Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 316-322
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93042

Hans汉斯

Finite Abelian Group with Automorphism Group for Order $2^t pq(1 \le t \le 3)$

Jingjing Shi, Fang Zhou*

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: 1244864544@qq.com, *tysf_zhoufang@163.com

Received: Apr. 16th, 2019; accepted: Apr. 27th, 2019; published: May 9th, 2019

Abstract

In this paper, according to the character of finite Abelian group *G* and the order of automorphism group of it, the structure of finite Abelian group *G* with automorphism group for the order $2^t pq(1 \le t \le 3)$ is discussed. The following results are obtained: *G* has 6 types when $t = 1$; *G* has 22 types when $t = 2$; *G* has 49 types when $t = 3$.

Keywords

Finite Abelian Group, Automorphism, Structure of Group

自同构群的阶为$2^t pq(1 \le t \le 3)$的有限Abel群G

石静静，周　芳*

太原师范学院数学系，山西　晋中
Email: 1244864544@qq.com, *tysf_zhoufang@163.com

收稿日期：2019年4月16日；录用日期：2019年4月27日；发布日期：2019年5月9日

摘　要

本文利用有限Abel群*G*的性质和它的自同构群的阶，讨论了自同构群$A(G)$的阶为$2^t pq(1 \le t \le 3)$的有限Abel群*G*的构造。得出以下结果：当$t = 1$时，*G*最多有6型；当$t = 2$时，*G*最多有22型；当$t = 3$时，*G*最多有49型。

*通讯作者。

文章引用: 石静静, 周芳. 自同构群的阶为$2^t pq(1 \le t \le 3)$的有限 Abel 群 *G* [J]. 理论数学, 2019, 9(3): 316-322.
DOI: 10.12677/pm.2019.93042

关键词

有限Abel群，自同构群，群构造

1. 引言

众所周知，自同构群 $A(G)$ 是由群 G 决定的。反之，如果知道 $A(G)$ 的阶，能否确定群 G 的构造？余红宴和黄本文在这方面做了一些研究，见[1] [2] [3]。本文将讨论当 $A(G)$ 的阶为 $2^t pq$ 时，群 G 的构造。文中设群 G 是有限 Abel 群，$|G|$ 表示群 G 的阶，$A(G)$ 表示群 G 的自同构群，C_n 表示 n 阶的循环群，而 S_{p_i} 表示群 G 的 Sylow p_i 子群，其它符号是标准的，见文献[4]。

2. 预备知识

引理 2.1 [4]若 $G \simeq C_n$，则 $A(G)$ 为 $\varphi(n)$ 阶的交换群，其中 $\varphi(n)$ 为欧拉函数。

引理 2.2 [4]若 G 是 p^n 阶交换群，则 $p^{n-1}(p-1) \mid |A(G)|$。

引理 2.3 [4]设 $G = H \times K$，则当 $(|H|,|K|) = 1$ 时，$A(G) \simeq A(H) \times A(K)$。

引理 2.4 [5]设 G 是 p^n 阶交换群，G 的型为 $[\underbrace{m_1,\cdots,m_1}_{s_1};\underbrace{m_2,\cdots,m_2}_{s_2};\cdots;\underbrace{m_t,\cdots,m_t}_{s_t}]$，其中 $m_1 > m_2 > \cdots > m_t > 0$，$s_i > 0$，则 $|A(G)| = p^u \prod_{i=1}^{t} \prod_{k=1}^{s_i} (p^k - 1)$，其中

$$u = \sum_{i,j=1}^{t} s_i s_j m_{ij} - \sum_{i=1}^{t} \frac{s_i(s_i+1)}{2}, \quad m_{ij} = m_{\max\{i,j\}}$$

下面在定理的证明中，总假定 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为不同的奇素数。

3. 主要结果及证明

定理 3.1 设G为有限交换群，当 $|A(G)| = 2pq$ （p，q 为互异的奇素数)时，群 G 最多有 6 型。

证明： 设 $|G| = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，则 $G \cong S_2 \times S_{p_1} \times S_{p_2} \times \cdots \times S_{p_k}$，并且 $A(G) \cong A(S_2) \times A(S_{p_1}) \times A(S_{p_2}) \times \cdots \times A(S_{p_k})$。由于对每个奇素数 p_i 来说，都有 $2 \mid |A(S_{p_i})|$，而 $|A(S_{p_i})| \mid |A(G)| = 2pq$，则有 $2^k \mid 2pq$，所以 $k = 0,1$。

