Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(4), 546-550
Published Online June 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.94072

Hans汉斯

The Subgroup's Judgment Conditions Based on Subgroup Product from an Exercise

Qian Sun, Xiaolian Liao

Department of Mathematics, Hunan University of Humanities and Technology, Loudi Hunan
Email: hnldlxl2005@126.com

Received: Jun. 5th, 2019; accepted: Jun. 15th, 2019; published: Jun. 27th, 2019

Abstract

Since the product of a subgroup of a finite group G is not necessarily a subgroup of G, how to judge the product of a subgroup as a subgroup is a question worthy of discussion. Starting from an after-class exercise, we will explore that the product of two subgroups of a finite group is the judgment condition of the subgroup, mainly deduce that the product of two subgroups of a group is the judgment condition of the subgroup, and generalize the number of groups to three cases.

Keywords

Group, Subgroup, Invariant Group, Product of Subgroups

由一道习题谈子群的乘积是子群的判定条件

孙　倩，廖小莲

湖南人文科技学院数学系，湖南　娄底
Email: hnldlxl2005@126.com

收稿日期：2019年6月5日；录用日期：2019年6月15日；发布日期：2019年6月27日

摘　要

由于有限群G的子群的乘积不一定是G的子群，如何判断子群的乘积为子群是一个值得探讨的问题。我们将从一道课后习题出发，来探索有限群的子群的乘积是子群的判定条件，重点推导一个群的两个子群的乘积是子群的判断条件，并将子群个数推广到三个的情形。

文章引用: 孙倩, 廖小莲. 由一道习题谈子群的乘积是子群的判定条件[J]. 理论数学, 2019, 9(4): 546-550.
DOI: 10.12677/pm.2019.94072

关键词

群，子群，不变子群，子群的乘积

1. 引言

群是近世代数中最基本的内容之一，群在集合上的作用是群论中的重要概念，并且在组合计数上有着广泛的应用。群是带有代数系统的非空集合，是一种最简单、最基础的代数结构。群概念在 1870 年左右形成并牢固建立，现代群论是非常活跃的数学学科，它以自己的方式研究群。我们知道，研究群的最大目的就是要把所有的抽象群都找出来。为此，我们常把群分成若干类，看每一类有多少个不同的群，但到目前为止，完全弄清楚的只有少数几类，其余的大多数群有待我们去解决。而利用一个群的子群的性质来推测整个群的性质，是研究群的一般方法。

众所周知，群的子群的乘积一般不是子群，例如，在三次对称群 S_3 中，$H=\{(1),(12)\}$，$N=\{(1),(13)\}$，$HN=\{(1),(13),(12),(132)\}$ 不是子群，但是也有一些子群在满足一定条件下，其子群的乘积为子群。例如，在张禾瑞主编的《近世代数基础》(文献[1])的第 75 页第 4 题的中，群 G 的两个子群的乘积是 G 的子群。下面我们从这一道习题出发，来探讨子群乘积是子群的判定条件。

2. 相关知识

定义 1.1 [1]一个不空集合 G 对于一个叫做乘法的代数运算来说作成一个群，假如

1) G 对于乘法来说是闭的；

2) 结合律成立：$a(bc)=(ab)c$ 对于 G 的任意三个元 a，b，c 都对；

3) G 里存在一个单位元 e，能让 $ea=ae=a$ 对于 G 的任何元 a 都成立；

4) 对于 G 的每一个元 a，在 G 里存在一个逆元 a^{-1}，能让 $aa^{-1}=a^{-1}a=e$。

定义 1.2 [1]设 H 为群的一个非空子集，G 是一个群。如果 H 对于 G 的代数运算也构成群，则称 H 为 G 的一个子群。记作 $N\le G$。

定义 1.3 [1]设 G 是一个群，N 为群 G 的一个非空子集，假如对于 G 的每一个元 a 来说，都有 $aN=Na$，则称 N 为 G 的一个不变子群(或正规子群)，记作 $N\lhd G$。

定义 1.4 [1]设 G 是一个群，H、N 为群 G 的两个子群，则集合 $\{hn|h\in H,n\in N\}$ 称为子群 H 与 N 的乘积，记作：$HN=\{hn|h\in H,n\in N\}$。

定义 1.5 设 G 是一个群，H、N、L 为群 G 的三个子群，则集合 $\{hnl|h\in H,n\in N,l\in L\}$ 称为子群 H 与 N、L 的乘积，记作：$HNL=\{hnl|h\in H,n\in N,l\in L\}$。

