)|^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1t}\left(\int_\Omega|f(u_n)|^t|u_n-u|^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1t}\\&\le C\left(\int_\Omega\left(\xi|u_n|+C_\xi|u_n|^{q-1}\right)^t|u_n-u|^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1t}\\&\le C\left(\int_\Omega|u_n|^t|u_n-u|^t\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u_n|^{(q-1)t}|u_n-u|^t\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1t}\\&\le C\left(\left(\int_\Omega|u_n-u|^{2t}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac12}+\left(\int_\Omega|u_n-u|^{qt}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac1q}\right)^{\frac1t}\\&=o_n(1)\end{aligned}$$

其中 $t=\dfrac{6}{6-\mu}$。结合(2.4)，(2.5)和(2.6)式可知 $\|u_n\|_{1,2}\to\|u\|_{1,2}$。又因为 $u_n\xrightarrow{\text{弱}}u$ 于 $W_0^{1,2}(\Omega)$，所以有 $u_n\to u$

于 $W_0^{1,2}(\Omega)$。

3. 定理 1.1 的证明

由引理 2.4 和引理 2.5，我们有下面的引理成立。

引理 3.1 设 $h \in L^2(\Omega)$，则泛函 J 满足 PS 条件，即引理 2.2 的条件(PS)成立。

接下来证明 J 至少存在三个临界点，设 $\varphi_i\,(i \in \mathbb{N})$ 为 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 中对应的特征值 λ_i （$-\Delta$ 算子的特征值)的特征函数且

$$\mathrm{B} = \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$$

是 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 的规范正交基(参见文献[11]的 Thm. 2.2.16)，并且 $\lambda_k < \lambda_{k+1}$。将 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 分解为 $Y \oplus Z$，其中

$$Y = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\varphi_i : a_i \in \mathbb{R}, \varphi_i \in \mathrm{B}\right\},\quad Z = \left\{\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i\varphi_i : a_i \in \mathbb{R}, \varphi_i \in \mathrm{B}\right\} = Y^{\perp} \tag{3.1}$$

引理 3.2 设 $\lambda_k < \lambda < \lambda_{k+1}$，则存在 $\alpha > 0$ 对任意的 $h \in L^2(\Omega)$ 且 $\|h\|_2 < \alpha$，都有泛函 J 满足引理 2.2 中的条件(R)，其中 Y, Z 满足(3.1)式。

证明： 设 $u \in Z$ 结合 Parseval 等式有下式成立

$$u = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i\varphi_i,\quad \|u\|_{1,2}^2 = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2$$

注意到 φ_i 满足

$$\lambda_i\int_{\Omega}|\varphi_i(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega}|\nabla\varphi_i(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1\quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

因为 $\lambda < \lambda_{k+1}$ 所以有

$$\int_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x - \lambda\int_{\Omega}|u(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right) \ge \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{1,2}^2 \tag{3.3}$$

因此，对 $u \in Z$ 由(3.3)以及嵌入定理可以得到

$$\begin{aligned} J(u) &\ge \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{1,2}^2 - \frac{\beta}{2}\int_{\Omega}\left(\frac{1}{|x|^{\mu}} * F(u)\right)F(u)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_{\Omega}|u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\Omega}|h(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\ge C_1\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_p^2 - \beta C_2\left(\|u\|_p^2 + \|u\|_p^{2q}\right) + \frac{1}{p}\|u\|_p^p - \frac{1}{2}\|h\|_2^2 \\ &\ge -\frac{1}{2}\|h\|_2^2 + \alpha_\beta \end{aligned} \tag{3.4}$$

上式中 $\alpha_\beta = \inf_{t\ge 0} g_\beta(t)$，其中

$$g_\beta(t) = C_1\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)t^2 + \frac{1}{p}t^p - \beta C_2\left(t^4 + t^{2q}\right),\quad t \ge 0$$

我们断言，存在 $\beta_0 > 0$，当 $\beta \in (0, \beta_0)$ 时，$\alpha_\beta \ge 0$。又因为 $2q < p$ 且 $p > 4$，因此存在 $t_0 > 0$，当 $t > t_0$，$\beta < 1$ 时，有

$$g_\beta(t) \ge C_1\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)t^2 + \frac{1}{p}t^p - C_2\left(t^2 + t^{2q}\right) > 1$$

则 $g_\beta(t)$ 的最小值只能在区间 $[0,t_0]$ 上达到。因为 $\lambda<\lambda_{k+1}$，所以存在 $\beta_0>0$，当 $\beta\in(0,\beta_0)$ 时，对任意 $t\in(0,t_0)$ 有

$$\begin{aligned} g_\beta(t) &= t^2\left(C_1\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)+\frac{1}{p}t^{p-2}-\beta C_2\left(t^2+t^{2q-2}\right)\right) \\ &\ge t^2\left(C_1\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)-\beta C_2\left(t_0^2+t_0^{2q-2}\right)\right) \\ &\ge 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

