Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 299-307
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93040

Existence of Three Solutions for a Magnetic Equation

Anran Hou, Yue Li

Yunnan Normal University, Kunming Yunnan
Email: 18724591409@163.com, 592947719@qq.com

Received: Apr. 16th, 2019; accepted: Apr. 27th, 2019; published: May 9th, 2019

Abstract

In this thesis, we focus our attention on the equation with magnetic field.

$$\begin{cases} \left(-i\nabla + A(x)\right)^2 u + V(x)u = \lambda u - f(u) + h(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded open set with smooth boundary, $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n): \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ is a magnetic field, $\nabla_A := -i\nabla + A$, $-\Delta_A := (-i\nabla + A)^2$. And we implied that there are at least three solutions in this problem when f, V, h satisfy suitable assumptions.

Keywords

Magnetic Operators, Variational Method, Critical Point Theory

磁性方程三个解的存在性

侯安然，李　月

云南师范大学，云南　昆明
Email: 18724591409@163.com, 592947719@qq.com

收稿日期：2019年4月16日；录用日期：2019年4月27日；发布日期：2019年5月9日

摘　要

这篇文章中，我们致力于研究磁性方程：

$$\begin{cases} \left(-i\nabla + A(x)\right)^2 u + V(x)u = \lambda u - f(u) + h(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

文章引用：侯安然，李月．磁性方程三个解的存在性[J]．理论数学, 2019, 9(3): 299-307.
DOI: 10.12677/pm.2019.93040

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个具有光滑边界的有界开集，$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n):\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 是一个磁性位势，$\nabla_A := -i\nabla + A$，$-\Delta_A := (-i\nabla + A)^2$。在 f,V,h 满足一定条件时，此方程至少含有三个解。

关键词

磁性算子，变分方法，临界点理论

1. 引言

变分法是研究泛函极值的一种重要方法。它不仅与数学中众多分支相联系，而且在描述物理学、化学、生物学等各种问题中有着重要的作用。尤其是 Schrödinger 方程及 Chquard 方程广泛应用于电磁学、量子力学等领域。越来越多的实例证明，变分法是研究解的存在性及多重性最有利的工具之一。

结合变分法，本文应用[1]中的 Theorem 1.1 来研究下面的方程。

$$\begin{cases} (-i\nabla + A(x))^2 u + V(x)u = \lambda u - f(u) + h(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是具有光滑边界的有界开集，$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n):\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ 是一个磁性位势，使得 $A \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$，$\nabla_A := -i\nabla + A$，$-\Delta_A := (-i\nabla + A)^2$。$V(x) \ge 0$ 且连续，$h \in L^2(\Omega)$，$\lambda > 0$。非线性函数 $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$，$f \ge 0$，在 $t<0$ 时有 $f(t)=0$，且满足：

(f_1) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t} = 0$。

(f_2) 存在 $q \in (2,2^*)$，使得 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t^{q-1}} = 0$。

(f_3) 存在 $\theta > 4$，使得对于 $t>0$，$0 < \dfrac{\theta}{2}F(t) < tf(t)$。其中 $F(t) = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$。

其中的整数阶磁性 Laplacian 算子：$\nabla_A := -i\nabla + A$，$-\Delta_A := (-i\nabla + A)^2$，当 $A \equiv 0$ 时，也就是没有磁性位势，算子变成了 $-\Delta$，很多作者研究了

$$-\Delta u + \mu a(x)u = \lambda u + |u|^{p-2}u \tag{1.2}$$

类型问题的解的存在性和多重性，其中 $\alpha \ge 0$ 是位势井，并带有次临界增长，也就是 $p < 2^*$，更多结果参见文献[2] [3]。

另外，类似于(1.2)的方程类型，Clapp 和 Ding 在文献[4]中利用变分法建立了临界的情形下，正解的存在性和多重性。对于有临界非线性项的 Schrödinger 方程，也可参见[5] [6]及其参考文献。在文献[7]中作者研究了带有径向缺失的二次非线性 Schrödinger 方程径向解的爆破，位于半径为 r_0 的球中。当 $A \ne 0$ 时，也就是方程带有磁势的问题，近期 Lv 在[8]中研究了

$$(-i\nabla + A)^2 u + (g_0(x) + \mu g(x))u = \left(|x|^{-\alpha} * |u|^p\right)|u|^{p-2}u,\quad u \in H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}), \tag{1.3}$$