(1) 当 $k = 0$ 时，$|G| = 2^{\alpha_0}$。又 $2^{\alpha_0 - 1} \mid |A(S_2)|$，而 $|A(S_2)| \mid |A(G)| = 2pq$，故 $\alpha_0 = 1,2$。

(I) 当 $\alpha_0 = 1$ 时，$|G| = 2$，则 $G \cong C_2$，进而 $|A(G)| = 1$，与 $|A(G)| = 2pq$ 矛盾。

(II) 当 $\alpha_0 = 2$ 时，$|G| = 4$，则 $G \cong C_{2^2}$，$C_2 \times C_2$。

(i) 若 $G \cong C_{2^2}$，有 $|A(G)| = 2$，与 $|A(G)| = 2pq$ 矛盾。

(ii) 若 $G \cong C_2 \times C_2$，有 $|A(G)| = 6$，与 $|A(G)| = 2pq$ 矛盾。

(2) 当 $k = 1$ 时，由于 $2 \mid |A(S_{p_i})|$，得 $A(S_2) = 1$，则有 $\alpha_0 = 0,1$。又由 $p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) \mid |A(S_{p_1})|$，而 $|A(S_{p_1})| \mid |A(G)| = 2pq$，故 $\alpha_1 = 1,2$。

(I) 当 $\alpha_1=1$ 时，则有 $S_{p_1}=C_{p_1}$，我们有 $G\cong C_{p_1}$，$C_2\times C_{p_1}$。由于 $|A(G)|=p_1-1=2pq$，可得 $p_1=2pq+1$。当 $2pq+1$ 为素数时，有 $G_1\cong C_{2pq+1}$，$G_2\cong C_2\times C_{2pq+1}$。

(II) 当 $\alpha_1=2$ 时，则 $S_{p_1}=C_{p_1^2}$，$C_{p_1}\times C_{p_1}$。

(i) 若 $S_{p_1}=C_{p_1^2}$，有 $G\cong C_{p_1^2}$，$C_2\times C_{p_1^2}$。因为 $|A(G)|=p_1(p_1-1)=2pq$，令 $p_1=q$，即 $p_1=q=2p+1$。当 $2p+1$ 为素数时，有 $G_3\cong C_{(2p+1)^2}$，$G_4\cong C_2\times C_{(2p+1)^2}$。同理，令 $p_1=p$，即 $p_1=p=2q+1$，当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_5\cong C_{(2q+1)^2}$，$G_6\cong C_2\times C_{(2q+1)^2}$。

(ii) 若 $S_{p_1}=C_{p_1}\times C_{p_1}$，则有 $G\cong C_{p_1}\times C_{p_1}$，$C_2\times C_{p_1}\times C_{p_1}$，此时 $|A(G)|=p_1(p_1-1)^2(p_1+1)=2pq$，与 $2^3\,|\,|A(G)|=2pq$ 矛盾，故 G 不存在。

定理 3.2 设 G 为有限交换群，当 $|A(G)|=2^2pq$ (p，q 为互异的奇素数)时，群 G 最多有 22 型。

证明： 设 $|G|=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则有 $G\cong S_2\times S_{p_1}\times S_{p_2}\times\cdots\times S_{p_k}$，且 $A(G)\cong A(S_2)\times A(S_{p_1})\times A(S_{p_2})\times\cdots\times A(S_{p_k})$。由于对每一个奇素数 p_i，有 $2\,|\,|A(S_{p_i})|$，而且 $|A(S_{p_i})|\,|\,|A(G)|=2^2pq$，所以 $2^k\,|\,2^2pq$，故 $k=0,1,2$。

(1) 当 $k=0$ 时，$|G|=2^{\alpha_0}$。由于 $2^{\alpha_0-1}\,|\,|A(S_2)|$，且 $|A(S_2)|\,|\,2^2pq$，可得 $\alpha_0=1,2,3$。

(I) 当 $\alpha_0=1,2$ 时，由定理 3.1 的证明可知，G 是不存在的。

(II) 当 $\alpha_0=3$ 时，$|G|=2^3$，则 $G\cong C_{2^3},C_{2^2}\times C_2,C_2\times C_2\times C_2$。

(i) 若 $G\cong C_{2^3}$，有 $|A(G)|=2^2$。

(ii) 若 $G\cong C_{2^2}\times C_2$，有 $|A(G)|=2^3$。

(iii) 若 $G\cong C_2\times C_2\times C_2$，有 $|A(G)|=2^3\cdot 3\cdot 7$。均与 $|A(G)|=2^2pq$ 矛盾。

