Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(3), 458-464
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.93061

Hans汉斯

The Reconstructing Problem for Hochstadt-Lieberman Theorem

Xianqing Zeng, Zhaoying Wei*, Jie Guo

College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an Shaanxi
Email: *imwzhy@163.com

Received: Apr. 29th, 2019; accepted: May 9th, 2019; published: May 24th, 2019

Abstract

In this paper we are concerned with the Hochstadt-Lieberman uniqueness theorem which states that, when the potential is known a priori on [0, 1/2], the full Dirichlet-Dirichlet spectrum of a Sturm-Liouville problem defined on the interval [0, 1] uniquely determines its potential. We shall give a new method for reconstructing the potential for this problem in terms of the Mittag-Leffler decomposition Theorem of meromorphic functions associated with the solution of Sturm-Liouville equantions. We also give a necessary and sufficient condition for the existence of the solution.

Keywords

Eigenvalue, Mittag-Leffler Expansion Theorem, Levin-Lyubarski Interpolation, Reconstruction Problem

Hochstadt-Lieberman定理的重构问题

曾献清，魏朝颖*，郭　洁

西安石油大学理学院，陕西　西安
Email: *imwzhy@163.com

收稿日期：2019年4月29日；录用日期：2019年5月9日；发布日期：2019年5月24日

摘　要

Hochstadt-Lieberman唯一性定理表明，对于定义在[0, 1]区间上的Sturm-Liouville问题，若[0, 1/2]区间上的势函数已知，则一组Dirichlet-Dirichlet特征值即可唯一确定整个区间上的势函数。本文应用亚纯函数的Mittag-Leffler展开定理，给出了重构该问题势函数的一种新方法，同时给出了该问题的解存在的

*通讯作者。

文章引用: 曾献清, 魏朝颖, 郭洁. Hochstadt-Lieberman 定理的重构问题[J]. 理论数学, 2019, 9(3): 458-464.
DOI: 10.12677/pm.2019.93061

充要条件。

关键词

特征值，Mittag-Leffler展开定理，Levin-Lyubarski插值，重构问题

1. 引言

1978 年，Hochstadt 与 Lieberman [1]证明了如下著名的 Hochstadt-Lieberman 唯一性定理：

定理 1.1 对于定义在[0, 1]区间上的 Sturm-Liouville 算子 L_{DD}：

$$Lu = -u'' + qu \tag{1}$$

满足 Dirichlet-Dirichlet (DD)边值条件：

$$u(0) = 0 = u(1), \tag{2}$$

其中 $q \in L^2[0,1]$ 为实值函数，若 q 在子区间 $[0,1/2]$ 上已知，则一组 Dirichlet-Dirichlet 特征值 $\sigma^{\mathrm{DD}} = \{\lambda_{n,\mathrm{D}}^2\}_{n=1}^{\infty}$ 唯一确定 $[0,1]$ 区间上的势函数 q。

Martinyuk 及 Pivoarchik [2]曾对以上唯一性定理给出了重构势函数的方法。本文的目的是对 Hochstadt-Lieberman 唯一性定理提供一种新的重构势函数的方法。通过应用 Mittag-Leffler 展开定理，将“较大的”全纯函数分解为两个“较小的”全纯函数，此分解为我们更好地使用 Levin-Lyubarski 插值公式重构全纯函数 $u_-(1/2,\lambda)$ 及 $u_-'(1/2,\lambda)$ 提供了环境。此外，该重构方法亦给出了该问题的解存在且唯一的充要条件。

本文将用 $\mathcal{L}_a$ 表示定义在 $L^2(-\infty,\infty)$ 上的型为 a 的指数类全纯函数[3]。

2. 势函数的重构

设 $u_-(x,\lambda)$ 为方程(1)满足初始条件 $u_-(0)=0$ 及 $u_-'(0)=1$ 的解。由文[4]可得：

$$\begin{aligned} u_-(x,\lambda) &= \frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \int_0^x K(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin\lambda x}{\lambda} - K(x,x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2} + \int_0^x K_t(x,t)\frac{\cos\lambda x}{\lambda^2}\mathrm{d}t \end{aligned}, \tag{3}$$