所以 $\alpha_\beta\ge 0$。当取 $u\in Y$ 时，有下式成立

$$u=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i,\qquad \|u\|_{1,2}^2=\sum_{i=1}^{k}a_i^2$$

由 $\lambda_k<\lambda$，以及(3.2)式可以推出

$$\int_\Omega|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega|u(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\le\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{1,2}^2 \tag{3.6}$$

因此，对任意的 $u\in Y$ 由 Sobolev 嵌入定理以及(3.6)有下式成立

$$\begin{aligned} J(u) &\le \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{1,2}^2-\frac{\beta}{2}\int_\Omega\left(\frac{1}{|x|^\mu}*F(u)\right)F(u)\,\mathrm{d}x+\frac{1}{p}\|u\|_p^p-\frac{1}{2}\int_\Omega|h(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{1,2}^2+C\|u\|_{1,2}^p \end{aligned} \tag{3.7}$$

因此，结合(3.5)和(3.7)式可知，如果要证明引理 2.3 中条件(R)成立，当且仅当存在 $R>0$ 使得对 $u\in Y$，$\|u\|_{1,2}=R$ 时要有下式成立

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{1,2}^2+C\|u\|_{1,2}^p<-\frac{1}{2}\|h\|_2^2$$

记 $\|u\|_{1,2}=r$ 整理得出下式

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)r^2+Cr^p<-\frac{1}{2}\|h\|_2^2$$

记

$$\Lambda(r)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2+Cr^p$$

因为 $\Lambda(r)$ 与 $\|h\|_2$ 无关，并且 $\lambda_k<\lambda$。故存在某个 $R>0$ 使得 $\Lambda(R)$ 为 $\Lambda(r)$ 的严格负的极小值。因此存在一个充分小的 $\alpha_0>0$ 使得

$$\Lambda(R)<-\frac{1}{2}\|h\|_2^2\qquad\forall\|h\|_2<\alpha_0$$

因此，对任意的 $h\in L^2(\Omega)$ 且 $\|h\|_2<\alpha_0$ 以及 $u\in Y$ 且 $\|u\|_{1,2}=R$ 有

$$J(u)<-\frac{1}{2}\|h\|_2^2\le\inf_{u\in Z}J(u)$$

因此满足引理 2.2 中的条件(R)。

综上所述，验证出引理 2.2 的所有条件都成立，所以泛函 J 至少存在三个临界点，即定理 1.1 成立。

参考文献

[1] Volek, J. (2018) Multiple Critical Points of Saddle Geometry Functionals. *Nonlinear Analysis*, **170**, 238-257. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.01.008

[2] Pekar, S. (1954) Untersuchung uber die Elektronentheorie der Kristalle. Akademie Verlag, Berlin.

[3] Lieb, E.H. (1977) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. *Studies in Applied Mathematics*, **57**, 93-105. https://doi.org/10.1002/sapm197757293

[4] Lions, P.-L. (1980) The Choquard Equation and Related Questions. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **4**, 1063-1072. https://doi.org/10.1016/0362-546X(80)90016-4

[5] Ma, L. and Zhao, L. (2010) Classification of Positive Solitary Solutions of the Nonlinear Choquard Equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **195**, 455-467. https://doi.org/10.1007/s00205-008-0208-3

[6] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2013) Groundstates of Nonlinear Choquard Equations: Existence, Qualitative Properties and Decay Asymptotics. *Journal of Functional Analysis*, **265**, 153-184. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.04.007

[7] Moroz, V. and Van Schaftingen, J. (2015) Existence of Groundstates for a Class of Nonlinear Choquard Equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, **367**, 6557-6579. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2014-06289-2

[8] Ambrosetti, A. and Malchiodi, A. (2007) Concentration Phenomena for Nonlinear Schrodinger Equations: Recent Results and New Perspectives. In: Beresticky, H., Ed., *Perspectives in Nonlinear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 19-30.

[9] Rabinowitz, P.H. (1978) Some Minimax Theorems and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations. In: Cesari, L., Kannan, R. and Weinberger, H.F., Eds., *Nonlinear Analysis*, Academic Press, Cambridge, 161-177. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-165550-1.50016-1

[10] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. In: Brezis, H., Ed., *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhauser, Basel, 139-141.

[11] Drabek, P. and Milota, J. (2013) Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations. In: Krantz, S.G., Kumar, S. and Nekovár, J., Eds., *Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher*, Birkhauser, Basel. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0387-8