(2) 当 $k=1$ 时，$|G|=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}$，由 $2\,|\,|A(S_{p_i})|$ 可知，$A(S_2)=1$，则 $\alpha_0=0,1,2$。

(I) 当 $\alpha_0=0,1$ 时，我们有 $p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\,|\,|A(S_{p_1})|$，并且 $|A(S_{p_1})|\,|\,|A(G)|=2^2pq$，故 $\alpha_1=1,2$。

(i) 当 $\alpha_1=1$ 时，有 $G\cong C_{p_1},C_2\times C_{p_1}$，此时 $|A(G)|=p_1-1=2^2pq$，得出 $p_1=2^2pq+1$。当 2^2pq+1 为素数时，有 $G_1\cong C_{2^2pq+1}$，$G_2\cong C_2\times C_{2^2pq+1}$。

(ii) 当 $\alpha_1=2$ 时，可知 $S_{p_1}=C_{p_1^2},C_{p_1}\times C_{p_1}$。

(a) 若 $S_{p_1}=C_{p_1^2}$，则 $G\cong C_{p_1^2},C_2\times C_{p_1^2}$。由于 $|A(G)|=p_1(p_1-1)=2^2pq$，若令 $p_1=q$，即 $p_1=q=2^2p+1$。当 2^2p+1 为素数时，有 $G_3\cong C_{(2^2p+1)^2}$，$G_4\cong C_2\times C_{(2^2p+1)^2}$。同理，令 $p_1=p$，有 $G_5\cong C_{(2^2q+1)^2}$，$G_6\cong C_2\times C_{(2^2q+1)^2}$。

(b) 若 $S_{p_1}=C_{p_1}\times C_{p_1}$，则有 $G\cong C_{p_1}\times C_{p_1},C_2\times C_{p_1}\times C_{p_1}$，而 $|A(G)|=p_1(p_1-1)^2(p_1+1)=2^2pq$，与 $2^3\,|\,|A(G)|=2^2pq$ 矛盾，因此 G 不存在。

(II) 当 $\alpha_0=2$ 时，$S_2=C_{2^2},C_2\times C_2$。

(i) 当 $\alpha_1=1$ 时，$S_{p_1}=C_{p_1}$。

(a) 若 $S_2=C_{2^2}$，有 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1}$，由于 $|A(G)|=2(p_1-1)=2^2pq$，可得 $p_1=2pq+1$。当 $2pq+1$ 为素数时，有 $G_7\cong C_{2^2}\times C_{2pq+1}$。

(b) 若 $S_2=C_2\times C_2$，有 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1}$，因为 $|A(G)|=2\cdot3(p_1-1)=2^2pq$，可令 $p=3$，则有 $p_1=2q+1$。当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_8\cong C_2\times C_2\times C_{2q+1}$。

(ii) 当 $\alpha_1=2$ 时，$S_{p_1}=C_{p_1^2},C_{p_1}\times C_{p_1}$。

(a) 若 $S_2=C_{2^2}$，则有 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1^2},C_{2^2}\times C_{p_1}\times C_{p_1}$。

若 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1^2}$，此时 $|A(G)|=2p_1(p_1-1)=2^2pq$。若令 $p_1=p$，则 $p_1=p=2q+1$。当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_9\cong C_{2^2}\times C_{(2q+1)^2}$。同理，令 $p_1=q$ 时，有 $G_{10}\cong C_{2^2}\times C_{(2p+1)^2}$。

若 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1}\times C_{p_1}$，由于 $|A(G)|=2p_1(p_1-1)^2(p_1+1)=2^2pq$，得 $p_1(p_1-1)^2(p_1+1)=2pq$，矛盾，故 G 不存在。

(b) 若 $S_2=C_2\times C_2$，此时 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1^2},C_2\times C_2\times C_{p_1}\times C_{p_1}$。

若 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1^2}$，由于 $|A(G)|=2\cdot3\cdot p_1(p_1-1)=2^2pq$，则有 $3\cdot p_1(p_1-1)=2pq$，此时得到 $p_1=p=q=3$，与 p,q 为不同的奇素数矛盾，因此 G 不存在。

若 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1}\times C_{p_1}$，由 $|A(G)|=2\cdot3\cdot p_1(p_1-1)^2(p_1+1)=2^2pq$，我们有 $3\times p_1(p_1-1)^2(p_1+1)=2pq$，矛盾，故 G 不存在。