其中

$$K(x,t) = \tilde{K}(x,t) - \tilde{K}(x,-t),\quad K_t(x,t) = \frac{\partial K(x,t)}{\partial t},$$

$\tilde{K}(x,t)$ 满足以下积分方程：

$$\tilde{K}(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(s)\mathrm{d}s + \int_0^{\frac{x+t}{2}}\mathrm{d}\alpha\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\alpha+\beta)\tilde{K}(\alpha+\beta,\alpha-\beta)\mathrm{d}\beta,$$

且对于两个变量分别存在一阶偏导数。此外，

$$K(x,x)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\mathrm{d}t,\quad K(x,0)=0. \tag{4}$$

由(3)可得

$$\begin{aligned} u_-\left(\frac{1}{2},\lambda\right)&=\frac{1}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{K_-}{\lambda^2}\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\psi_{-,0}(\lambda)}{\lambda^2};\\ u_-'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)&=\cos+\frac{K_-}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\psi_{-,1}(\lambda)}{\lambda^2}\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $K_-=K(1/2,1/2)$，且对于 $j=0,1$，$\psi_{-,j}\in\mathcal{L}_{1/2}$。

定义 $u_+(x,\lambda)$ 为方程(1)满足初始条件 $u_+(1,\lambda)=0$，$u_+'(1,\lambda)=1$ 的解。则 $u_+(x,\lambda)$ 具有类似于(3)的表达式：

$$u_+(x,\lambda)=-\frac{\sin\lambda(1-x)}{\lambda}-\int_x^1 K(x,t)\frac{\sin\lambda(1-t)}{\lambda}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

故 $u_+(1/2,\lambda)$，$u_+'(1/2,\lambda)$ 有如下渐近式：

$$\begin{aligned} u_+\left(\frac{1}{2},\lambda\right)&=-\frac{1}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{K_+}{\lambda^2}\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\psi_{+,0}(\lambda)}{\lambda^2}\\ u_+'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)&=\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{K_+}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\psi_{+,1}(\lambda)}{\lambda^2}\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $K_+=\int_{1/2}^1 q(t)\mathrm{d}t$，且对于 $j=0,1$，$\psi_{+,j}\in\mathcal{L}_{1/2}$。

由于(1)~(2)的 DD 特征值 $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ 为特征值方程

$$\Delta(\lambda)=u_-(1,\lambda) \tag{8}$$

的零点。由(3)可得，特征值函数的渐近式为：

$$\Delta(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda-\frac{K_-+K_+}{\lambda^2}\cos\lambda+\frac{\hat{\psi}(\lambda)}{\lambda^2}, \tag{9}$$

其中 $\hat{\psi}\in\mathcal{L}_1$。则当 $n\to\infty$ 时，DD 特征值 $\{\lambda_n\}_{n\in Z_0}$ 的渐近式为：

$$\lambda_n=n\pi+\frac{K_-+K_+}{n\pi}+\frac{\alpha_n}{n} \tag{10}$$

其中 $\{\alpha_n\}_{n\in Z_0}\in l^2$。

引理 2.1 [5] [Theorem 3,6,2] 设 $F(z)$ 为亚纯函数，且当 $j\to\infty$ 时，其单重极点 $\{z_j\}_{j\in Z_0}$ 满足 $|z_j|\to\infty$。记 c_j 为 $F(z)$ 在 z_j 处的留数。若

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\frac{|c_j|}{|z_j|}<\infty, \tag{11}$$

则存在全纯函数 $f(z)$ 使得

$$F(z)=f(z)+\sum_{j\in\mathbb{Z}_0}\frac{c_j}{z-z_j}, \tag{12}$$

其中，(12)式右侧的级数在 $\mathbb{C}$ 上任何不包含点 $\{z_j\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$ 的有界子集上是一致收敛的。

引理 2.2 [6] [Theorem A]设f为sine类函数，其振幅宽度为$2a$，且其零点为$\{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}_0}$。则对于$1<p<\infty$，映射

$$c_k \to \phi(\lambda)=f(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\dot{f}(z_k)(\lambda-z_k)} \tag{13}$$

