Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(6), 686-693
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.96091

The Normal Families of Meromorphic Functions Which Share Set

Jinhua Cai, Guoqiang Dang

School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou Guangdong
Email: 2377795228@qq.com, dangguoqiang@126.com

Received: Jul. 11th, 2019; accepted: Jul. 21st, 2019; published: Aug. 7th, 2019

Abstract

In this paper, it investigates the normality of a family of meromorphic functions sharing a set with their derivatives by using the Nevanlinna's value distribution theory and the method of Zalcman-Pang, and obtains the following main result: Let $\mathcal{F}$ be a family of meromorphic functions in a domain *D*, $S_1=\{a_1,a_2\}$, $S_2=\{b_1,b_2\}$, where S_1 and S_2 are made up of finite complex numbers, $k(\geq 2)$ and *q* be two positive integers. Suppose that for each $f\in\mathcal{F}$, 1) every zero of $f-a_i$ is of multiplicities at least *k*, where $i=1,2$; 2) $\bar{E}(S_1,f)=\bar{E}\left(S_2,\left(f^{(k)}\right)^q\right)$, then $\mathcal{F}$ is normal in *D*.

Keywords

Meromorphic Functions, Normality, Shared Set

涉及分担集合的正规族

蔡金华，党国强

广州大学数学与信息科学学院，广东 广州
Email: 2377795228@qq.com, dangguoqiang@126.com

收稿日期：2019年7月11日；录用日期：2019年7月21日；发布日期：2019年8月7日

摘 要

使用Nevanlinna值分布理论和Zalcman-Pang方法讨论了涉及分担集合的亚纯函数的正规性，主要结果为：设$\mathcal{F}$是区域*D*内的一族亚纯函数，$S_1=\{a_1,a_2\}$，$S_2=\{b_1,b_2\}$，S_1和S_2都是由有限复数组成的集合，

文章引用: 蔡金华, 党国强. 涉及分担集合的正规族[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 686-693.
DOI: 10.12677/pm.2019.96091

$k(\geq 2)$ 和 q 都是正整数。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，满足：1) $f-a_i$ 的零点重级 $\geq k$，$i=1,2$；2) $\bar{E}(S_1,f)=\bar{E}\left(S_2,\left(f^{(k)}\right)^q\right)$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

关键词

亚纯函数，正规族，分担集合

1. 引言

定义 D 为一个区域，假设 $\mathcal{F}$ 为 D 内的一族亚纯函数，若对于 $\mathcal{F}$ 的任一函数序列 $\{g_n\}$ 均可选出子序列 $\{g_{n_k}\}$ 在 D 内按球面距离内闭一致收敛于一个亚纯函数，或者 ∞，则称 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规(详见[1]-[7])。

a 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的一个复数，f 和 g 是区域 D 内的两个亚纯函数，如果 $f(z)-a$ 和 $g(z)-a$ 在 D 内有相同的零点，则称 f 和 g 在 D 内 IM 分担 a；若 $f(z)-a$ 和 $g(z)-a$ 在 D 有相同的零点，且所有的零点重级也相等，则称 f 和 g 在 D 内 CM 分担 a。

1996 年，方明亮[8]提出了分担集合的概念。

f 和 g 是区域 D 内的两个亚纯函数，$S=\{a_1,a_2,a_3\}$，S 是一个由三个有限复数组成的集合。定义 $\bar{E}(S,f)=\bigcup\limits_{a_i\in S}\{z\in D \mid f(z)-a_i=0\}$，其中 $i=1,2,3$。如果 $\bar{E}(S,f)=\bar{E}(S,g)$，则称 f 和 g 分担集合 S。

$\mathcal{F}$ 为区域 D 内的一族亚纯函数，我们称 $\mathcal{F}$ 在 D 内一点 z_0 正规，如果存在 z_0 的一个领域 $\Delta(z_0)$，使 $\mathcal{F}$ 在 $\Delta(z_0)$ 内正规。

1992 年，Schwick [9]最早研究与分担值相关的亚纯函数族的正规性，证明了

定理 A 设 $\mathcal{F}$ 为 D 上的一族亚纯函数，a_1,a_2,a_3 是三个不同的有限复数。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，$f(z)=a_i \Leftrightarrow f'(z)=a_i$，其中 $i=1,2,3$ 中，$\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