(3) 当 $k=2$ 时，$|G|=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$，又 $2\,|\,|A(S_{p_i})|(i=1,2)$，所以 $\alpha_0=0,1$。由 $p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\,|\,2^2pq$，可得 $\alpha_1=1,2$，$\alpha_2=1,2$。

(I) $\alpha_1=1,\alpha_2=1$：$G\cong C_{p_1}\times C_{p_2},C_2\times C_{p_1}\times C_{p_2}$，此时有 $|A(G)|=(p_1-1)(p_2-1)=2^2pq$。由于 p_1-1,p_2-1 是不同的偶数，而 $2^2pq=2\cdot2pq=2p\cdot2q$，则当 $2pq+1$ 为素数时，有 $G_{11}\cong C_3\times C_{2pq+1}$，$G_{12}\cong C_2\times C_3\times C_{2pq+1}$；当 $2p+1,2q+1$ 为素数时，有 $G_{13}\cong C_{2p+1}\times C_{2q+1}$，$G_{14}\cong C_2\times C_{2p+1}\times C_{2q+1}$。

(II) $\alpha_1=2,\alpha_2=1$：此时只需考虑 $G\cong C_{p_1^2}\times C_{p_2},C_2\times C_{p_1^2}\times C_{p_2}$。由于 $|A(G)|=p_1(p_1-1)(p_2-1)=2^2pq$，若令 $p_1=p$，则有 $(p_1-1)(p_2-1)=2^2q$。由于 p_1-1,p_2-1 是不同的偶数，而 $2^2q=2\cdot2q$，则当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_{15}\cong C_{3^2}\times C_{2q+1}$，$G_{16}\cong C_2\times C_{3^2}\times C_{2q+1}$，$G_{17}\cong C_{(2q+1)^2}\times C_3$，$G_{18}\cong C_2\times C_{(2q+1)^2}\times C_3$。同理，令 $p_1=q$ 时，有 $G_{19}\cong C_{3^2}\times C_{2p+1}$，$G_{20}\cong C_2\times C_{3^2}\times C_{2p+1}$，$G_{21}\cong C_{(2p+1)^2}\times C_3$，$G_{22}\cong C_2\times C_{(2p+1)^2}\times C_3$。

(III) $\alpha_1=2,\alpha_2=2$：只需考虑 $G\cong C_{p_1^2}\times C_{p_2^2},C_2\times C_{p_1^2}\times C_{p_2^2}$，由 $|A(G)|=p_1(p_1-1)p_2(p_2-1)=2^2pq$，可得 $p_1=p_2=p=q=3$，与 p,q 为互异的奇素数不符，故 G 不存在。

定理 3.3 设 G 为有限交换群，当 $|A(G)|=2^3pq$ (p，q 为互异的奇素数)时，群 G 最多有 49 型。

证明： 设 $|G|=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，则有 $G\cong S_2\times S_{p_1}\times S_{p_2}\times\cdots\times S_{p_k}$，以及 $A(G)\cong A(S_2)\times A(S_{p_1})\times A(S_{p_2})\times\cdots\times A(S_{p_k})$。由于对每个奇素数 p_i，有 $2\,|\,|A(S_{p_i})|$，而 $|A(S_{p_i})|\,|\,|A(G)|=2^3pq$，所以 $2^k\,|\,2^3pq$，因此可得 $k=0,1,2,3$。

(1) 当 $k=0$ 时，$|G|=2^{\alpha_0}$。又因为 $2^{\alpha_0-1}\,|\,|A(S_2)|$，而 $|A(S_2)|\,|\,2^3pq$，所以 $\alpha_0=1,2,3,4$。

(I) 当 $\alpha_0=1,2,3$ 时，由定理 3.2 的证明知，G 不存在。

(II) 当 $\alpha_0=4$ 时，$|G|=2^4$，则 $G\cong C_{2^4},C_{2^3}\times C_2,C_{2^2}\times C_2\times C_2,C_{2^2}\times C_{2^2},C_2\times C_2\times C_2\times C_2$。

(i) 若 $G\cong C_{2^4}$，则有 $|A(G)|=2^3$ 与 2^3pq 不符。

(ii) 若 $G\cong C_{2^3}\times C_2,C_{2^2}\times C_2\times C_2,C_{2^2}\times C_{2^2},C_2\times C_2\times C_2\times C_2$，由计算可知均有 $2^4\,|\,|A(G)|=2^3pq$ 矛盾，故 G 不存在。