为$\mathcal{L}_a$与$L^p(-\infty,\infty)$的同构映射，且在$\mathbb{C}$的任何子域上一致收敛。

下面给出在$[1/2,1]$上重构 q 的方法及解存在的充要条件。定义$v_-(x,\lambda)$为方程(1)满足初始条件$v_-(0,\lambda)=1$，$v_-'(0,\lambda)=0$的解。类似可得

$$\begin{aligned} v_-\left(\frac{1}{2},\lambda\right)&=\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{K_-}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\varphi_{-,0}(\lambda)}{\lambda};\\ v_-'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)&=-\lambda\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)+K_-\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\varphi_{-,1}(\lambda) \end{aligned} \tag{14}$$

其中，对于$j=0,1$，$\varphi_{-,j}\in\mathcal{L}_{1/2}$。记$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$为$u_-(1/2,\lambda)$的零点，则

$$\mu_n=2n\pi+\frac{K_-}{n\pi}+\frac{\kappa_n}{n}, \tag{15}$$

其中$\{\kappa_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l^2$。显然$\left(\left(v_-(1/2,\lambda)\Delta(\lambda)\right)/u_-(1/2,\lambda)\right.$为亚纯函数且具有单重极点$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$。设$e_n$为函数$\dfrac{v_-(1/2,\lambda)\Delta(\lambda)}{u_-(1/2,\lambda)}$在$\mu_n$处的留数，则有

$$e_n=\frac{v_-(1/2,\mu_n)\Delta(\mu_n)}{\dot{u}_-(1/2,\mu_n)}, \tag{16}$$

其中$\dot{u}_-=\partial u_-/\partial\lambda$。由(5)，(8)及(10)可得

$$e_n=\frac{4(K_-+K_+)}{n\pi}+\frac{\zeta_n}{n}, \tag{17}$$

其中$\zeta_n\in l^2$，结合(15)，可得$\{e_n/\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}\in l^1$。由引理 2.1，可知存在全纯函数$a_0(\lambda)$，满足

$$\frac{v_-(1/2,\lambda)\Delta(\lambda)}{u_-(1/2,\lambda)}=a_0(\lambda)+\sum_{n\in\mathbb{Z}_0}\frac{e_n}{\lambda-\mu_n}. \tag{18}$$

定义

$$b_0(\lambda)=u_-(1/2,\lambda)\sum_{n\in\mathbb{Z}_0}\frac{e_n}{\lambda-\mu_n}, \tag{19}$$

则可得

$$v_-(1/2,\lambda)\Delta(\lambda)=a_0(\lambda)u_-(1/2,\lambda)+b_0(\lambda). \tag{20}$$

显然$\lambda\in\mathbb{R}$时，$a_0(\lambda)$，$b_0(\lambda)$为全纯函数。

引理 2.3 若记$a_0(\lambda)$与$b_0(\lambda)$为

$$\begin{aligned} a_0(\lambda)&=1+\cos\lambda+\frac{K_--K_+}{\lambda}\sin\lambda+\frac{\varphi_0(\lambda)}{\lambda},\\ b_0(\lambda)&=\frac{K_--K_+}{\lambda^2}\cos(\lambda/2)+\frac{\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2} \end{aligned} \tag{21}$$

则 $\varphi_0(\lambda)\in\mathcal{L}_1$，$\varphi_1(\lambda)\in\mathcal{L}_{1/2}$，且 $a_0(\lambda)$ 及 $b_0(\lambda)$ 在展开式(20)中为唯一的。

证明 注意到 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ 为 $u_-(1/2,\lambda)$ 的零点，则由(20)可得

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mu_n)&=\mu_n^2\left[v_-\left(\frac{1}{2},\mu_n\right)\Delta(\mu_n)-\frac{K_--K_+}{\mu_n^2}\cos\left(\frac{\mu_n}{2}\right)\right]\\&=\mu_n^2\left[\frac{1}{2\mu_n}\sin\left(\frac{3\mu_n}{2}\right)+\frac{1}{2\mu_n}\sin\left(\frac{\mu_n}{2}\right)-\frac{2K_-+K_+}{2\mu_n^2}\cos\left(\frac{3\mu_n}{2}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{K_+}{2\mu_n^2}\cos\left(\frac{\mu_n}{2}\right)-\frac{K_--K_+}{\mu_n^2}\cos\left(\frac{\mu_n}{2}\right)\right]\end{aligned}\tag{22}$$