其中 $n\ge 3$，$\alpha\in(0,n)$，$\mu>0$，$p\in\left(\frac{2n-\alpha}{n},\frac{2n+\alpha}{n-2}\right)$。$g_0$ 和 g 是两个重要的函数，满足一些必要条件。他证明了当 $\mu\ge\mu^*$ 时的基态解的存在性，以及 $\mu\to\infty$ 时解的集中行为。在此类问题的研究中，Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式扮演了一个很重要的角色。

方程(1.3)中，如果 $A=0$，$g_0=0$，$g=1$，$\mu=1$，那么方程就变为

$$-\Delta u+u=\left(|x|^{-\alpha}*|u|^p\right)|u|^{p-2}u,\ u\in H^1\left(\mathbb{R}^n\right).$$

这就是经典的 Chquard 方程，它出现在很多的物理学领域，尤其是关于非相对论的玻色子原子和分子的大系统量子论的方程，已经被很多国内外作者研究。例如，在[9]中，Lieb 证明了

$$-\Delta u+u=\left(|x|^{-1}*|u|^2\right)u \text{ 于 } \mathbb{R}^n \text{ 中}$$

在平移变换下，解的存在性和唯一性。2014 年，Salazar 在[10]中研究了下面的稳定非线性磁性 Chquard 方程

$$(-i\nabla+A)^2u+W(x)u=\left(|x|^{-\alpha}*|u|^p\right)|u|^{p-2}u \text{ 于 } \mathbb{R}^n,$$

其中 $n\ge 3$，$\alpha\in(0,n)$，$p\in\left[2,2_\alpha^2\right)$，$A\in\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right)$ 是一个磁性位势，$W\in\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}\right)$ 是个有界电势。

我们发现，各类磁性方程虽然被广泛的研究，但人们主要研究了解的存在性、多重性以及集中性，考虑 P. H. Rabinowitz 在 1978 年提出的鞍点理论，我们可以得出不一样的结果。Jonas Volek 在文献[1]中提出，如果泛函满足 P. H. Rabinowitz 的鞍形假设，再满足 PS 紧性条件以及下方有界，就可以得出方程至少有三个临界点：

定理 1.1. ([1], Theorem 1.1) 设 X 是实 Banach 空间，$X=Y\oplus Z$，其中 $Y\ne 0$ 维数有限。假设 $J\in C^1(X,\mathbb{R})$ 有下界，并且满足

(R) 存在 $R>0$ 使得 $\max\limits_{u\in\partial B_R(Y)}J(u)<\inf\limits_{u\in Z}J(u)$。

(PS) 对任意的序列 $\{u_n\}\subset X$ 使得 $\{J(u_n)\}\subset\mathbb{R}$ 有界，并且 $\|J'(u_n)\|_{X^*}\to 0$ 有收敛子列。

则 J 至少有三个临界点。

这是一个新的结果。于是，在本文中，我们就应用这个定理，做了一个带有连续位势的磁性方程至少存在三个解的证明。具体的证明过程我们将在第三部分及第四部分给出。

2. 变分设置和主要结果

设

$$H_{V,A}\left(\mathbb{R}^N\right)=\left\{u:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}\,\middle|\,\int_{\mathbb{R}^N}V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x<\infty,\left(\partial j+iA_j\right)u\in L^2\left(\mathbb{R}^N\right),j=1,2,\cdots,n\right\},$$

其中，$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n):\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 是一个磁性位势，使得 $A\in L^2_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$。$V(x)\ge 0$。且连续。

定义内积如下：

$$(u,v)_{H_{V,A}\left(\mathbb{R}^N\right)}=\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u\bar{v}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^N\left(\left(\partial j+iA_j\right)u,\left(\partial j+iA_j\right)v\right)_{L^2\left(\mathbb{R}^N\right)}.$$