(2) 当 $k=1$ 时，$|G|=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}$，因为 $2\,|\,\left|A\left(S_{p_i}\right)\right|$，可知 $A\left(S_2\right)=1$，则 $\alpha_0=0,1,2,3$。

(I) 当 $\alpha_0=0,1$ 时，由于 $p_1^{\alpha_1-1}\left(p_1-1\right)|\left|A\left(S_{p_1}\right)\right|$，而又有 $\left|A\left(S_{p_1}\right)\right|\,|\,|A(G)|=2^3pq$，故 $\alpha_1=1,2$。

(i) 当 $\alpha_1=1$ 时，$G\cong C_{p_1},C_2\times C_{p_1}$，此时 $|A(G)|=p_1-1=2^3pq$，得到 $p_1=2^3pq+1$。当 2^3pq+1 为素数时，有 $G_1\cong C_{2^3pq+1}$，$G_2\cong C_2\times C_{2^3pq+1}$。

(ii) 当 $\alpha_1=2$ 时，可知 $S_{p_1}=C_{p_1^2},C_{p_1}\times C_{p_1}$。

(a) 若 $S_{p_1}=C_{p_1^2}$，有 $G\cong C_{p_1^2},C_2\times C_{p_1^2}$，此时 $|A(G)|=p_1\left(p_1-1\right)=2^3pq$。若令 $p_1=q$，即 $p_1=q=2^3p+1$。当 2^3p+1 为素数时，有 $G_3\cong C_{\left(2^3p+1\right)^2}$，$G_4\cong C_2\times C_{\left(2^3p+1\right)^2}$。同理，令 $p_1=p$ 时，有 $G_5\cong C_{\left(2^3q+1\right)^2}$，$G_6\cong C_2\times C_{\left(2^3q+1\right)^2}$。

(b) 若 $S_{p_1}=C_{p_1}\times C_{p_1}$，则有 $G\cong C_{p_1}\times C_{p_1},C_2\times C_{p_1}\times C_{p_1}$。由 $|A(G)|=p_1\left(p_1-1\right)^2\left(p_1+1\right)=2^3pq$，若 $p_1-1=2\lambda$，λ 为偶数时，产生矛盾。λ 为奇数时，代入等式左边为偶数，右边为奇数，不符，因此 G 不存在。

(II) 当 $\alpha_0=2$ 时，$S_2=C_{2^2},C_2\times C_2$。

(i) 当 $\alpha_1=1$ 时，$S_{p_1}=C_{p_1}$。

(a) 若 $S_2=C_{2^2}$，有 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1}$，由 $|A(G)|=2\left(p_1-1\right)=2^3pq$，得出 $p_1=2^2pq+1$。当 2^2pq+1 为素数时，有 $G_7\cong C_{2^2}\times C_{2^2pq+1}$。

(b) 若 $S_2=C_2\times C_2$，则 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1}$，此时 $|A(G)|=2\cdot3\left(p_1-1\right)=2^3pq$。若 $p=3$，可知 $p_1=2^2q+1$。当 2^2q+1 为素数时，有 $G_8\cong C_2\times C_2\times C_{2^2q+1}$。

(ii) 当 $\alpha_1=2$ 时，$S_{p_1}=C_{p_1^2},C_{p_1}\times C_{p_1}$。

(a) 若 $S_2=C_{2^2}$，可知 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1^2},C_{2^2}\times C_{p_1}\times C_{p_1}$。

当 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1^2}$，由 $|A(G)|=2p_1\left(p_1-1\right)=2^3pq$，得 $p_1\left(p_1-1\right)=2^2pq$。若令 $p_1=p$，即 $p_1=p=2^2q+1$。当 2^2q+1 为素数时，有 $G_9\cong C_{2^2}\times C_{\left(2^2q+1\right)^2}$。同理，令 $p_1=q$ 时，有 $G_{10}\cong C_{2^2}\times C_{\left(2^2p+1\right)^2}$。

当 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1}\times C_{p_1}$，由 $|A(G)|=2p_1\left(p_1-1\right)^2\left(p_1+1\right)=2^3pq$，得 $p_1\left(p_1-1\right)^2\left(p_1+1\right)=2^2pq$，产生矛盾，故 G 不存在。

(b) 若 $S_2=C_2\times C_2$，有 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1^2}$，$C_2\times C_2\times C_{p_1}\times C_{p_1}$。