2000 年，庞学诚和 Zalcman [10]改进了 Schwick [9]的结果，证明了

定理 B 设 $\mathcal{F}$ 为 D 上的一族亚纯函数，a,b,c 和 d 是有穷复数，且 $c\neq a$ 和 $d\neq b$。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，1) $f(z)=a \Leftrightarrow f'(z)=b$；2) $f(z)=c \Leftrightarrow f'(z)=d$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

如果 a_1,a_2,a_3 (定理 A)替换成 $S=\{a_1,a_2,a_3\}$，是否能得到相同的结论。在这个方面，在 2007 年，刘晓俊与庞学诚[11]证明了以下的结果。

定理 C 设 $\mathcal{F}$ 为 D 上的一族亚纯函数，a_1,a_2,a_3 是三个不同的有限复数。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，$\bar{E}(S,f)=\bar{E}(S,f')$，其中 $S=\{a_1,a_2,a_3\}$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

2002 年，方明亮和 Zalcman [12]考虑了 f 和 $f^{(k)}$ 分担一个值的情形，证明了

定理 D 设 $\mathcal{F}$ 为 D 上的一族亚纯函数，a 和 b 是两个非零有限复数，k 是一个正整数。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，1) $f(z)=a \Leftrightarrow f^{(k)}(z)=b$；2) f 的零点重级均 $\geq k+1$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

如果我们把 f' (定理 C)改为 $f^{(k)}$，自然地，我们会问是否存在相关的正规定则。在这个方面，在 2011 年，张汉等人[13]证明了以下的结果。

定理 E 设 $\mathcal{F}$ 为 D 上的一族亚纯函数，$S_1=\{a_1,a_2,a_3\}$，$a_i(i=1,2,3)$ 是三个不同的有限复数，$k(>2)$ 是一个正整数，a 为任意一个有限复数。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，1) $\bar{E}(S,f)=\bar{E}(S,f^{(k)})$；2) $f-a$ 的零点与极点重级均 $\geq k$。

2016 年，徐焱与仇惠玲[14]考虑 f 与 f' 分担两个集合的亚纯函数的正规性，证明了

定理 F 设 $\mathcal{F}$ 为单位圆盘 Δ 上的一族亚纯函数，$S_1=\{a_1,a_2\}$，$S_2=\{b_1,b_2,b_3\}$，其中 $a_i(i=1,2),b_j(j=1,2,3)$ 都是有限复数且 $a_1a_2\neq 0$。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，1) $\bar{E}(S_1,f)=\bar{E}(S_2,f')$；2) 存在一个正整数 M，若 $f(z)=0$，则 $|f'(z)|\leq M$，则 $\mathcal{F}$ 在 Δ 内正规。

2014 年，李效敏[15]等人考虑 f 和 $f^{(k)}$ 分担集合的情形，证明了

定理 G 设 $\mathcal{F}$ 为 D 上的一族亚纯函数，$k(\geq 2)$ 是一个正整数，$S_1=\{a_1,a_2\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2\}$ 都是由有限复数组成的集合。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，1) $\bar{E}(S_1,f)=\bar{E}(S_2,f^{(k)})$；2) $f-a_i(i=1,2)$ 的零点重级均 $\geq k$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

本文推广了李效敏[15]等人的结果，证明了

定理 1 设 $\mathcal{F}$ 为 D 上的一族亚纯函数，$k(\geq 2)$ 和 q 是一个正整数，$S_1=\{a_1,a_2\}$ 和 $S_2=\{b_1,b_2\}$ 都是由有限复数组成的集合。若对任意的 $f\in\mathcal{F}$，1) $\bar{E}(S_1,f)=\bar{E}\left(S_2,\left(f^{(k)}\right)^q\right)$；2) $f-a_i(i=1,2)$ 的零点重级均 $\geq k$，则 $\mathcal{F}$ 在 D 内正规。