将(15)带入计算，可得

$$\begin{aligned}\sin(3\mu_n/2)&=(-1)^n\frac{3K_-}{2n\pi}+\frac{\alpha_n}{n},\\\sin(\mu_n/2)&=(-1)^n\frac{K_-}{2n\pi}+\frac{\xi_n}{n},\\\cos(3\mu_n/2)&=(-1)^n+\vartheta_n,\\\cos(\mu_n/2)&=(-1)^n+\delta_n,\end{aligned}\tag{23}$$

其中 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$，$\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$，$\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ 均属于 l^2。进而将(23)带入(22)得到

$$\{\varphi_1(\mu_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_0}\in l^2.\tag{24}$$

由于函数 $\lambda u_-(1/2,\lambda)$ 为 sine 类函数，且存在正整数 m,M 及 p 使得当 $|\operatorname{Im}\lambda|>p$ 时，

$$me^{\frac{1}{2}|\operatorname{Im}\lambda|}\le|\lambda u_-(1/2,\lambda)|\le Me^{\frac{1}{2}|\operatorname{Im}\lambda|}$$

则结合(24)，应用 Levin-Lyubarski 插值定理，即引理 2.2，选取 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ 为重构函数 $\varphi_1(\lambda)$ 的插值节点，若记 $g(\lambda)=\lambda u_-\left(\frac{1}{2},\lambda\right)$，则有：

$$\varphi_1(\lambda)=g(\lambda)\sum_{n\in\mathbb{Z}_0}\frac{\varphi_1(\mu_n)}{\dot g(\mu_n)(\lambda-\mu_n)},\tag{25}$$

其中 $\dot g(\lambda)=\mathrm{d}g(\lambda)/\mathrm{d}\lambda$，$\varphi_1(\lambda)\in\mathcal{L}_{1/2}$。

此外，Levin-Lyubarki 插值定理保证了所重构函数的唯一性。故定理得证。

引理 2.4 设 $a_0(\lambda)$ 与 $b_0(\lambda)$ 由(21)式定义。若

$$b_1(\lambda)=v_-'(1/2,\lambda)\Delta(\lambda)-a_0(\lambda)u_-'(1/2,\lambda),\tag{26}$$

则

$$b_0(\lambda)u_-'(1/2,\lambda)-b_1(\lambda)u_-(1/2,\lambda)=\Delta(\lambda).\tag{27}$$

进而有

$$\begin{aligned}u_+(1/2,\lambda)&=-u_-(1/2,\lambda)+b_0(\lambda),\\u_+'(1/2,\lambda)&=-u_-'(1/2,\lambda)+b_1(\lambda)\end{aligned}\tag{28}$$

证明 由于

$$v_{-}\left(\frac{1}{2},\lambda\right)u_{-}'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)-v_{-}'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)u_{-}\left(\frac{1}{2},\lambda\right)=1, \tag{29}$$

计算易得(27)成立。由于

$$\Delta(\lambda)=u_{-}'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)u_{+}'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)-u_{-}\left(\frac{1}{2},\lambda\right)u_{+}'\left(\frac{1}{2},\lambda\right) \tag{30}$$

且$|b_0(\lambda)|<u_{-}(1/2,\lambda)$，式(30)结合(27)，可知存在$h(\lambda)$满足

$$\frac{u_{+}\left(\frac{1}{2},\lambda\right)-b_0(\lambda)}{u_{-}\left(\frac{1}{2},\lambda\right)}=\frac{u_{+}'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)-b_1(\lambda)}{u_{-}'\left(\frac{1}{2},\lambda\right)}=h(\lambda). \tag{31}$$

由(5)及(7)可知，当$|\lambda-\mu_n|>0$时，有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{u_{+}(1/2,\lambda)-b_0(\lambda)}{u_{-}(1/2,\lambda)}=-1,$$

故$h(\lambda)=-1$，从而可得(28)。定理得证。

注 1 由引理 2.3 可知$b_0(\lambda)$是唯一的. 由引理 2.4 可得$b_1(\lambda)$的表达式，进而可得$u_{+}(1/2,\lambda)$与$u_{+}'(1/2,\lambda)$，故有如下结论：

