Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 421-426
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93057

Hans汉斯

Some Hadamard-Type Inequalities for (h, m)-Convex Functions

Yaqi Chen, Xin Chen, Xiang Gao

School of Mathematics Sciences, Ocean University of China, Qingdao Shandong
Email: yaqichen77@163.com, xinchen_na@163.com, gaoxianghero@126.com

Received: Apr. 26th, 2019; accepted: May 6th, 2019; published: May 24th, 2019

Abstract

In this paper, we are interested to present the Hermite-Hadamard-type inequalities for product of (h, m)-convex functions via three new inequalities. Presented results have close connection with some classical Hermite-Hadamard-type inequality.

Keywords

Hadamard-Type Inequality, (h, m)-Convex Function

一些关于(h, m)凸函数的Hadamard类型不等式

陈雅琦，陈　欣，高　翔

中国海洋大学数学科学学院，山东　青岛
Email: yaqichen77@163.com, xinchen_na@163.com, gaoxianghero@126.com

收稿日期：2019年4月26日；录用日期：2019年5月6日；发布日期：2019年5月24日

摘　要

本文主要研究了基于经典Hadamard不等式的一类不等式在(h, m)凸函数上的形式，得到了三个有意义的推广后的不等式。

关键词

Hadamard不等式，(h, m)凸函数

文章引用: 陈雅琦, 陈欣, 高翔. 一些关于(h, m)凸函数的 hadamard 类型不等式[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 421-426.
DOI: 10.12677/pm.2019.93057

1. 引言

不等式是数学理论中非常重要的组成部分，很多复杂的数学问题需要借助不等式进行简化才得以顺利求解。作为不等式家族的重要成员，凸型不等式一直备受关注。这一方面是由于很多凸型不等式的证明都颇具挑战性，建立需要较强的数学技巧；另一方面是由于凸型不等式往往都具有非常优美的表现形式和直观的几何意义。其中，Hermite-Hadamard 不等式是使用频率非常高的一个经典凸型不等式。

作为数学上最重要的概念之一，凸函数的研究一直吸引着数学工作者的注意。国内外数学工作者们在凸分析上进行了大量的探索，其中，针对凸函数的定义，人们将 J 凸函数的条件进行加强或者削弱，得到了许多不同的凸概念，如几何凸函数、调和凸函数、算术平方凸函数、h-凸函数、m-凸函数、(h, m)-凸函数等。在此后的研究中，国内外数学工作者根据以上凸函数进行了许多研究，尤其是对各种凸函数关于Hermite-Hadamard 型不等式的探索取得了卓有成效的结果。本文正是受此启发，研究了(h, m)-凸函数的定义和性质，给出了关于(h, m)-凸函数的若干定理，建立了(h, m)-凸函数的三个 Hermite-Hadamard 类型不等式。

2. 定义

2.1. 凸函数

设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上的任意两点 x, y 以及 $\alpha \in [0,1]$，总有 $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ 成立，则称 f 为 I 上的凸函数。

2.2. h-凸函数

若 h 是定义在区间 J 上的一个非负函数，f 是定义在区间 I 上的非负函数，且对 $\forall x, y \in I, \alpha \in [0,1]$，总有 $f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le h(\alpha) f(x) + h(1-\alpha) f(y)$ 成立，则称 f 为 I 上的 h-凸函数，可记作 $f \in SX(h, I)$。

2.3. m-凸函数

若 f 是定义在区间 I 上的函数，且对 $\forall x, y \in I, \alpha \in [0,1]$，总有 $f(\alpha x + m(1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + m(1-\alpha) f(y)$ 成立，则称 f 为 I 上的 m-凸函数。

2.4. (h, m)-凸函数

若 h 是定义在区间 J 上的一个非负函数，f 是定义在区间 I 上的非负函数，且对 $\forall x, y \in I, \alpha \in [0,1]$，总有 $f(\alpha x + m(1-\alpha) y) \le h(\alpha) f(x) + mh(1-\alpha) f(y)$ 成立，则称 f 为 I 上的(h, m)-凸函数。