从而我们得到 $H_{V,A}\left(\mathbb{R}^N\right)$ 为 Hilbert 空间。记其范数为

$$\|u\|_{V,A}=\int_\Omega\left(|\nabla_A u|^2+V(x)|u|^2\right)\mathrm{d}x.$$

仿照 Adam 在[11]中定理 3.6 的证明可知，$H_{V,A}\left(\mathbb{R}^N\right)$是可分的。

此外，当$H_{V,A}\left(\mathbb{R}^N\right)$中$V\equiv 1$时，我们得到空间$H_A^1\left(\mathbb{R}^N\right)$。

设$\Omega\subset\mathbb{R}^N$是具有光滑边界的有界开集，$C_0^\infty(\Omega)$在$H_{V,A}\left(\mathbb{R}^N\right)$中以范数$\|u\|_{H_{V,A}\left(\mathbb{R}^N\right)}$生成的闭包记为$H_{V,A}(\Omega)$。$H_{V,A}(\Omega)$也是可分的 Hilbert 空间。记范数为：

$$\|u\|_{V,A}=\int_\Omega\left(\left|\nabla_A u\right|^2+V(x)|u|^2\right)\mathrm{d}x.$$

下面是我们众所周知的抗磁性不等式：

引理 2.1. 当$n\geq 4$时，如果$u\in H_A^1\left(\mathbb{R}^N\right)$，那么$|u|\in H^1\left(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}\right)$，并且有

$$\left|\nabla|u|(x)\right|\leq\left|\nabla u(x)+iA(x)u(x)\right|\quad a.e\quad x\in\mathbb{R}^N$$

成立。

由[12]我们得到，当$1\leq t\leq 2^*$时，有整数阶连续嵌入$H_A^{0,1}(\Omega)\subset L^t(\Omega,\mathbb{C})$，当$1\leq t<2^*$时，嵌入是紧的。继而我们可以得到

引理 2.2. 当$1\leq t\leq 2^*$时，$H_{V,A}(\Omega)\subset L^t(\Omega,\mathbb{C})$是连续的，当$1\leq t<2^*$时，嵌入是紧的。也就是

$$\|u\|_{L^t(\Omega)}\leq C^*\|u\|_{V,A}.$$

其中C^*是一个嵌入常数。

经过计算，结合范数定义，可以推出方程(1.1)相应的能量泛函为

$$J_V=\frac{1}{2}\|u\|_{V,A}-\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_\Omega|h|^2\,\mathrm{d}x.$$

引理 2.3. 设$h\in L^2(\Omega)$，则泛函J_V满足：

(i) $J_V\in C^1\left(H_{V,A}(\Omega),\mathbb{R}\right)$并且满足

$$\left\langle J_V'(u),\varphi\right\rangle=\langle u,\varphi\rangle-\lambda\int_\Omega f(u)\varphi\,\mathrm{d}x-\int_\Omega h\varphi\,\mathrm{d}x,$$

其中，$u,\varphi\in H_{V,A}(\Omega)$。

(ii) $u\in H_{V,A}(\Omega)$是(1.1)的弱解，当且仅当$u\in H_{V,A}(\Omega)$是J_V的临界点。

现在，我们来陈述文章的主要结果：

定理 2.1. 设$\lambda_k<\lambda<\lambda_{k+1}$，存在$\mu>0$，使得当$\|h\|_2<\mu$时，(1.1)有至少三个弱解。

由引理 2.3 可知，想要证明定理 2.1 只需证明J_V有至少三个临界点。

3. 一些重要引理

引理 3.1. 设$h\in L^2(\Omega)$则泛函J_V在$H_{V,A}(\Omega)$上弱强制，即当$\|u\|_{V,A}\to\infty$时，有$J_V\to\infty$且J_V有下界。

证明： 根据(f_1)与(f_3)可得出，存在$C_1,C_2>0$，使得

$$F(t)\geq C_1|t|^\theta-C_2. \tag{3.1}$$

根据(2.2)可知，

$$\left|\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x\right|\geq C_1\int_\Omega|t|^\theta\,\mathrm{d}x-C_2|\Omega| \tag{3.2}$$