引理 1.6 [2]设 H 为群 G 的非空子集。则 H 为 G 的子群的充分必要条件是：

任给 $a,b\in H$，有 $ab\in H$，$a^{-1}\in H$。

引理 1.7 [2]设 G 是一个群，N 是群 G 的子群，则 N 是 G 的不变子群的充分必要条件是：

1) 任意 $a\in G$，有 $aN=Na$。

2) 任意 $a\in G$，$n\in N$，有 $ana^{-1}\in N$。

引理 1.8 [3]：设 G 是一个群，N，H 是群 G 的子群，则 HN 是 G 的子群的充分必要条件是当且仅当 $HK = KH$ 。

例 1. 在三次对称群 S_3 中，设 $H = \{(1),(12)\}$， $N = \{(1),(13)\}$， $K = \{(1),(123),(132)\}$，则 H、N、K 都是 S_3 的子群，证明：

1) 子群 H 与 N 的乘积 HN 不是 G 的子群，

2) 子群 H 与 K 的乘积 HN 是 G 的子群。

证明：1) 因为

$HN = \{(1),(12),(13),(123)\}$，

$NH = \{(1),(12),(13),(132)\}$，

所以 $HN \neq NH$ ，由引理 1.8 知，HN 不是 G 的子群。

2) 因为

$HK = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，

$KH = \{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}$，

所以 $HN = NH$ ，由引理 1.8 知，HN 是 G 的子群。

3. 子群的乘积是子群的判定条件

我们以例题形式给出上面提到的习题(文献[1]，P75 第 4 题)的证明过程：

例 2：设 G 是一个群，假定 H 是 G 的子群，N 是 G 的不变子群。证明：子群 H 与 N 的乘积 HN 是 G 的子群。

证明：

1) 因为 $H \le G$， $N \lhd G$，所以 $e \in H$ 且 $e \in N$ (e 为 G 的单位元)，

则 $e = e \cdot e \in HN$ ，所以 $HN \neq \varnothing$ 。

2) 设 $a \in HN$， $b \in HN$，那么 $a = h_1 n_1$， $b = h_2 n_2$

其中存在 h_1，h_2 属于 H，n_1，n_2 属于 N。

故 $ab = (h_1 n_1)(h_2 n_2) = h_1 (n_1 h_2) n_2$，又 $N \lhd G$，则 $h_2 N = N h_2$

从而 $h_2 n_1' = n_1 h_2$ ($n_1' \in N$)，从而 $ab = h_1 (h_2 n_1') n_2 = (h_1 h_2)(n_1' n_2)$

因为 $H \le G$， $N \lhd G$，所以 $h_1 h_2 \in H$ ， $n_1' n_2 \in N$ ，所以 $ab \in HN$ 。

3) 任意 $a \in HN$，存在 $h \in H$， $n \in N$，使得 $a = hn$， $a^{-1} = (hn)^{-1} = h^{-1} n^{-1}$，

由 $N \lhd G$，所以 $h^{-1} N = N h^{-1}$， $h^{-1} n^{-1} = n_3 h^{-1}$ ($n_3 \in N$)

所以 $a^{-1} = h^{-1} n^{-1} = n_3 h^{-1} \in HN$，所以由引理 1.7 可得 $HN \le G$ 。

于是，我们得到了判定两个子群乘积是子群的一个充分条件：

定理 2.1 [4]：**设 G 是一个群，假定 H 是群 G 的子群，N 是 G 的不变子群，那么子群 H 与 N 的乘积 HN 是 G 的子群。**

例 3：在三次对称群群 S_3 中，设 $H = \{(1),(12)\}$， $N = \{(1),(123),(123)\}$ 为 S_3 的子群，则 HN 是 S_3 的子群。这是因为 N 是 S_3 的不变子群，由定理 2.1 知结论成立。

推论 2.2：**设 G 是一个群，假定** H，N 都是群 G 的不变子群，那么**子群 H 与 N 的乘积** HN 是 G 的不变子群。

证明：

1) 因为 $H \lhd G$， $N \lhd G$，由定理 2.1 可推得 $HN \le G$ 。

2) 设任意 $m \in G$， $k \in HN$，则 $k = hn$，

其中存在 h 属于 H，n 属于 N。则 $mkm^{-1}=mhnm^{-1}$ 。

因为 N 是群 G 的不变子群，H 是群 G 的不变子群，

所以 $Nm^{-1}=m^{-1}N$ ， $nm^{-1}=m^{-1}n'$ ，其中存在 n' 属于 N。

$mkm^{-1}=mhm^{-1}n$ ，其中存在 mhm^{-1} 属于 H。

$mkm^{-1}\in HN$ ，从而 $HN\lhd G$ 。

一般情况下，一个群的子群与子群的乘积不一定是该群的子群，但是在一定的前提条件下，子群与子群的乘积可以是群的子群。**引理 1.8** 中，条件 $HK=KH$ 是两个子群的乘积是子群的充分必要条件，那么三个子群的乘积是子群的判断条件是什么呢？