当 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1^2}$，我们有 $|A(G)|=2\cdot3\cdot p_1\left(p_1-1\right)=2^3pq$，从而 $3\cdot p_1\left(p_1-1\right)=2^2pq$。若令 $p=3$，则 $p_1=q=5$，于是有 $G_{11}\cong C_2\times C_2\times C_{5^2}$。

当 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1}\times C_{p_1}$，则有 $|A(G)|=2\cdot3\cdot p_1\left(p_1-1\right)^2\left(p_1+1\right)=2^3pq$，于是 $3\cdot p_1\left(p_1-1\right)^2\left(p_1+1\right)=2^2pq$，产生矛盾，因此 G 不存在。

(III) 当 $\alpha_0=3$ 时，$S_2=C_{2^3},C_{2^2}\times C_2,C_2\times C_2\times C_2$。当 $S_2=C_{2^2}\times C_2,C_2\times C_2\times C_2$ 时，由前面的证明易知 G 不存在，所以只需考虑 $S_2=C_{2^3}$。

(i) 当 $\alpha_1=1$ 时，$S_{p_1}=C_{p_1}$，有 $G\cong C_{2^3}\times C_{p_1}$。由于 $|A(G)|=2^2\left(p_1-1\right)=2^3pq$，可得 $p_1-1=2pq$，从而 $p_1=2pq+1$。当 $2pq+1$ 为素数时，有 $G_{12}\cong C_{2^3}\times C_{2pq+1}$。

(ii) 当 $\alpha_1=2$ 时，$S_{p_1}=C_{p_1^2},C_{p_1}\times C_{p_1}$，同样也只考虑 $S_{p_1}=C_{p_1^2}$，于是 $G\cong C_{2^3}\times C_{p_1^2}$，此时

$|A(G)| = 2^2 p_1(p_1-1) = 2^3 pq$，可得 $p_1(p_1-1)=2pq$。若令 $p_1 = p$，即 $p_1 = p = 2q+1$，当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_{13} \cong C_{2^3} \times C_{(2q+1)^2}$。同理，令 $p_1 = q$ 时，有 $G_{14} \cong C_{2^3} \times C_{(2p+1)^2}$。

(3) 当 $k=2$ 时，$|G| = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$，又因为 $2 \mid |A(S_{p_i})| (i=1,2)$，所以 $\alpha_0 = 0,1,2$。由 $p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1) p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \mid 2^3 pq$，得出 $\alpha_1 = 1,2$，$\alpha_2 = 1,2$。

(I) 当 $\alpha_0 = 0,1$ 时，

(i) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$：此时 $G \cong C_{p_1} \times C_{p_2}, C_2 \times C_{p_1} \times C_{p_2}$，于是 $|A(G)| = (p_1-1)(p_2-1) = 2^3 pq$。由于 $p_1 - 1, p_2 - 1$ 是不同的偶数，而 $2^3 pq = 2 \cdot 2^2 pq = 2^2 \cdot 2pq = 2p \cdot 2^2 q = 2^2 p \cdot 2q$。所以当 $2^2 pq+1$ 为素数时，有 $G_{15} \cong C_3 \times C_{2^2 pq+1}$，$G_{16} \cong C_2 \times C_3 \times C_{2^2 pq+1}$；当 $2pq+1$ 为素数时，有 $G_{17} \cong C_5 \times C_{2pq+1}$，$G_{18} \cong C_2 \times C_5 \times C_{2pq+1}$；当 $2p+1, 2^2 q+1$ 为素数时，有 $G_{19} \cong C_{2p+1} \times C_{2^2 q+1}$，$G_{20} \cong C_2 \times C_{2p+1} \times C_{2^2 q+1}$；当 $2^2 p+1, 2q+1$ 为素数时，有 $G_{21} \cong C_{2^2 p+1} \times C_{2q+1}$，$G_{22} \cong C_2 \times C_{2^2 p+1} \times C_{2q+1}$。

