Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(5), 578-584
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.95077

Hans汉斯

The Analysis of Singularities and Bifurcation of Heteroclinic Loops of Two-Dimensional Cubic Polynomial Systems

Wenya Jiang[1*], Guirong Pan[2*], Wenjing Ding[1], Jia Li[1], Xia Li[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Linyi University, Linyi Shandong
[2]School of Information Science and Engineering, Linyi University, Linyi Shandong
Email: *2521150292@qq.com, *panguirong@lyu.edu.cn

Received: Jun. 27th, 2019; accepted: Jul. 17th, 2019; published: Jul. 24th, 2019

Abstract

In this paper, the authors studied the problem of limit cycle bifurcated from heteroclinic loop for the cubic polynomial system $\begin{cases}\dot{x} = -y + \delta x + mxy + lx^2 + y^3 \\ \dot{y} = x(1 + ax + by)\end{cases}$**. Assume that the heteroclinic orbit of the undisturbed system is broken after being disturbed. By analyzing the relative distances between the stable manifolds and the unstable manifolds of the disturbed system under small perturbations, combining the analysis of the types and stability of singularities, the authors obtained the conditions for the existence of stable and unstable limit cycle for the system.**

Keywords

Cubic Polynomial System, Singularity, Heteroclinic Loop, Bifurcation, Limit Cycle

二维三次多项式系统的奇点与异宿环分支分析

姜文雅[1*]，潘桂荣[2*]，丁文静[1]，李　佳[1]，李　夏[1]

[1]临沂大学数学与统计学院，山东　临沂
[2]临沂大学信息科学与工程学院，山东　临沂
Email: *2521150292@qq.com, *panguirong@lyu.edu.cn

收稿日期：2019年6月27日；录用日期：2019年7月17日；发布日期：2019年7月24日

*通讯作者。

文章引用: 姜文雅, 潘桂荣, 丁文静, 李佳, 李夏. 二维三次多项式系统的奇点与异宿环分支分析[J]. 理论数学, 2019, 9(5): 578-584. DOI: 10.12677/pm.2019.95077

摘 要

本文研究了三次微分系统 $\begin{cases}\dot{x}=-y+\delta x+mxy+lx^2+y^3\\ \dot{y}=x(1+ax+by)\end{cases}$ 的异宿环分支极限环问题。作者利用*Melnikov*函数计算未扰系统的异宿轨经扰动破裂以后的稳定流形和不稳定流形之间的相对距离，结合奇点的类型与稳定性分析，给出了系统存在稳定极限环和不稳定极限环的条件。

关键词

三次多项式系统，奇点，异宿环，分支，极限环

1. 引言

自 D. Hilbert 16 问题提出的一百多年以来，关于二维多项式微分系统的研究一直受到常微分方程专家学者们的高度重视并一直以来都是研究的热点，同时也获得了丰富的成果(见[1] [2])。但遗憾的是，该问题的研究距离完全解决还有非常遥远的距离，其中，即使对于二次、三次这样的低次幂多项式系统，至今也未能彻底解决。传统的方法采取通过做适当的变换将原方程化为一种特殊形式(liénard 形式)之后再利用定性的方法讨论极限环的存在性。近年来，已有学者采用分支的方法研究了二次多项式微分系统的奇异环分支极限环以获得极限环的存在性条件(见[3] [4] [5] [6])，[7]研究了 Duffing 方程的奇异环分支极限环问题，[8]研究了软弹簧型方程在摄动下分支出极限环问题。本文作者将原方程化成一种特殊形式，再采用分支的方法对系统进行分析，来研究三次多项式系统的异宿环分支极限环的存在性问题，给出产生极限环的存在性条件和稳定性分析。

2. 预备知识

考虑平面自治系统

$$\begin{cases}\dot{x}=X(x,y)\\ \dot{y}=Y(x,y)\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $X,Y\in C^1$， $x,y\in R^1$。

2.1. 环域定理[9] [10]

设由两条不相交的简单闭曲线 L_1 与 L_2 $(L_2\supset L_1)$ 所围成的环形域 D 内及其边界上不含系统(2.1)的奇点，L_1 与 L_2 均不是整条闭轨线，若平面自治系统(2.1)的凡与 D 的边界 ∂D 相交的正半轨线均进入(均离开)环域 D，则在 D 内至少存在此系统的一个内稳定(不稳定)的极限环和一个外稳定(不稳定)的极限环，二者可能重合为一。L_1 与 L_2 称为环域的内外境界。