2.5. Hermite-Hadamard 不等式[1]

若 f 是定义在 $[a,b]$ 上的连续凸函数，则有(1)式成立：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

(1)式被称为 Hermite-Hadamard 不等式。同时，若 f 是凹函数，则上述两个不等式同时反向成立。

3. 引理

3.1. 引理 1 [2]

若 f，g 是定义在 $[a,b]\to[0,\infty)$ 上的凸函数，则有不等式(2)、(3)成立：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{3}M(a,b)+\frac{1}{6}N(a,b) \tag{2}$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{6}M(a,b)+\frac{1}{3}N(a,b) \tag{3}$$

其中，$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b);N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$。

3.2. 引理 2 [3]

若对 $\forall a,b\in I$，且 $a<b$，$f\in L_1([a,b])$，$t\in[0,1]$，有 $f\in SX(h_1,I)$，$g\in SX(h_2,I)$，$fg\in L_1([a,b])$，$h_1h_2\in L_1([a,b])$，则有(4)式成立：

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}t \le M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\mathrm{d}t+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

其中：$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b);N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$。

3.3. 引理 3 [3]

若对 $\forall a,b\in I$，且 $a<b$，$f\in L_1([a,b])$，$t\in[0,1]$，有 $f\in SX(h_1,I)$，$g\in SX(h_2,I)$，$fg\in L_1([a,b])$，$h_1h_2\in L_1([a,b])$，则有(5)式成立：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{2}{b-a}h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\le h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\mathrm{d}t+M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right] \tag{5}$$

其中：$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b);N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a)$。

3.4. 引理 4 [3]

若对 $\forall a,b\in I$，且 $a<b$，$f\in L_1([a,b])$，$t\in[0,1]$，有 $f\in SX(h_1,I)$，$g\in SX(h_2,I)$，$fg\in L_1([a,b])$，$h_1h_2\in L_1([a,b])$，则有(6)式成立：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &\le [f(a)+f(b)]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6}$$

4. 主要结果

4.1. 定理 1

若 f,g 是定义在区间 I 上的函数，其中 f 是 (h_1,m)-凸函数，g 是 (h_2,m)-凸函数，且 $fg\in L_1([a,b])$ $h_1h_2\in L_1([0,1])$。$a,b\in I$，其中 $a<mb$，且 $f\in L_1([a,b]),t\in[0,1]$，则有以下结果成立：

$$\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f(x)g(x)\mathrm{d}t \le M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\mathrm{d}t+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t$$

其中， $M(a,b)=f(a)g(a)+m^2 f(b)g(b);N(a,b)=mf(a)g(b)+mf(b)g(a)$。

证明：因为 f 是 (h_1,m)-凸函数 g 是 (h_1,m)-凸函数，所以对 $\forall t\in[0,1]$，根据 (h,m)-凸函数的定义，有：

$$f\left(ta+m(1-t)b\right)\le h_1(t)f(a)+mh_1(1-t)f(b) \tag{7}$$

$$g\left(ta+m(1-t)b\right)\le h_2(t)g(a)+mh_2(1-t)g(b) \tag{8}$$

又因为 f，g 都是非负的，(7)，(8)式两边分别相乘可得：

$$\begin{aligned}&f\left(ta+m(1-t)b\right)g\left(ta+m(1-t)b\right)\\&\le\left(h_1(t)f(a)+mh_1(1-t)f(b)\right)\times\left(h_2(t)g(a)+mh_2(1-t)g(b)\right)\end{aligned}$$

也即：

$$\begin{aligned}&f\left(ta+m(1-t)b\right)g\left(ta+m(1-t)b\right)\\&\le h_1(t)h_2(t)f(a)g(a)+\left[mh_1(t)h_2(1-t)f(a)g(b)\right.\\&\quad\left.\times mh_1(1-t)h_2(t)f(a)g(a)\right]+m^2h_1(1-t)h_2(1-t)f(b)g(b)\end{aligned}$$