以下的例子(张汉等人[13])说明定理 1 中关于零点重级的限制是必要的。

例 设 $\mathcal{F}=\{f_n\}$ 为定义在单位圆盘 Δ 上的亚纯函数族，其中 $f_n=n\left(\mathrm{e}^{w_1z}-\mathrm{e}^{w_2z}\right)$，$n=1,2,\cdots$，$w_1\neq w_2$，$w_1^k=w_2^k=1$，$k\geq 2$ 和 q 是正整数。显然，对于 $\forall f\in\mathcal{F}$，有 $f=f^{(k)}$，而 $\dfrac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2}=n(w_1-w_2)\to\infty$，根据 Marty 正规定则，可知 $\mathcal{F}$ 在 Δ 上不正规。

2. 引言

为了证明定理 1，需要下列引理。

引理 1 (Zalcman-Pang 引理) [16]设 $\mathcal{F}$ 为单位圆 Δ 内的一族亚纯函数，k 和 p 均为正整数，如果对于 $\forall f\in\mathcal{F}$，$f-a$ 的零点重级 $\geq k$，极点重级 $\geq p$，且存在一个正数 $A(>1)$，若 $f(z)=0$，必有 $\left|f^{(k)}(z)\right|\leq A$。那么，若 $\mathcal{F}$ 在单位圆内不正规，则对于每个 α，$p<\alpha\leq k$，存在

1) 函数列 $f_n\in\mathcal{F}$；
2) 点列 $z_n\in\Delta,z_n\to z_0$；
3) 正数列 $\rho_n\to 0$；
4) 实数 r，$0<r<1$，

使得函数 $g_n(\xi)=\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛于一个非常数亚纯函数 $g(\xi)$，并且 $g(\xi)$ 的零点重级 $\geq k$，极点重级 $\geq p$，它的级至多为 2，$g^{\#}(\xi)=\dfrac{|g'(\xi)|}{1+|g(\xi)|^2}\leq g^{\#}(0)=kA+1$。

引理 2 [1] [17] [18]设 f 为有穷级的超越亚纯函数，b 是一个非零复数，k 为正整数，则 f 或者 $f^{(k)}-b$ 有无穷多个零点。

引理 3 [19] 设 f 为有理函数，则 f 能取任意复数，至多有一个 Picard 例外值，并且 f 有且仅有一个亏值。

引理 4 [20] 设 $k(\geq 2)$ 是一个正整数，f 是复平面上的一个有穷级的亚纯函数，且 $f^{(k)}$ 的零点个数是

有限的，则 f 的极点个数是有限个。

3. 定理 1 的证明

证明：假设 $\mathcal{F}$ 在 D 内不正规，则存在一点 $z_0 \in D$，使 $\mathcal{F}$ 在 z_0 处不正规则。由引理 1，可知存在函数列 $f_n \in \mathcal{F}$，点列 $z_n \in D, z_n \to z_0$，正数列 $\rho_n \to 0$，使得函数

$$f_n(z_n+\rho_n\zeta)-a_1=g_n(\zeta)\to g(\zeta) \tag{1}$$

$$f_n(z_n+\rho_n\zeta)-a_2=g_n(\zeta)+a_1-a_2\to g(\zeta)+a_1-a_2 \tag{2}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛，其中 $g(\zeta)$ 是一个非常数亚纯函数，$g(\zeta)$ 和 $g(\zeta)+a_1-a_2$ 的级至多为 2，且它们的零点重级均 $\ge k(\ge 2)$。

下面我们分两种情形进行讨论。

情形 1。存在 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$，使 $g(\zeta_0)=0$，$g(\zeta_0)+a_1-a_2\ne 0$ 或 $g(\zeta_0)+a_1-a_2=0$，$g(\zeta_0)\ne 0$，不失一般性，我们假设 $g(\zeta_0)=0, g(\zeta_0)+a_1-a_2\ne 0$。