注 1：环域定理的条件还可减弱，只要进入 D 的正(负)半轨不能跑出 $\bar{D}$ 也不能以 ∂D 为 $\Omega(A)$ 极限集，则结论照样成立。这种减弱意味着：1) ∂D 上可以有此系统的轨线段，但 D 的内或外境界线不能全由轨

线构成；2) ∂D 上可以出现有限个奇点，只要保证轨线一旦进入(离开) D 后不再离开(进入)即可。

注 2： 环域 D 的内境界线可以缩小成一个不稳定(稳定)的奇点。

注 3： 若 D 内仅存在唯一的闭轨线 Γ，则 Γ 必是一稳定(不稳定)的极限环；若 D 内仅存在有限个闭轨，则逐个分析这些闭轨线的稳定性易知，D 内至少有一个稳定(不稳定)的极限环；D 内还有可能存在周期或复合极限环情形，但对解析系统这种情况不可能发生。

2.2. Melnikov 函数[11] [12]

考虑平面自治系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases} \tag{2.2}$$

及其扰动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) + pf_0(x,y,p,q) \\ \dot{y} = g(x,y) + pg_0(x,y,p,q) \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $f,g \in C^1$， $x,y \in R^1$。 $f_0,g_0 \in C^1$， $p \in R^1$， $q \in R^k$， $k \ge 0$。假设

1) 系统(2.2)存在异宿于鞍点 O_1 和 O_2 的两条异宿轨 Γ_1 和 Γ_2 构成的异宿环 Γ，P_0 为 Γ_i，$i=1,2$ 上任意一点，过 P_0 作(2.2)的横截线 l 与 Γ_i 在 P_0 点的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 共线。

2) 扰动系统(2.3)在 O_1 和 O_2 点附近的鞍点分别为 $\bar{O}_1$ 和 $\bar{O}_2$，过 $\bar{O}_i$， $i=1,2$ 的稳定流形 $W^s_{\bar{O}_i}$ 和不稳定流形 $W^u_{\bar{O}_i}$ 与 l 的交点分别为 P_i^s 和 P_i^u。

则在小扰动下，从 P_i^s 到 P_{i-1}^u 的有向距离 $d\left(P_i^s,P_{i-1}^u\right)$ ($\boldsymbol{P}_i^s\boldsymbol{P}_{i-1}^u$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向时为正)为：

$$d\left(P_i^s,P_{i-1}^u\right) = \frac{pM}{\sqrt{f^2(P_0)+g^2(P_0)}} + o(p) \tag{2.4}$$

其中， $M = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\int_0^t (f_x+g_y)\mathrm{d}\tau} \left(fg_0 - gf_0\right)_{p=0} \mathrm{d}t$ 为 Melnikov 函数。

3. 主要结果

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \delta x + mxy + lx^2 + y^3 \\ \dot{y} = x(1+ax+by) \end{cases} \tag{3.1}$$

通过定性分析可知系统(3.1)有鞍点 $O(0,1)$，鞍点 $B(0,-1)$，另外， $A(0,0)$ 为焦点($0<\delta^2<4$)、或结点($\delta^2 \ge 4$)、或中心型奇点($\delta = 0$)。(中心型奇点指中心或细焦点)。当 $\delta<0$ 时 $A(0,0)$ 是稳定的，当 $\delta>0$ 时 $A(0,0)$ 是不稳定的。

令 $p=\sqrt{\delta^2+m^2}$， $q=\dfrac{\delta}{p}$， $l=pk$， $a=pr$， $b=ps$，则 $p>0$， $\delta = pq$， δ 与 q 同号，$m = sign(m)p\sqrt{1-q^2}$。从而系统(3.1)化为：

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + y^3 + p\left[qx + sign(m)\sqrt{1-q^2}xy + kx^2\right] \\ \dot{y} = x + p\left(rx^2 + sxy\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

令 $\begin{cases} x = u \\ y = v+1 \end{cases}$，则系统(3.2)化为：

$$\begin{cases}\dot{u}=v^3+3v^2+2v+p\left[qu+sign(m)\sqrt{1-q^2}u(v+1)+ku^2\right]\\ \dot{v}=u+p\left[ru^2+su(v+1)\right]\end{cases} \tag{3.3}$$