其中$|\Omega|$为Ω的测度。

$$\begin{aligned} J_V(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{V,A}^2 - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega |h|^2\,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{V,A}^2 - c\left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h\|_{L^2(\Omega)}^2\right) + C_1\|u\|_{L^\theta(\Omega)}^\theta - C_2|\Omega| \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{V,A}^2 - c\left(\|u\|_{L^\theta(\Omega)}^2 + \|h\|_{L^\theta(\Omega)}^2\right) + C_1\|u\|_{L^\theta(\Omega)}^\theta - C_2|\Omega| \end{aligned} \tag{3.3}$$

当$\|u\|_{V,A}$时，有以下两种情况：

(i) 若$\|u\|_{L^\theta(\Omega)}$有界，则有$J_V(u)\to\infty$。

(ii) 若$\|u\|_{L^\theta(\Omega)}\to\infty$，则由$\theta>2$可知$J_V(u)\to\infty$。

故$J_V(u)$是弱强制的。此外，由(3.3)可推出

$$J_V(u) \geq -c\left(\|u\|_{L^\theta(\Omega)}^2 + \|h\|_{L^\theta(\Omega)}^2\right) + C_1\|u\|_{L^\theta(\Omega)}^\theta \tag{3.4}$$

不等式右边是与$\|u\|_{L^\theta(\Omega)}$有关的函数，因为$\theta>2$，所以不等式右边是有下界的，故得出J_V有下界。

因为J_V是C^1连续且下方有界，由文献[[13], Theorem 2.4]知J_V存在 PS 序列。又因为J_V是弱强制的，所以 PS 序列$\{u_n\}$有界。因此有下面引理成立。

引理 3.2. 如果序列$\{u_n\}\subset H_{V,A}(\Omega)$有界且$J_V'(u_n)\to 0$，则$\{u_n\}$有收敛子列。

证明： 由$\{u_n\}\subset H_{V,A}(\Omega)$，在子列意义下有

$$u_n \xrightarrow{\text{弱}} u \text{ 于 } H_{V,A}(\Omega) \text{ 且 } u_n \to u \text{ 于 } L^t(\Omega), \quad \forall t\in\left(1,2^*\right)。$$

注意到，

$$o_n(1) = \left\langle J_V'(u_n), u_n\right\rangle = \|u_n\|_{V,A}^2 - \lambda\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u_n)u_n\mathrm{d}x - \int_\Omega hu_n\mathrm{d}x.$$

所以

$$\|u_n\|_{V,A}^2 = \lambda\int_\Omega u_n^2\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u_n)u_n\mathrm{d}x - \int_\Omega hu_n\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

此外，

$$o_n(1) = \left\langle J_V'(u_n), u\right\rangle = \left\langle u_n, u\right\rangle - \lambda\int_\Omega u_n u\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u_n)u_n\mathrm{d}x - \int_\Omega hu_n\mathrm{d}x.$$

所以

$$\|u\|_{V,A}^2 = \lambda\int_\Omega u_n u\mathrm{d}x + \int_\Omega f(u_n)u\mathrm{d}x - \int_\Omega hu\mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

此外，由条件(f_1)及(f_2)有，对于任意的$\xi>0$，存在$C_\xi>0$，使得

$$f(t)\leq \xi|t| + C_\xi|t|^{q-1}\text{，其中 } q\in\left(2,2^*\right)。 \tag{3.7}$$

因为$\{u_n\}$有界，及 Hölder 不等式，引理 2.2 以及(3.7)得出，

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega f(u_n)u_n\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u_n)u\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \int_\Omega |f(u_n)||u_n-u|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_\Omega \left(|u_n| + |u_n|^{q-1}\right)|u_n-u|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega |u_n||u_n-u|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u_n|^{q-1}|u_n-u|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le\left(\int_\Omega|u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega|u_n-u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad+\left(\int_\Omega\left(|u_n|^{q-1}\right)^{\frac{q}{q-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_\Omega|u_n-u|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=c\left(\left(\int_\Omega|u_n-u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_\Omega|u_n-u|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&=o_n(1)
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

结合(3.5)，(3.6)和(3.8)式可知 $\|u_n\|_{V,A}\to\|u\|_{V,A}$。又因为 $u_n\xrightarrow{\text{弱}}u$ 于 $H_{V,A}(\Omega)$，所以有 $u_n\to u$ 于 $H_{V,A}(\Omega)$。