令 $G_n(\zeta)=\rho_n^{-k}\left(f_n(z_n+\rho_n\zeta)-a_1\right)$。根据已知条件，可知 $G_n(\zeta)$ 的零点重级至少为 k。取 $\delta(\zeta_0)>0$，使 $G_n(\zeta)$ 在邻域 $\Delta=\left\{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<\delta(\zeta_0)\right\}$ 内是全纯的，否则，$\left\{G_n(\zeta_n)\right\}$ 在 $\Delta(\zeta_0,\delta)$ 上内闭一致收敛于全纯函数 $G(\zeta)$。接下来我们证明 $\left\{G_n(\zeta)\right\}$ 在 ζ_0 处不正规。因为 $g(\zeta)$ 是一个非常数亚纯函数，所以 $g(\zeta)\not\equiv 0$，则存在一点 ζ_0，使 $g(\zeta_0)=0$。根据 Hurwitz 定理，可知存在一个点列 $\{\zeta_n\}\subset\Delta$ 且 $\zeta_n\to\zeta_0$，使 $g_n(\zeta_n)=f_n(z_n+\rho_n\zeta_n)-a_1=0$。当 $\zeta\in\Delta'=\left\{\zeta:0<|\zeta-\zeta_0|<\delta\right\}$ 时，$g(\zeta)\ne 0$。故对任一 $\zeta\in\Delta'$，存在一个正数 ε_0，使 $|g_n(\zeta)|>\varepsilon_0$。从而

$$G(\zeta)=\lim_{n\to\infty}\frac{f_n(z_n+\rho_n\zeta)-a_1}{\rho_n^k}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{\varepsilon_0}{\rho_n^k}=\infty$$

矛盾。

如果 $G_n(\zeta)=0$，也就是说 $f_n(z_n+\rho_n\zeta)=a_1$。根据条件，可得 $\left(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)\right)^q=\left(G_n^{(k)}(\zeta)\right)^q\in S_2$，则存在 $b_i\in S_2(i=1,2)$，使得 $\left(G_n^{(k)}(\zeta)\right)^q=b_i$，由此可知，若 $G_n(\zeta)=0$，则 $\left|G_n^{(k)}(\zeta)\right|\le\sum_{i=1}^{2}\sqrt[q]{|b_i|}+k$。假设 $A=\sum_{i=1}^{2}\sqrt[q]{|b_i|}+k$。

根据引理 1，则存在正数列 $\eta_n\to 0$；复数列 $\zeta_n\to\zeta_0$；子序列 $\{G_n\}$；使 $F_n(\xi)=\eta_n^{-k}G_n(\zeta_n+\eta_n\xi)$ 在 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛到非常数亚纯函数 $F(\xi)$，其中 $F(\xi)$ 的零点重级均 $\ge k$，级至多为 2，且 $F^{\#}(\xi)=\dfrac{|F'(\xi)|}{1+|F(\xi)|^2}\le F^{\#}(0)=kA+1$。

我们断言：

1) 在复平面 $\mathbb{C}$，$F(\xi)$ 的零点个数是有限的；

2) $F(\xi)=0\Leftrightarrow\left(F^{(k)}(\xi)\right)^q\in S_2$。

令 ζ_0 是 $g(\zeta)$ 的 l 重零点。若 $F(\xi)$ 零点个数是无穷多个，可取 $F(\xi)$ 的 $l+1$ 个互不相同的零点 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{l+1}$。由于 $F(\xi)\not\equiv 0$，根据 Hurwitz 定理，可得存在 $\xi_{n_j}\to\xi_j\,(j=1,2,\cdots,l+1)$，使得 $F_n\left(\xi_{n_j}\right)=0$，也就是说，当 $\zeta_n+\eta_n\xi_{n_j}\to\zeta_0$ 时，$f_n\left(z_n+\rho_n\left(\zeta_n+\eta_n\xi_{n_j}\right)\right)-a_1=0$。根据 Hurwitz 定理，$\zeta_0$ 是 $g(\zeta)$ 的至少 $l+1$ 重零点，矛盾。故断言 1)成立。

若 $F(\xi_0)=0$，由 Hurwitz 定理，可知存在一点列 $\xi_n\to\xi_0$，使得 $f_n\left(z_n+\rho_n(\zeta_n+\eta_n\xi_n)\right)=a_1$。由条件

可得

$$\left(F_n^{(k)}\left(\xi_n\right)\right)^q=\left(f_n^{(k)}\left(z_n+\rho_n\left(\zeta_n+\eta_n\xi_n\right)\right)\right)^q\in S_2$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(F_n^{(k)}\left(\xi_n\right)\right)^q=\left(F^{(k)}\left(\xi_0\right)\right)^q\in S_2$。因此证明了 $F(\xi)=0\Rightarrow\left(F^{(k)}(\xi)\right)^q\in S_2$。