考虑(3.3)的未扰系统 $(3.3)\big|_{p=0}$：

$$\begin{cases}\dot{u}=v^3+3v^2+2v\\ \dot{v}=u\end{cases} \tag{3.4}$$

易知系统(3.4)有三个平衡点 $A(0,-1)$、$O(0,0)$ 和 $B(0,-2)$。由线性变换的拓扑不变性，得到 $O(0,0)$ 和 $B(0,-2)$ 为系统(3.4)的鞍点(如图 1 所示)，$A(0,-1)$ 为中心型奇点，当 $p<0$ 时 $A(0,0)$ 是稳定的，当 $p>0$ 时 $A(0,0)$ 是不稳定的。

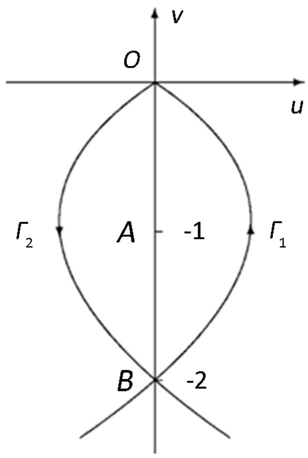

Figure 1. Heteroclinic Loop
图 1. 异宿环

系统(3.4)为 Hamilton 系统，解得其首次积分为：

$$H(u,v)=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{4}v^4-v^3-v^2=h \tag{3.5}$$

经简单计算可知，当 $h=0$ 时，(3.5)为(3.4)的过鞍点 $O(0,0)$ 和鞍点 $B(0,-2)$ 的异宿环，记为 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$，即 $\Gamma=\{u=u(t),v=v(t),t\in(-\infty,+\infty)\}=\{(u,v):H(u,v)=0\}$，其中 Γ_1 为 Γ 在 v 轴的右侧部分的异宿轨，Γ_2 为 Γ 在 v 轴的左侧部分的异宿轨。由 $\dot{v}=u$ 知 v 的单调性，故 Γ_1 沿着 $t\to+\infty$ 方向自下而上从 $B(0,-2)$ 到 $O(0,0)$，Γ_2 沿着 $t\to+\infty$ 方向自上而下从 $O(0,0)$ 到 $B(0,-2)$。即 Γ 为顺时针走向。

将 $A(0,-1)$ 代入(3.5)得 $H(0,-1)=-\frac{1}{4}$。经分析可知，当 $-\frac{1}{4}<h<0$ 时，(3.5)为(3.4)的异宿环 Γ 内的一簇包围奇点 $A(0,-1)$ 的闭轨，此亦说明 $A(0,-1)$ 为(3.4)的中心。

下面我们讨论系统(3.3)在奇点 $A(0,-1)$，$O(0,0)$ 和 $B(0,-2)$ 附近的轨线结构。

记 $f=v^3+3v^2+2v$，$g=u$，$f_0=\left[q+sign(m)\sqrt{1-q^2}(v+1)+ku\right]u$，$g_0=\left[ru+s(v+1)\right]u$。

取 Γ_1 上一点 $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，不妨设此时 $t=0$，即 $u(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$v(0)=-1$，过 $P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$ 作 Γ_1 的截线 l_1 与 $\boldsymbol{n}_1$ (Γ_1 在 P_0 点的外法线方向)同向。设 W_O^s 与 W_B^u 分别为 Γ_1 经扰动破裂以后系统(3.3)过点 $O(0,0)$ 的稳定流形与过点 $B(0,-2)$ 的不稳定流形，且 W_O^s 与 W_B^u 与 l_1 交点分别是 P_s，P_u，由预备知识 2.2 中的 Melnikov

函数知，在扰动充分小的情况下，P_s 到 P_u 点的有向距离为：

$$d\left(P_s,P_u\right)=\frac{pM_1}{\sqrt{f^2\left(P_0\right)+g^2\left(P_0\right)}}+o\left(p\right) \tag{3.6}$$

其中，$M_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_0^t\left(f_x+g_y\right)\mathrm{d}\tau}\left(fg_0-gf_0\right)_{p=0}\mathrm{d}t$ 为沿着 Γ_1 的积分的 Melnikov 函数。

类似地，取 Γ_2 上一点 $Q_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，不妨设此时 $t=0$，即 $u(0)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$v(0)=-1$，过 $Q_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$ 作 Γ_2 的截线 l_2 与 $\boldsymbol{n}_2$（Γ_2 在 Q_0 点的外法线方向)同向。设 W_B^s 与 W_O^u 分别为 Γ_2 经扰动破裂以后系统(3.3)过点 $B\left(0,-2\right)$ 的稳定流形与过点 $O\left(0,0\right)$ 的不稳定流形(如图 2 所示)，且 W_B^s 与 W_O^u 与 l_2 交点分别是 Q_s，Q_u，由预备知识 2.2 中的 Melnikov 函数知，在扰动充分小的情况下，Q_s 到 Q_u 点的有向距离为：