我们定义算子 $T:H_{V,A}(\Omega)\to H_{V,A}(\Omega)$ 如下：

$$(Tu,v)_{H_{V,A}(\Omega)}=\int_\Omega u\bar{v}\mathrm{d}x\text{，}\ \forall u,v\in H_{V,A}(\Omega).$$

那么算子 T 是线性的。

引理 3.3. 线性算子 $T:H_{V,A}(\Omega)\to H_{V,A}(\Omega)$ 有特征值 λ_n，$n=1,2,\cdots$，且 $\lambda_{n+1}>\lambda_n>0$。且当 $n\to\infty$ 时，$\lambda_n\to\infty$。

证明： $(u,Tv)_{H_{V,A}(\Omega)}=\overline{(Tu,v)_{H_{V,A}(\Omega)}}=\overline{\int_\Omega v\bar{u}\mathrm{d}x}=\int_\Omega u\bar{v}\mathrm{d}x=(Tu,v)_{H_{V,A}(\Omega)}$

因此 T 为自伴算子。设 $u_n\to u$ 于 $H_{V,A}(\Omega)$，由引理 2.2 知，$u_n\to u$ 于 $L^2(\Omega)$。此时，当 $n\to\infty$ 时，

$$(Tu_n-Tu,v)_{H_{V,A}(\Omega)}=(T(u_n-u),v)_{H_{V,A}(\Omega)}=(u_n-u,Tv)_{H_{V,A}(\Omega)}\to 0.$$

所以 $Tu_n\xrightarrow{\text{弱}}Tu$ 于 $H_{V,A}(\Omega)$，从而 $\{Tu_n\}$ 在 $H_{V,A}(\Omega)$ 中有界。因此

$$
\begin{aligned}
\|Tu_n-Tu\|_{V,A}^2&=(Tu_n-Tu,Tu_n-Tu)_{H_{V,A}(\Omega)}\\
&=\int_\Omega(u_n-u)\left(\overline{Tu_n-Tu}\right)\mathrm{d}x\\
&\le\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}\cdot c\|Tu_n-Tu\|_{V,A}\\
&\le c\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}\to 0
\end{aligned}
$$

因此 T 为紧算子。另外 $\forall u\in H_{V,A}(\Omega)\setminus\{0\}$，有 $(Tu,u)_{H_{V,A}(\Omega)}=\int_\Omega|u|^2\,\mathrm{d}x>0$。因此 T 为正算子。

由[14]中的定理 2.2.16，命题 2.2.15 以及推论 2.2.13 知，算子 T 存在一列正的特征值 $\frac{1}{\lambda_n}$，及一组对应的 $H_{V,A}(\Omega)$ 中的正交基 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$，使得 $T\varphi_i=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_i$。另外，当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{\lambda_n}\to 0$，即 $\lambda_n\to\infty$。

不妨设 $\|\varphi_i\|_{V,A}=1$，则我们有

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda_n}\|\varphi_i\|_{V,A}^2=\frac{1}{\lambda_n}(\varphi_i,\varphi_i)_{H_{V,A}(\Omega)}=(A\varphi_i,\varphi_i)_{H_{V,A}(\Omega)}=\int_\Omega|\varphi_i|^2\,\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow\lambda_n\int_\Omega|\varphi_i|^2\,\mathrm{d}x=\|\varphi_i\|_{V,A}^2=1.
\end{aligned}
$$

4. 定理 2.1 的证明

由引理 3.1 和引理 3.2，我们有下面的引理成立。

引理 4.1. 设$h\in L^2(\Omega)$，则泛函J_V满足(PS)$_c$条件，即定理 1.1 中的条件(PS)成立。

证明： 假设$\{u_n\}$是J_V的一个(PS)$_c$序列，结合J_V是弱强制的，那么就可推出J_V满足(PS)$_c$条件。

接下来证明J_V至少存在三个临界点，设$\varphi_i(i\in N)$为$H_{V,A}(\Omega)$中对应的特征值λ_i($-\Delta_A$算子的特征值)的特征函数且$B=\{\varphi_i:i\in N\}$是$H_{V,A}(\Omega)$的规范正交基，并且$\lambda_k<\lambda_{k+1}$。将$H_{V,A}(\Omega)$分解为$Y\oplus Z$。其中

$$Y=\left\{\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i:a_i\in\mathbb{R},\varphi_i\in B\right\},\quad Z=\left\{\sum_{i=k+1}^{\infty}a_i\varphi_i:a_i\in\mathbb{R},\varphi_i\in B\right\}=Y^{\perp}. \tag{4.1}$$