定理 2.3 设 G 是一个群，假定 H，K，是群 G 的不变子群，L 是群 G 的子群，则子群 H、K 和 L 的乘积 HKL 是 G 的子群。

证明：

1) 因为 H、K、L 是 G 的子群，所以 $e=e\cdot e\cdot e\in HKL$ ，所以 $HKL\neq\varnothing$ 。

2) 因为 $H\lhd G$ ， $K\lhd G$ ，记 $HK=N$ ，则任意 $x\in NL$ ， $y\in NL$ ，

则 $x=n_1l_1$ ， $y=n_2l_2$ ，其中存在 n_1，n_2 属于 N，l_1，l_2 属于 L。

$xy=(n_1l_1)(n_2l_2)=n_1(l_1n_2)l_2$ ，因为 $H\lhd G$ ， $K\lhd G$ ，

所以 $xy=n_1(l_1n_2)l_2=n_1(n_2'l_1')l_2=(n_1n_2')(l_1'l_2)\in NL$

其中存在 n_1' 属于 N， l_1' 属于 L。所以 $xy\in NL$ 。

又 $x^{-1}=(n_1l_1)^{-1}=l_1^{-1}n_1^{-1}=(n_1^{-1})'(l_1^{-1})'\in NL$ ，即 $x^{-1}\in NL$ ，

所以 NL 是 G 的子群，又因为 $HK=N$ ，所以 $HKL\leq G$ 。

所以我们从定理 2.3 中可以得到一个推论

推论 2.4 设 G 是一个群，假定 H，K，L 是群 G 的三个不变子群，则子群 $H.K.N$ 的乘积 HKL 是 G 的不变子群。

从上述定理 2.3，推论 2.4 中，我们得出当群 G 中的三个子群之中存在两个或三个子群为不变子群时，它们的乘积是子群。那么，如果群 G 中的三个子群之中不存在不变子群时，它们的乘积可能是 G 的子群吗？

例 4：在三次对称群 S_3 中，设 $H=\{(1),(12)\}$ ， $K=\{(1),(13)\}$ ， $L=\{(1),(23)\}$ ，则 H、K、L 都是 S_3 的子群，证明：子群 H 与 K、L 的乘积 HKL 是 S_3 的子群。

解：因为

$HK=\{(1),(12),(13),(123)\}$,

$HKL=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}=S_3$

所以子群 H 与 K、L 的乘积 HKL 是的 S_3 子群。

例 5：在四次对称群 S_4 中，设 $H=\{(1),(12)\}$ ，$K=\{(1),(13)\}$ ，$L=\{(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$ ，则 H、K、L 都是 *S4* 的子群，试问子群 H 与 K、L 的乘积 HKL 不是 S_4 的子群。

解：1) $HK=\{(1),(12),(13),(123)\}$,

$$HKL=\begin{Bmatrix}(1),(12),(13),(123),(12)(34),(13)(24),(34),(1432)(243),\\(1423),(24),(142)\end{Bmatrix},$$

可以验证子群 H 与 K、L 的乘积 HKL 不是 S_4 的子群。

我们从例 4，例 5 中可知当群 G 中的三个子群之中不存在不变子群时，它们的乘积可能是 G 的子群

也可能不是 G 的子群，那么当群 G 中的三个子群之中不存在不变子群时，它们的乘积是 G 的子群存在什么条件呢？

定理 2.5：设 G 是一个群，假定 K，L 都是群 G 的子群，H 是群 G 的不变子群，且 $KH = HK$，则子群 $H.K.L$ 的乘积 HKL 是 G 的子群的充分必要条件是 $HKL = LKH$。

证明：

1) 充分性

若 $HKL = LKH$，于 K、H 是 G 的子群，且 $KH = HK$，

由引理 1.8 知 KH 是 G 的子群，记 $KH = N$，则由 $HKL = LKH$，

知 $NL = LN$，由引理 1.8 知 NL 是 G 的群，但 $NL = KHL = HKL$，

故 HKL 是 G 的子群。

2) 必要性

若 HKL 是 G 的子群，记 $HK = N$，由已知有 $N \le G$，$H \le G$，$KH = HK$，

由引理 1.8 知，HK 是 G 的子群，即 N 是 G 的子群，

于是 N 与 L 的乘积 NL 是 G 的子群，再由引理 1.8 知 $NL = LN$，

从而 $(HK)L = L(HK)$，即 $HKL = LKH$。

4. 结论

群是近世代数中主要的内容之一，由于有限群 G 的子群的乘积不一定是 G 子群，但是也有一些子群在满足一定条件下，其子群的乘积为子群。本文中我们探讨了两个子群乘积是子群的判定条件以及三个子群乘积是子群的判定条件，而三个以上的子群乘积则没有探讨，期待你们去探究。

参考文献

[1] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978: 31-34, 70-75.

[2] 杨子胥. 近世代数学习辅导与习题选解.[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 35.

[3] 黄龙生. 群的子集积成群的条件[J]. 咸宁师专学报, 1995, 13(2): 25-26.

[4] 孙杰, 连秀国. 子群积成群的几个条件[J]. 德州师专学报, 1999, 15(2): 19-20.