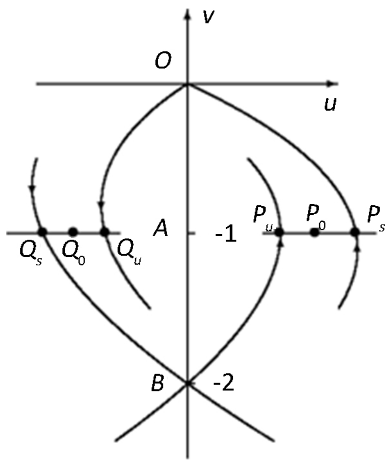

Figure 2. Relative position of orbits
图 2. 轨线相对位置

$$d\left(Q_s,Q_u\right)=\frac{pM_2}{\sqrt{f^2\left(Q_0\right)+g^2\left(Q_0\right)}}+o\left(p\right) \tag{3.7}$$

其中，$M_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\int_0^t\left(f_x+g_y\right)\mathrm{d}\tau}\left(fg_0-gf_0\right)_{p=0}\mathrm{d}t$ 为沿着 Γ_2 的积分的 Melnikov 函数。

由(3.5)知 Γ_1 与 Γ_2 的表达式分别为 Γ_1：$u=-\frac{\sqrt{2}}{2}v\left(v+2\right)$，$\Gamma_2$：$u=\frac{\sqrt{2}}{2}v\left(v+2\right)$。由于 Γ 为逆时针走向。由(3.4)知 $\mathrm{d}v=u\mathrm{d}t$。则

$$\begin{aligned}
M_1&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(v^3+3v^2+2v\right)\left[ru+s\left(v+1\right)\right]-\left[q+sign\left(m\right)\sqrt{1-q^2}\left(v+1\right)+ku\right]u\right\}u\mathrm{d}t\\
&=\int_{-2}^{0}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}r\left(v^5+5v^4+8v^3+4v^2\right)+s\left(v^4+4v^3+5v^2+2v\right)\right]\mathrm{d}v\\
&\quad+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-2}^{0}\left[q\left(v^2+2v\right)+sign\left(m\right)\sqrt{1-q^2}\left(v^3+3v^2+2v\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}k\left(v^4+4v^3+4v^2\right)\right]\mathrm{d}v\\
&=-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q
\end{aligned}$$

又 $f=v^3+3v^2+2v$，$g=u$，$P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，$f\left(P_0\right)=0$，$g\left(P_0\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$d\left(P_s,P_u\right)=\frac{pM_1}{\sqrt{f^2\left(P_0\right)+g^2\left(P_0\right)}}+o\left(p\right)=\sqrt{2}p\left(-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q\right)+o\left(p\right)$$

由于 $p>0$，故而 $d\left(P_s,P_u\right)$ 与 $-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q$ 同号。当 $-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q<0$ 时，$d\left(P_s,P_u\right)<0$，此时异宿轨 Γ_1 破裂以后稳定流形 W_O^s 在不稳定流形 W_B^u 的外部。当 $-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q>0$ 时，$d\left(P_s,P_u\right)>0$，此时异宿轨 Γ_1 破裂以后稳定流形 W_O^s 在不稳定流形 W_B^u 的内部。

类似地可以得到，

$$\begin{aligned}M_2&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(v^3+3v^2+2v\right)\left[ru+s\left(v+1\right)\right]-\left[q+sign\left(m\right)\sqrt{1-q^2}\left(v+1\right)+ku\right]u\right\}u\mathrm{d}t\\&=\int_0^{-2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}r\left(v^5+5v^4+8v^3+4v^2\right)+s\left(v^4+4v^3+5v^2+2v\right)\right]\mathrm{d}v\\&\quad-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{-2}\left[q\left(v^2+2v\right)+sign\left(m\right)\sqrt{1-q^2}\left(v^3+3v^2+2v\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}k\left(v^4+4v^3+4v^2\right)\right]\mathrm{d}v\\&=\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q\end{aligned}$$

又 $f=v^3+3v^2+2v$，$g=u$，$Q_0\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$，$f\left(Q_0\right)=0$，$g\left(Q_0\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$d\left(Q_s,Q_u\right)=\frac{pM_2}{\sqrt{f^2\left(Q_0\right)+g^2\left(Q_0\right)}}+o\left(p\right)=\sqrt{2}p\left(\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q\right)+o\left(p\right)$$