(ii) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$：只需考虑 $G \cong C_{p_1^2} \times C_{p_2}, C_2 \times C_{p_1^2} \times C_{p_2}$，于是有 $|A(G)| = p_1(p_1-1)(p_2-1) = 2^3 pq$。由于 p_1-1, p_2-1 是不同的偶数，若 $p_1 = p$，则 $(p-1)(p_2-1) = 2^3 q$，而 $2^3 q = 2 \cdot 2^2 q = 2^2 \cdot 2q$。所以当 $2^2 q+1$ 为素数时，有 $G_{23} \cong C_{3^2} \times C_{2^2 q+1}$，$G_{24} \cong C_2 \times C_{3^2} \times C_{2^2 q+1}$，$G_{25} \cong C_{(2^2 q+1)^2} \times C_3$，$G_{26} \cong C_2 \times C_{(2^2 q+1)^2} \times C_3$；当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_{27} \cong C_{5^2} \times C_{2q+1}$，$G_{28} \cong C_2 \times C_{5^2} \times C_{2q+1}$，$G_{29} \cong C_{(2q+1)^2} \times C_5$，$G_{30} \cong C_2 \times C_{(2q+1)^2} \times C_5$。同理，若令 $p_1 = q$，则当 $2^2 p+1$ 为素数时，有 $G_{31} \cong C_{3^2} \times C_{2^2 p+1}$，$G_{32} \cong C_2 \times C_{3^2} \times C_{2^2 p+1}$，$G_{33} \cong C_{(2^2 p+1)^2} \times C_3$，$G_{34} \cong C_2 \times C_{(2^2 p+1)^2} \times C_3$；当 $2p+1$ 为素数时，有 $G_{35} \cong C_{5^2} \times C_{2p+1}$，$G_{36} \cong C_2 \times C_{5^2} \times C_{2p+1}$，$G_{37} \cong C_{(2p+1)^2} \times C_5$，$G_{38} \cong C_2 \times C_{(2p+1)^2} \times C_5$。

(iii) $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 2$：我们只需考虑 $G \cong C_{p_1^2} \times C_{p_2^2}, C_2 \times C_{p_1^2} \times C_{p_2^2}$，由 $|A(G)| = p_1(p_1-1)p_2(p_2-1) = 2^3 pq$，可得 $p_1 = p = 3$，$p_2 = q = 5$，则有 $G_{39} \cong C_{3^2} \times C_{5^2}$，$G_{40} \cong C_2 \times C_{3^2} \times C_{5^2}$。

(II) 当 $\alpha_0 = 2$ 时，$S_2 = C_{2^2}, C_2 \times C_2$。

(i) 当 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1$ 时，

(a) 若 $S_2 = C_{2^2}$，有 $G \cong C_{2^2} \times C_{p_1} \times C_{p_2}$，从而 $|A(G)| = 2(p_1-1)(p_2-1) = 2^3 pq$，进而 $(p_1-1)(p_2-1) = 2^2 pq$。由于 p_1-1, p_2-1 是不同的偶数，而 $2^2 pq = 2 \cdot 2pq = 2p \cdot 2q$。所以当 $2pq+1$ 为素数时，有 $G_{41} \cong C_{2^2} \times C_3 \times C_{2pq+1}$；当 $2p+1, 2q+1$ 为素数时，有 $G_{42} \cong C_{2^2} \times C_{2p+1} \times C_{2q+1}$。

(b) 若 $S_2 = C_2 \times C_2$，有 $G \cong C_2 \times C_2 \times C_{p_1} \times C_{p_2}$，从而 $|A(G)| = 2 \cdot 3(p_1-1)(p_2-1) = 2^3 pq$，进而 $3(p_1-1)(p_2-1) = 2^2 pq$。若令 $p=3$，则有 $(p_1-1)(p_2-1) = 2^2 q$，而 $2^2 q = 2 \cdot 2q$。所以当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_{43} \cong C_2 \times C_2 \times C_3 \times C_{2q+1}$。

(ii) 当 $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$ 时，

(a) 若 $S_2 = C_{2^2}$，我们有 $G \cong C_{2^2} \times C_{p_1^2} \times C_{p_2}$，从而 $|A(G)| = 2p_1(p_1-1)(p_2-1) = 2^3 pq$，进而 $p_1(p_1-1)(p_2-1) = 2^2 pq$。若 $p_1 = p$，则 $(p-1)(p_2-1) = 2^2 q$，而 $2^2 q = 2 \cdot 2q$。当 $2q+1$ 为素数时，有 $G_{44} \cong C_{2^2} \times C_{3^2} \times C_{2q+1}$，$G_{45} \cong C_{2^2} \times C_{(2q+1)^2} \times C_3$；同理，若令 $p_1 = q$，则有 $G_{46} \cong C_{2^2} \times C_{3^2} \times C_{2p+1}$，$G_{47} \cong C_{2^2} \times C_{(2p+1)^2} \times C_3$。

(b) 若 $S_2 = C_2 \times C_2$，有 $G \cong C_2 \times C_2 \times C_{p_1^2} \times C_{p_2}$。由于 $|A(G)| = 2 \cdot 3 p_1(p_1-1)(p_2-1) = 2^3 pq$，从而