定理 2.5 设函数$q_{-}\in L^2[0,1/2]$，数列$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$已知，且满足如下渐近式：

$$\lambda_n=n\pi+\frac{A}{n\pi}+\frac{\alpha_n}{n} \tag{32}$$

其中A，$\alpha_n\in\mathbb{R}$，$\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}\in l^2$。若

$$\begin{aligned}u_{+}(\lambda)&=-u_{-}(1/2,\lambda)+b_0(\lambda),\\ \hat{u}_{+}(\lambda)&=-u_{-}'(1/2,\lambda)+b_1(\lambda)\end{aligned} \tag{33}$$

其中$b_0(\lambda)$，$b_1(\lambda)$分别由(21)与(26)定义，且$u_{-}(1/2,\lambda)$，$u_{-}'(1/2,\lambda)$由(5)定义。

则存在唯一的实值函数$q_{+}\in L_2[1/2,1]$，使得势函数q在$[0,1/2]$上满足$q=q_{-}$，在$[1/2,1]$上，$q=q_{+}$，且其对应的算子以$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$为特征值的充要条件是$u_{+}/\hat{u}_{+}(\lambda)$属于 Nevanlinna 类函数。

证明 必要性：假定存在实值函数$q\in L^2(0,1)$，使得σ_{DD}为 Sturm-Liouville 算子的 DD 特征值。则由以上讨论可知，

$$u_{+}(1/2,\lambda)=u_{+}(\lambda),\ u_{+}'(1/2,\lambda)=\hat{u}_{+}(1/2,\lambda)=\hat{u}+(\lambda).$$

故由[2] [7]知，$(u_{+}/\hat{u}_{+})(\lambda)$是 Sturm-Liouville 问题(1)~(2)的 Weylm-函数[7]，故$(u_{+}/\hat{u}_{+})(\lambda)$属于 Nevanlinna 类函数。

充分性：若实值函数$q_{-}\in L^2(0,1/2)$已知，则函数$u_{-}(1/2,\lambda)$、$u_{-}'(1/2,\lambda)$及$v_{-}(1/2,\lambda)$，$v_{-}'(1/2,\lambda)$为已知函数。则由(5)、(14)及引理 2.3 得，$a_0(\lambda)$及$b_0(\lambda)$可知，又由于 DD 特征值已知，进而由(26)可得$b_1(\lambda)$，从而由(28)计算可得$u_{+}(\lambda)$及$\hat{u}_{+}(\lambda)$：

$$u_{+}(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)-\frac{K_{+}}{\lambda^2}\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\psi_{+,0}(\lambda)}{\lambda^2},$$

$$\hat{u}_{+}(\lambda)=\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{K_{+}}{\lambda}\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)+\frac{\psi_{+,1}(\lambda)}{\lambda^{2}},$$

其中$\psi_{+,j}(\lambda)\in\mathcal{L}_{1/2}(j=0,1)$，故$q_{+}$可知。定理得证。

基金项目

国家自然科学基金面上项目资助(11571212)；陕西省大学生创新训练项目资助(1314)。

参考文献

[1] Hochstadt, H. and Lieberman, B. (1978) An Inverse Sturm-Liouville Problem with Mixed Given Data. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **34**, 676-680. https://doi.org/10.1137/0134054

[2] Martinyuk, O. and Pivovarchik, V. (2010) On the Hochstadt-Lieberman Theorem. *Inverse Problems*, **26**, Article ID: 035011, 6 p. https://doi.org/10.1088/0266-5611/26/3/035011

[3] Levin, B.J. (1980) Distribution of Zeros of Entire Functions. American Mathematical Society, Providence, RI.

[4] Marchenko, V. (1986) Sturum-Liouville Operators and Applications. Birkhäuser, Basel.

[5] Ablowitz, M.J. and Fokas, A.S. (2003) Complex Variables Introduction and Applications. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[6] Levin, B. and Yu, I. (1975) Lyubarskii, Interpolation by Entire Functions of Special Classes and Related Expansions in Series of Exponents. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk USSR*, **39**, 657-702. (In Russian) https://doi.org/10.1070/im1975v009n03abeh001493

[7] Gesztesy, F. and Simon, B. (2000) Inverse Spectral Analysis with Partial Information on the Potential II: The Case of Discrete Spectrum. *Transactions of the American Mathematical Society*, **352**, 2765-2787.