由于 $p>0$，故而 $d\left(Q_s,Q_u\right)$ 与 $\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q$ 同号。当 $\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q<0$ 时，$d\left(Q_s,Q_u\right)<0$，此时异宿轨 Γ_2 破裂以后稳定流形 W_B^s 在不稳定流形 W_O^u 的外部。当 $\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q>0$ 时，$d\left(Q_s,Q_u\right)>0$，此时异宿轨 Γ_2 破裂以后稳定流形 W_B^s 在不稳定流形 W_O^u 的内部。

下面，我们要证明极限环的存在性，利用预备知识 2.1 环域定理，只需构造所需的内外境界即可。

首先，当 $q>0$ (即 $\delta>0$)，$A\left(0,-1\right)$ 为系统(3.3)的不稳定的结点 $\left(\left|\delta\right|\geq 2\right)$ 或焦点 $\left(0<\left|\delta\right|<2\right)$，因此可取 $A\left(0,-1\right)$ 作为环域定理所要求的环域 D 的内境界。

其次，我们选取 $\widehat{OP_s}\cup\overline{P_sP_u}\cup\widehat{P_uB}\cup\widehat{BQ_s}\cup\overline{Q_sQ_u}\cup\widehat{Q_uO}$ 作为环域 D 的外境界。由前面分析得知，当 $-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q<0$ 时，$d\left(P_s,P_u\right)<0$，此时异宿轨 Γ_1 破裂以后稳定流形 W_O^s 在不稳定流形 W_B^u 的外部，当 $\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q<0$ 时，$d\left(Q_s,Q_u\right)<0$，此时异宿轨 Γ_2 破裂以后稳定流形 W_B^s 在不稳定流形 W_O^u 的外部。并且当系统(3.3)的轨线穿过线段 $\overline{P_sP_u}$ 时均沿自下而上的方向穿过进入 D。当系统(3.3) 的轨线穿过线段 $\overline{Q_uQ_s}$ 时均沿自上而下的方向穿过进入 D。同时(3.3)满足解的存在唯一条件，所以，由 Poincare-Bendixson 环域定理得，此时在环域定理 D 中系统(3.3)至少存在一个稳定的极限环。

其它情况类似可证明。于是我们得到：

定理：1) 当 $q>0$ (即 $\delta>0$) 且 $\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q<0$，$-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q<0$ 时，系统(3.3)在 Γ 的邻

域内至少存在一条围绕 $A(0,-1)$ 的稳定极限环。

2) 当 $q<0$ (即 $\delta<0$)且 $\frac{4}{15}s+\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q>0$， $-\frac{4}{15}s-\frac{8}{15}k-\frac{2\sqrt{2}}{3}q>0$ 时，系统(3.3)在 Γ 的邻域内至少存在一条围绕 $A(0,-1)$ 的不稳定极限环。

基金项目

山东省自然科学基金(ZR2018MA016, ZR2015AL005)，山东省软科学研究计划项目(2012RKA13021)，临沂大学大学生创新创业训练计划项目(201710452001)。

参考文献

[1] 叶彦谦. 极限环论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1995.

[2] 叶彦谦. 多项式微分系统定性理论[M]. 上海: 上海科技出版社, 1995.

[3] Jin, Y. (2001) The Problems of Homoclinic Bifurcation for Type (I) Planar Quadratic Polynomial Systems. *Journal of Changde Teachers University* (*Natural Science Edition*), **13**, 13-15.

[4] 郑庆玉. 二次微分系统(II)类方程的分支问题[J]. 曲阜师范大学学报, 2002, 28(3): 27-30.

[5] 李光芹. 一类平面二次方程的极限环存在性[J]. 曲阜师范大学学报, 2002, 28(4): 53-55.

[6] 金银来, 庄维欣. 二次微分系统(III)类方程的分支问题[J]. 常德师范学院学报(自然科学版), 2002, 14(4): 3-5.

[7] 金银来. 一类 Duffing 方程的分支问题[J]. 吉首大学学报, 2001, 22(2): 50-53.

[8] 程福德. 软弹簧型方程在摄动下分支出极限环[J]. 应用数学和力学, 1998(2): 121-125.

[9] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005.

[10] 张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜. 微分方程定性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1985.

[11] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[12] Luo, D., Wang, X., Zhu, D. and Han, M. (1997) Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems. In: *Advanced Series in Dynamical Systems*, World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2598