如果 $\left(F^{(k)}\left(\xi_0\right)\right)^q\in S_2$，也就是说，存在某个 $b_i\in S_2$，使 $\left(F^{(k)}\left(\xi_0\right)\right)^q=b_i$。可证 $\left(F^{(k)}(\xi)\right)^q\not\equiv b_i$，否则，$\left(F^{(k)}(\xi)\right)^q\equiv b_i$，则 $F(\xi)$ 是一个次数至多为 k 的多项式。因为 $F(\xi)$ 的零点重级 $\ge k$，可得 $F(\xi)$ 是一个次数为 k 的多项式，令 $F(\xi)=(k!)^{-1}\sqrt[q]{b_i}\left(\xi-\xi_0\right)^k$。

当 $b_i\ne 0(i=1,2)$ 时，

$$F^{\#}(0)=\frac{\left|F'(0)\right|}{1+\left|F(0)\right|^2}=\frac{\dfrac{\sqrt[q]{\left|b_i\right|}}{(k-1)!}\left|\xi_0\right|^{k-1}}{1+\dfrac{\left(\sqrt[q]{\left|b_i\right|}\right)^2}{(k!)^2}\left|\xi_0\right|^{2k}}$$

$$F^{\#}(0)\le\begin{cases}\dfrac{\sqrt[q]{\left|b_i\right|}}{(k-1)!}\left|\xi_0\right|^{k-1}\le\dfrac{\sqrt[q]{\left|b_i\right|}}{2}, & \left|\xi_0\right|<1\\[2ex] \dfrac{\dfrac{\sqrt[q]{\left|b_i\right|}}{(k-1)!}\left|\xi_0\right|^{k-1}}{2\dfrac{\sqrt[q]{\left|b_i\right|}}{k!}\left|\xi_0\right|^{k}}\le\dfrac{k}{2}, & \left|\xi_0\right|\ge 1\end{cases}$$

这说明 $F^{\#}(0)\le\dfrac{\sqrt[q]{\left|b_i\right|}}{2}+\dfrac{k}{2}$。如果 $b_i=0(i=1,2)$，可得 $F^{\#}(0)=0$，上面不等式也成立。与 $F^{\#}(0)=kA+1$ 矛盾。因为 $\left(F^{(k)}(\xi)\right)^q\not\equiv b_i$，根据 Hurwitz 定理，可知存在一点列 ξ_n，$\xi_n\to\xi_0$，使得 $\left(F_n^{(k)}\left(\xi_n\right)\right)^q=\left(f_n^{(k)}\left(z_n+\rho_n\left(\zeta_n+\eta_n\xi_n\right)\right)\right)^q=b_i$。根据条件可得，$f_n\left(z_n+\rho_n\left(\zeta_n+\eta_n\xi_n\right)\right)\in S_1$。可证，当 $n\to\infty$ 时，$f_n\left(z_n+\rho_n\left(\zeta_n+\eta_n\xi_n\right)\right)=a_1$。否则，$f_n\left(z_n+\rho_n\left(\zeta_n+\eta_n\xi_n\right)\right)=a_2$。于是，

$$F\left(\xi_0\right)=\lim_{n\to\infty}\rho_n^{-k}\eta_n^{-k}\left(f_n\left(z_n+\rho_n\left(\zeta_n+\eta_n\xi_n\right)\right)-a_1\right)=\lim_{n\to\infty}\rho_n^{-k}\eta_n^{-k}\left(a_2-a_1\right)=\infty$$

这与 $\left(F^{(k)}\left(\xi_0\right)\right)^q=b_i$ 矛盾，这暗示了，若 $\left(F^{(k)}(\xi)\right)^q\in S_2$，则 $F(\xi)=0$。

根据断言 1)和引理 2，可知 $F(\xi)$ 不是超越亚纯函数。

情形 1.1　$F(\xi)$ 是一个非常数的多项式。

根据 Nevanlinna 第二基本定理和断言 2)，可知

$$T\left(r,\left(F^{(k)}\right)^q\right)\le\sum_{i=1}^{2}\bar{N}\left(r,\frac{1}{\left(F^{(k)}\right)^q-b_i}\right)+\bar{N}(r,F)+O(1)\le\bar{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(1)\tag{3}$$