对不等式两边同时在[0, 1]上积分，

$$\begin{aligned}&\int_0^1 f\left(ta+m(1-t)b\right)g\left(ta+m(1-t)b\right)\mathrm{d}t\\&\le\left[f(a)g(a)+m^2f(b)g(b)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\mathrm{d}t\\&\quad+m\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

令 $x=ta+m(1-t)b$，整理后得到：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{mb-a}\int_a^m bf(x)g(x)\mathrm{d}t\\&\le M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\mathrm{d}t+N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

其中， $M(a,b)=f(a)g(a)+m^2 f(b)g(b);N(a,b)=mf(a)g(b)+mf(b)g(a)$。证明完毕。

推论 1

若令 $m=1$，则定理 1 中的结果退化为引理 2 中的(4)式；更进一步，若令 $m=1$，且 $h_1(t)=h_2(t)=t$，则定理 1 中的结果退化为引理 1 中的不等式(2)。

4.2. 定理 2

若 f,g 是定义在区间 I 上的函数，其中 f 是 (h_1,m)-凸函数，g 是 (h_2,m)-凸函数，且 $fg\in L_1([a,b])$ $h_1h_2\in L_1([0,1])$。$a,b\in I$，其中 $a<mb$，且 $f\in L_1([a,b]),t\in[0,1]$，则有以下结果成立：

$$\begin{aligned}&f\left(\frac{a+mb}{2}\right)g\left(\frac{a+mb}{2}\right)-\frac{1+m^2}{mb-a}h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\int_a^{mb}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&\le 2mh_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[N(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(t)\mathrm{d}t+M(a,b)\int_0^1 h_1(t)h_2(1-t)\mathrm{d}t\right]\end{aligned}$$

其中， $M(a,b)=f(a)g(a)+m^2 f(b)g(b);N(a,b)=mf(a)g(b)+mf(b)g(a)$。

证明：首先，做以下变换：$\frac{a+mb}{2}=\frac{at+m(a-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+mtb}{2}$，则

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+mb}{2}\right)g\left(\frac{a+mb}{2}\right) \\
& =f\left(\frac{at+m(a-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+mtb}{2}\right)\times g\left(\frac{at+m(a-t)b}{2}+\frac{(1-t)a+mtb}{2}\right) \\
& \le h_1\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(at+m(1-t)b\right)+mf\left((1-t)a+mtb\right)\right] \\
& \quad \times h_2\left(\frac{1}{2}\right)\left[g\left(at+m(1-t)b\right)+mg\left((1-t)a+mtb\right)\right]
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+mb}{2}\right)g\left(\frac{a+mb}{2}\right) \\
& \le h\left(\frac{1}{2}\right)h\left(\frac{1}{2}\right)\times\left[f\left(at+m(1-t)b\right)g\left(at+m(1-t)\right)\right. \\
& \quad \left.+m^2f\left((1-t)a+mtb\right)g\left((1-t)a+mtb\right)\right] \\
& \quad +mh_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\times\left[\left(h_1\left(1-t\right)h_2\left(t\right)+h_1\left(t\right)h_2\left(1-t\right)N\left(a,b\right)\right)\right. \\
& \quad \left.+\left(h_1\left(t\right)h_2\left(t\right)+h_1\left(1-t\right)h_2\left(1-t\right)M\left(a,b\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

。

对等式两边同时在[0, 1]上积分可得，

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1 f\left(at+m(1-t)b\right)g\left(at+m(1-t)b\right)\mathrm{d}t+\int_0^1 m^2 f\left((1-t)a+mtb\right)g\left((1-t)a+mtb\right)\mathrm{d}t \\
& =\frac{1+m^2}{mb-a}\int_a^{mb} f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