引理 4.2. 设$\lambda_k<\lambda<\lambda_{k+1}$，则存在$a>0$对任意的$h\in L^2(\Omega)$且$\|h\|_{L^2(\Omega)}<a$，都有泛函$J_V$满足条件(R)，其中$Y,Z$满足(4.1)。

证明： 设$u\in Z$， 结合 Parseval 等式有下式成立

$$u=\sum_{i=k+1}^{\infty}a_i\varphi_i\text{，且}\|u\|_{V,A}^2=\sum_{i=k+1}^{\infty}a_i^2\text{。}$$

因此φ_i满足

$$\lambda_i\int_\Omega|\varphi_i(x)|^2\,\mathrm{d}x=\|\varphi_i(x)\|_{V,A}^2=1,\quad\forall i\in\mathbb{N} \tag{4.2}$$

因为$\lambda<\lambda_{k+1}$所以有

$$\|u(x)\|_{V,A}^2-\lambda\int_\Omega|u(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{i=k+1}^{\infty}a_i^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\geq\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u(x)\|_{V,A}^2. \tag{4.3}$$

因此，对$u\in Z$，由(4.3)及嵌入定理可以得到

$$J_V(u)\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)\|u\|_{V,A}^2-\frac{1}{2}\int_\Omega|h(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x\geq-\frac{1}{2}\|h\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{4.4}$$

当取$u\in Y$时，有下式成立

$$u=\sum_{i=1}^{k}a_i\varphi_i\text{ 且 }\|u\|_{V,A}^2=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\text{。}$$

由$\lambda_k<\lambda$，以及(4.2)可以推出

$$\|u(x)\|_{V,A}^2-\lambda\int_\Omega|u(x)|^2\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}a_i^2\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)\leq\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{V,A}^2. \tag{4.5}$$

因此，对任意的$u\in Y$，$\xi<\dfrac{\frac{\lambda}{\lambda_k}-1}{4C^*}$ (由于ξ的任意性)。其中，C^*是引理 2.2 中的嵌入常数。

结合(4.5)及引理 2.2(ii)可得

$$\begin{aligned}J_V(u)&\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{V,A}^2-\frac{1}{2}\int_\Omega|h(x)|^2\,\mathrm{d}x+\int_\Omega F(u)\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{V,A}^2+\xi\int_\Omega u^2\mathrm{d}x+C_\xi\int_\Omega u^q\,\mathrm{d}x\\&\leq\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{V,A}^2+C^*\xi\|u\|_{V,A}^2+C^*C_\xi\|u\|_{V,A}^q\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&<\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{V,A}^2+C^*\frac{\frac{\lambda}{\lambda_k}-1}{4C^*}\|u\|_{V,A}^2+C^*C_\xi\|u\|_{V,A}^q\\&<\frac{1}{4}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{V,A}^2+C^*C_\xi\|u\|_{V,A}^q\end{aligned}\tag{4.6}$$

因此，如果要证明条件(R)成立，当且仅当存在 $R>0$ 使得对 $u\in Y$，$\|u\|_{V,A}=R$ 时结合(4.4)以及(4.6)要有下式成立

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\|u\|_{V.A}^2+C^*C_\xi\|u\|_{V.A}^q<-\frac{1}{2}\|h\|_{L^2(\Omega)}^2.\tag{4.7}$$

记 $\|u\|_{V,A}=r$ 整理得出下式

$$\frac{1}{4}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2+C^*C_\xi r^q<-\frac{1}{2}\|h\|_{L^2(\Omega)}^2.\tag{4.8}$$

记

$$\Lambda(r)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)r^2+C^*C_\xi r^q.$$