显然，

$$T\left(r,\left(F^{(k)}\right)^q\right)=q\left(\deg(F)-k\right)\log r+O(1)\tag{4}$$

因为 F 的零点重级至少为 k，可知

$$\overline{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)\leq\frac{N\left(r,\frac{1}{F}\right)}{k}=\frac{T(r,F)+O(1)}{k}=\frac{\deg(F)}{k}\log r+O(1) \tag{5}$$

由 F 的零点重级至少为 $k(\geq 2)$，(3)，(4)和(5)，可得

$$(qk-1)\deg(F)\leq qk^2 \tag{6}$$

$$k\leq\deg(F)\leq\frac{qk^2}{qk-1}\leq 2k \tag{7}$$

由于 $F(\xi)$ 的零点重级均 $\geq k$，可知 $F(\xi)$ 仅有一个零点或者仅有两个不同的零点。

情形 1.1.1 $F(\xi)$ 仅有一个零点。

令 $F(\xi)=c_0(\xi-\xi_1)^{\deg(F)}$，其中 c_0 为非零常数，对任意的 $i(i=1,2)$，$\left(F^{(k)}(\xi)\right)^q-b_i$ 至少有一个零点。根据断言 2)，可知 $F(\xi)$ 至少有两个不同的零点。

情形 1.1.2 $F(\xi)$ 仅有两个不同的零点。

根据 $F(\xi)$ 的零点重级均 $\geq k$ 和(6)，可知 $2k(qk-1)\leq qk^2$，从而 $2\leq 2q\leq qk\leq 2$。因此 $k=2$ 和 $q=1$，由此可知 $F(\xi)$ 是一个次数为 4~的多项式，且 $F(\xi)$ 的两个不同零点的重级都为 2。可证 $b_i\neq 0$，$i=1,2$。由断言 2)，如果 $F^{(2)}(\xi_0)=b_i=0$，$i=1,2$，这说明 ξ_0 不是 $F(\xi)$ 的重级为 2 的零点，矛盾。根据 $b_1\neq b_2$ 和 $F(\xi)$ 仅有两个不同的零点，可知 $\left(F^{(2)}-b_1\right)\left(F^{(2)}-b_2\right)$ 的每个零点重级为 2。

显然，$F^{(3)}\neq 0$，令

$$P=\frac{FF^{(3)}}{\left(F^{(2)}-b_1\right)\left(F^{(2)}-b_2\right)} \tag{8}$$

显然，$P(\neq 0)$ 是有理函数，它的极点来自于 $F^{(2)}-b_i$ 零点，$i=1,2$。如果 ξ_0 是 $F^{(2)}-b_i$ 的二~重零点，则 ξ_0 是 $F^{(3)}$ 的一重零点，也是 $F(\xi)$ 的二重零点，这意味着 $F^{(2)}-b_i$ 零点也是 P 的零点，所以 P 没有极点，且 P 是多项式。由(8)，可知 $P\left(F^{(2)}-b_1\right)\left(F^{(2)}-b_2\right)=FF^{(3)}$，经过简单的计算，可得 $\deg P=1$，所以 P 仅有一个零点。对于任一 $i(i=1,2)$，若 $F^{(2)}(\xi_0)-b_i=0$，则 $P(\xi_0)=0$，这说明 P 至少有两个不同的零点，矛盾。

情形 1.2 $F(\xi)$ 不是多项式的非常数有理函数。

令

$$F(\xi)=a_m\xi^m+a_{m-1}\xi^{m-1}+\cdots+a_1\xi+a_0+\frac{P_1(\xi)}{P_2(\xi)} \tag{9}$$

其中 $a_m,a_{m-1},\cdots,a_1,a_0$ 是复数，m 是一个正整数，P_1 和 P_2 是互素的两个多项式，且 $\deg(P_1)<\deg(P_2)$。

假设

$$P_2(\xi)=\mu(\xi-\xi_1)^{m_1}(\xi-\xi_2)^{m_2}\cdots(\xi-\xi_t)^{m_t} \tag{10}$$