从而，

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{a+mb}{2}\right)g\left(\frac{a+mb}{2}\right)-\frac{1+m^2}{mb-a}2h_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\int_a^{mb} f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x \\
& \le 2mh_1\left(\frac{1}{2}\right)h_2\left(\frac{1}{2}\right)\times\left[M\left(a,b\right)\int_0^1 h_1\left(t\right)h_2\left(t\right)\mathrm{d}t+M\left(a,b\right)\int_0^1 h_1\left(t\right)h_2\left(1-t\right)\mathrm{d}t\right]
\end{aligned}
$$

其中：$M\left(a,b\right)=f\left(a\right)g\left(a\right)+m^2f\left(b\right)g\left(b\right);N\left(a,b\right)=mf\left(a\right)g\left(b\right)+mf\left(b\right)g\left(a\right)$。

推论 2

若令 $m=1$，则定理 2 中的结果就退化成为引理 3 中的不等式(5)。更进一步，若我们令 $m=1$，并且令 $h_1\left(t\right)=h_2\left(t\right)=t$，则定理 2 中的结果就退化成为引理 1 中的不等式(3)。

4.3. 定理 3

若 f 是定义在区间 I 上的 (h,m)-凸函数，$a,b\in I,a<mb$ 且 $f\in L_1\left([a,b]\right)$，$t\in[0,1]$，则以下不等式成立：

$$
\frac{1}{(1+m)h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\le\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb} f\left(x\right)\mathrm{d}x\le\left[f\left(a\right)+mf\left(b\right)\right]\int_0^1 h\left(t\right)\mathrm{d}t
$$

证明：首先，我们来证明右边的不等式。令 $x=a,y=b$，由定义可知

$f\left(ta+m(1-tb)\right)\le h(t)f(a)+mh(1-t)f(b)$

对等式两边同时在区间[0, 1]上积分可得，

$$\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\mathrm{d}x\le\int_0^1 h(t)f(a)\mathrm{d}t+\int_0^1 mh(t)f(b)\mathrm{d}t=\left[f(a)+mf(b)\right]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$$

然后，我们来证明左边的不等式。

令 $x=ta+m(1-t)b, y=(1-t)a+mtb$，可以得到，

$$f\left(\frac{a+mb}{2}\right)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(ta+m(1-t)b\right)+mf\left((1-t)a+mtb\right)\right]$$

同时对不等式两边在区间[0, 1]上进行积分，可以得到

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+mb}{2}\right)&\le h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\mathrm{d}x+h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\mathrm{d}x\\&=h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1+m}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此可以得到：

$$\frac{1}{(1+m)h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{a+mb}{2}\right)\le\frac{1}{mb-a}\int_a^{mb}f(x)\mathrm{d}x\le\left[f(a)+mf(b)\right]\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t$$

证明完毕。

推论 3

若我们令 $m = 1$，则定理 3 中的结果就退化成为引理 4 中的不等式(6)。更进一步，若我们令 $m = 1$，并且令 $h(t)=t$，则定理 3 中的结果就退化成为经典 Hermite-Hadamard 不等式。

致　谢

首先我要感谢我的指导老师高翔老师，若非老师为我提供了无私的帮助以及鼓励，这篇论文无法得以完成；还要感谢陈欣同学，和我讨论问题并且提出了许多宝贵的建议。最后，感谢我的父母一直以来对我的学业的支持。

参考文献

[1] Hadamard, J. (1893) Etude sur les proprits des fonctions entires et en particulier d'une fonction considre par Riemann. *Journal de Mathmatiques Pures et Appliques*, **58**, 171-215.

[2] Pachpatte, B.G. (2003) On Some Inequalities for Convex Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, **3**, 315-321.

[3] Sarikaya, M.Z., Saglam, A. and Yildirim, H. (2008) On Some Hadamard-Type Inequalities for h-Convex Functions. *Journal of Mathematical Inequalities*, **2**, 335-341. https://doi.org/10.7153/jmi-02-30

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org