因为 $\Lambda(r)$ 与 $\|h\|_{L^2(\Omega)}$ 无关，并且 $\lambda_k<\lambda$。因为 $q>2$，故存在某个 $R>0$ 充分小，使得 $\Lambda(R)<0$。因此存在一个充分小的 $\alpha_0>0$ 使得

$$\Lambda(R)<-\frac{1}{2}\|h\|_{L^2(\Omega)}^2,\quad\forall\|h\|_{L^2(\Omega)}^2<\alpha_0.$$

因此，对任意的 $h\in L^2(\Omega)$ 且 $\|h\|_{L^2(\Omega)}^2<\alpha_0$ 以及 $u\in Y$ 且 $\|u\|_{V,A}=R$ 有

$$\Lambda(R)<-\frac{1}{2}\|h\|_{L^2(\Omega)}^2\le\inf_{u\in Z}J_V(u),$$

因此满足(R)式。

综上所述，验证出定理 1.1 的所有条件都成立，所以泛函 J_V 至少存在三个临界点，即方程至少存在三个弱解。

参考文献

[1] Jonas, V. (2018) Multiple Critical Points of Saddle Geometry Functionals. *Nonlinear Analysis*, **170**, 238-257. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.01.008

[2] Ambrosetti, A., Malchiodi, A. and Secchi, S. (2001) Multiplicity Results for some Nonlinear Schrödinger Equations with Potentials. *Archive for Rational Mechanics & Analysis*, **159**, 253-271. https://doi.org/10.1007/s002050100152

[3] Cingolani, S. and Lazzo, M. (2000) Multiple Positive Solutions to Nonlinear Schrödinger Equations with Competing Potential Functions. *Journal of Differential Equations*, **160**, 118-138. https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3662

[4] Clapp, M. and Ding, Y. (2004) Positive Solutions of a Schrödinger Equation with Critical Nonlinearity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, **55**, 592-605. https://doi.org/10.1007/s00033-004-1084-9

[5] Ding, Y. and Liu, X. (2013) Semiclassical Solutions of Schrodinger Equations with Magnetic Fields and Critical Non-linearities. *Manuscripta Mathematica*, **140**, 51-82. https://doi.org/10.1007/s00229-011-0530-1

[6] Mukherjee, T. and Sreenadh, K. (2016) Positive Solutions for Nonlinear Choquard Equation with Singular Nonlinearity. *Complex Variables and Elliptic Equations*, **62**, 1044-1071. https://doi.org/10.1080/17476933.2016.1260559

[7] Goubet, O. and Hamraoui, E. (2017) Blow-Up of Solutions to Cubic Nonlinear Schrödinger Equations with Defect: The Radial Case. *Advances in Nonlinear Analysis*, **6**, 183-197. https://doi.org/10.1515/anona-2016-0238

[8] Lü, D. (2015) Existence and Concentration of Solutions for a Nonlinear Choquard Equation. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **12**, 839-850. https://doi.org/10.1007/s00009-014-0428-8

[9] Lieb, E.H. (2002) Existence and Uniqueness of the Minimizing Solution of Choquard's Nonlinear Equation. In: Loss, M. and Ruskai, M.B., Eds., *Inequalities*, Springer, Berlin, Heidelberg, 465-467. https://doi.org/10.1007/978-3-642-55925-9_37

[10] Salazar, D. (2015) Vortex-Type Solutions to a Magnetic Nonlinear Choquard Equation. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik and Physik*, **66**, 663-675. https://doi.org/10.1007/s00033-014-0412-y

[11] Adams, R.A. and Fournier, J.J.F. (2003) Sobolev Spaces. *Sobolev Spaces*, **140**, 713-734.

[12] Mukherjee, T. and Sreenadh, K. (2016) On Concentration of Least Energy Solutions for Magnetic Critical Choquard Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **464**, 402-420.

[13] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. In: Brezis, H., Ed., *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, Birkhauser, Basel, 139-141. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[14] Drabek, P. and Milota, J. (2007) Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations. In: Krantz, S.G., Kumar, S. and Nekovár, J., Eds., *Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher*, Birkhauser, Basel.