$3p_1(p_1-1)(p_2-1)=2^2pq$。此时 $p_1=p_2=p=q=3$，与 p,q 为互异的奇素数不符，故 G 不存在。

(iii) 当 $\alpha_1=2,\alpha_2=2$ 时，

(a) 则 $G\cong C_{2^2}\times C_{p_1^2}\times C_{p_2^2}$，于是 $|A(G)|=2p_1(p_1-1)p_2(p_2-1)=2^3pq$，可得 $p_1(p_1-1)p_2(p_2-1)=2^2pq$。此时 $p_1=p_2=p=q=3$，与 p,q 为不同的奇素数矛盾，所以 G 不存在。

(b) 有 $G\cong C_2\times C_2\times C_{p_1^2}\times C_{p_2^2}$，此时 $|A(G)|=2\cdot 3p_1(p_1-1)p_2(p_2-1)=2^3pq$，从而可得 $3p_1(p_1-1)p_2(p_2-1)=2^2pq$，矛盾，所以 G 不存在。

(4) 当 $k=3$ 时，我们有 $\alpha_0=0,1$。

(I) $\alpha_1=1,\alpha_2=1,\alpha_3=1$：此时 $G\cong C_{p_1}\times C_{p_2}\times C_{p_3},C_2\times C_{p_1}\times C_{p_2}\times C_{p_3}$，从而 $|A(G)|=(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)=2^3pq$，而 $2^3pq=2\cdot 2p\cdot 2q$。所以当 $2p+1,2q+1$ 为素数时，有 $G_{48}\cong C_3\times C_{2p+1}\times C_{2q+1}$，$G_{49}\cong C_2\times C_3\times C_{2p+1}\times C_{2q+1}$。

(II) $\alpha_1=2,\alpha_2=1,\alpha_3=1$：此时 $G\cong C_{p_1^2}\times C_{p_2}\times C_{p_3},C_2\times C_{p_1^2}\times C_{p_2}\times C_{p_3}$，从而 $|A(G)|=p_1(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)=2^3pq$。令 $p_1=p$，而 $2^3q=2\cdot 2\cdot 2q$，此时 $p_1=p_2=p=3$，$p_3=2q+1$，产生矛盾，因此 G 不存在。同理，$p_1=q$ 时，G 也是不存在的。

(III) $\alpha_1=2,\alpha_2=2,\alpha_3=1$：有 $G\cong C_{p_1^2}\times C_{p_2^2}\times C_{p_3},C_2\times C_{p_1^2}\times C_{p_2^2}\times C_{p_3}$。由于 $|A(G)|=p_1(p_1-1)p_2(p_2-1)(p_3-1)=2^3pq$，此时得到 $p_1=p_2=p_3=p=q=3$，与 p,q 为互异的奇素数不符，从而 G 不存在。

(IV) $\alpha_1=2,\alpha_2=2,\alpha_3=2$：有 $G\cong C_{p_1^2}\times C_{p_2^2}\times C_{p_3^2},C_2\times C_{p_1^2}\times C_{p_2^2}\times C_{p_3^2}$，此时 $|A(G)|=p_1(p_1-1)p_2(p_2-1)p_3(p_3-1)=2^3pq$，产生矛盾，故 G 不存在。

4. 结束语

本文讨论了自同构群的阶为 $2^tpq(1\le t\le 3)$ 的有限 Abel 群 G 的构造，得出：当 $t=1$ 时，G 最多有 6 型；当 $t=2$ 时，G 最多有 22 型；当 $t=3$ 时，G 最多有 49 型。

基金项目

国家自然科学基金(11401424)资助项目资助。

参考文献

[1] 余红宴, 黄本文. 自同构群的阶为 $2^tp^2q(t=1,2,3)$ 的有限 Abel 群 G [J]. 数学杂志, 2010, 30(5): 883-890.

[2] 余红宴. 自同构群的阶为 2^tp^2 (p 为奇素数)的有限 Abel 群 G [J]. 信阳师范学院学报(自然科学版), 2011, 24(3): 287-291.

[3] 黄本文. $|A(G)|=2^tpqr(1\le t\le 3)$ 的有限 Abel 群 G 的构造[J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1993(2): 9-13.

[4] 张远达. 有限群构造(上、下册) [M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[5] 俞曙霞. 有限交换 p-群的自同构群的阶的几点注记[J]. 数学杂志, 1983(2): 189-194.