其中 $\mu(\neq 0)$ 是一个常数，t 是一个正整数，$m_1,m_2,\cdots,m_t$ 是 t 个正整数，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 是 t 个不同的有限复数，$w=m_1+m_2+\cdots+m_t$。由(9)和(10)，可得到

$$N\left(r,\left(F^{(k)}\right)^q\right)=q(w+kt)\log r+O(1) \tag{11}$$

$$\overline{N}(r,F)=\overline{N}\left(r,\left(F^{(k)}\right)^q\right)=t\log r+O(1) \tag{12}$$

情形 1.2.1 假设 $m \ge k$ 。

由 Nevanlinna 第二基本定理，断言 1)和断言 2)，可知

$$T\left(r,\left(F^{(k)}\right)^{q}\right) \le \bar{N}(r,F)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)+O(1) \\ \le q\left(\bar{N}(r,F)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{F}\right)\right)+O(1) \tag{13}$$

由(9)，(10)和 $F(\xi)$ 的零点重级均 $\ge k(\ge 2)$，可得

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{F}\right) \le \frac{1}{k}N\left(r,\frac{1}{F}\right)=\frac{m+w}{k}\log r+O(1) \le \frac{m+w}{2}\log r+O(1) \tag{14}$$

和

$$T\left(r,\left(F^{(k)}\right)^{q}\right)=N\left(r,\frac{1}{\left(F^{(k)}\right)^{q}}\right)+O(1) \\ =q\left[(m-k)+(w+kt)\right]\log r+O(1) \\ =q\left[m+w+(t-1)k\right]\log r+O(1) \tag{15}$$

结合(12)~(15)，可得 $q\left[(m+w)+(t-1)k\right]\log r \le q\left(\frac{m+w}{2}+t\right)\log r+O(1)$ 。经过简单的计算，获知

$$\frac{m+w}{2} \le -k(t-1)+t \le 2-t\,. \tag{16}$$

由于 m，w 和 t 都是正整数，根据(16)，可知 $m=w=t=1$，与 $m \ge k \ge 2$ 矛盾。

情形 1.2.2 假设 $m<k$ 。

从(9)~(14)可知

$$T\left(r,\left(F^{(k)}\right)^{q}\right)=N\left(r,\left(F^{(k)}\right)^{q}\right)+O(1)=q(w+kt)\log r+O(1)$$

且 $q(w+kt)\log r \le q\left(t+\frac{m+w}{k}\right)\log r+O(1)$，因此 $k<(k-1)w+(k-1)kt \le m<k$ 矛盾。

情形 2 $g(\zeta)\ne 0$ 且 $g(\zeta)+a_1-a_2 \ne 0$。

根据引理 3，可断言 g 是超越亚纯函数。从(1)和(2)，获知

$$\left[\rho_n^{kq}\left(\left(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)\right)^{q}-b_1\right)\right]\left[\rho_n^{kq}\left(\left(f_n^{(k)}(z_n+\rho_n\zeta)\right)^{q}-b_2\right)\right] \to \left(\left(g^{(k)}\right)^{q}\right)^{2} \tag{17}$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上内闭一致收敛。可证 $\left(g^{(k)}(\zeta)\right)^{q} \not\equiv 0$。如果 $\left(g^{(k)}(\zeta)\right)^{q} \equiv 0$，可知 $g(\zeta)$ 是一个次数至多为 $k-1$，这与 $g(\zeta)$ 是超越亚纯函数矛盾。结合 $\bar{E}(S_1,f)=\bar{E}\left(S_2,\left(f^{(k)}\right)^{q}\right)$，(1)，(2)，(17)，$g(\zeta)\ne 0$ 和 $g(\zeta)+a_1-a_2 \ne 0$，可得 $\left(g^{(k)}(\zeta)\right)^{q} \ne 0$，即 $g^{(k)}(\zeta)\ne 0$。

根据 g 的级至多为 2 和引理 4，可知，在复平面 $\mathbb{C}$ 上，g 极点个数是有限的。由 Nevanlinna 第二基本定理，获知

$$T(r,g)=\bar{N}(r,g)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{g+a_1-a_2}\right)+O(\log r)<O(\log r) \tag{18}$$

从(18)可知，g 是一个有理函数。矛盾。

综上所述，$\mathcal{F}$ 在 D 内正规，定理 1 证毕。

基金项目

国家自然科学基金(编号：11271090)，广东省自然科学基金(编号：2016A030310257、2015A030313346)，广州大学研究生创新能力培养资助计划(2018GDJC-D28)资助。

参考文献

[1] Gu, Y.X., Fang, M.L. and Pang, X.C. (2007) The Theory of Normal Families and It's Applications. Science Press, Beijing.

[2] Ahlfors, L.V. (1979) Complex Analysis. 3rd Edition, McGraw-Hill, Hoboken.

[3] Schiff, J. (1993) Normal Families. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0907-2

[4] Xu, J.F. and Cao, W.S. (2010) Some Normality Criteria of Meromorphic Functions. *Journal of Inequalities and Applications*, **2010**, Article ID: 926302. https://doi.org/10.1155/2010/926302

[5] Chen, H.H., Cai, J.H. and Yuan, W.J. (2018) Normality Criteria of a Family of Meromorphic Functions Concerning Shared Set. *Journal of Jiaying University*, **36**, 5-8.

[6] Jiang, Y.B. and Gao, Z.S. (2011) Normal Families of Meromorphic Functions Sharing Values or Functions. *Journal of Inequalities and Applications*, **2011**, Article No. 72. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2011-72

[7] Qiu, L. and Hu, F.F. (2013) Normal Families of Meromorphic Functions Sharing One Function. *Journal of Inequalities and Applications*, **2013**, 288. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2013-288

[8] Fang, M.L. (1996) A Note on Sharing Values and Normality. *Journal of Mathematical Study*, **29**, 29-32.

[9] Schwick, W. (1992) Sharing Values and Normality. *Archiv der Mathematik*, **59**, 50-54. https://doi.org/10.1007/BF01199014

[10] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normality and Shared Values. *Arkiv för Matematik*, **38**, 171-182. https://doi.org/10.1007/BF02384496

[11] Liu, X.J. and Pang, X.C. (2007) Shared Values and Normality. *Acta Mathematica Sinica*, **52**, 409-412.

[12] Fang, M.L. and Zalcman, L. (2002) Normal Families and Shared Values of Meromorphic Functions. *Computational Methods and Function Theory*, **2**, 385-395. https://doi.org/10.1007/BF03321856

[13] Zhang, H., Xie, D. and Zhang, Q.D. (2011) Normal Criteria Concerning Shared Values of Meromorphic Function. *Acta Mathematica Scientia A*, **31**, 1290-1294.

[14] Xu, Y. and Qiu, H.L. (2016) Normal Functions and Shared Sets. *Filomat*, **30**, 287-292. https://doi.org/10.2298/FIL1602287X

[15] Li, X.M., Yi, H.X. and Wang, K.M. (2014) Notes on Normal Families of Meromorphic Functions Sharing a Set with Their Derivatives. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **51**, 1773-1789. https://doi.org/10.4134/BKMS.2014.51.6.1773

[16] Pang, X.C. and Zalcman, L. (2000) Normal Families and Shared Values. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **32**, 325-331. https://doi.org/10.1112/S002460939900644X

[17] Bergweiler, W. and Eremenko, A. (1995) On the Singularities of the Inverse to a Meromorphic Functions of Finite Order. *Revista Matemática Iberoamericana*, **11**, 355-372. https://doi.org/10.4171/RMI/176

[18] Zalcman, L. (1998) Normal Families: New Perspective. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **35**, 215-230. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-98-00755-1

[19] Yang, L. (1982) Value Distribution Theory and It's New Research. Science Press, Beijing.

[20] Langley, J.K. (2003) The Second Derivative of a Meromorphic Function of Finite Order. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **35**, 97-108. https://doi.org/10.1112/S0024609302001558

知网检索的两种方式：

1. 打开知网首页：http://cnki.net/，点击页面中“外文资源总库 CNKI SCHOLAR”，跳转至：http://scholar.cnki.net/new，搜索框内直接输入文章标题，即可查询；
   或点击“高级检索”，下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询。
2. 通过知网首页 http://cnki.net/顶部“旧版入口”进入知网旧版：http://www.cnki.net/old/，左侧选择“国际文献总库”进入，搜索框直接输入文章标题，即可查询。

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org