Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(6), 694-698
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.96092

Two-Dimension Projective Linear Groups Act Block-Transitively on 5-(q + 1, 6, λ) Designs

Lele Wei[1*], Jie Li[2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
[2]School of Computer Science and Technology, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: *1025910224@qq.com, 1595012796@qq.com

Received: Jul. 11th, 2019; accepted: Jul. 21st, 2019; published: Aug. 7th, 2019

Abstract

Let $D = (X, B)$ be a 5-(q + 1, 6, λ) design. Let $G \le Aut(D)$ act block-transitively on D. By using the orbits of two-dimension projective linear groups on the projective lines, the results show that: 1) if $G = PGL(2, q)$, then D is a unique 5-(12, 6, 2) design; 2) if $G = PSL(2, q)$, then D has two nonisomorphic 5-(12, 6, 1) designs.

Keywords

Simple t-Designs, Projective General Linear Group, Projective Special Linear Group, Automorphism Group, Block-Transitively

二维射影线性群区传递作用下的5-(q + 1, 6, λ)设计

魏乐乐[1*]，李　杰[2]

[1]青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
[2]青岛大学计算机科学技术学院，山东 青岛
Email: *1025910224@qq.com, 1595012796@qq.com

收稿日期：2019年7月11日；录用日期：2019年7月21日；发布日期：2019年8月7日

*通讯作者。

文章引用: 魏乐乐, 李杰. 二维射影线性群区传递作用下的 5-(q + 1, 6, λ)设计[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 694-698.
DOI: 10.12677/pm.2019.96092

摘 要

设$D = (X, B)$是一个5-$(q + 1, 6, \lambda)$设计。若$G \le Aut(D)$且区传递作用在D上，利用二维射影线性群在射影直线上作用的轨道证明了：1) 若$G = PGL(2, q)$，则D为同构意义下唯一的5-(12, 6, 2)设计；2) 若$G = PSL(2, q)$，则D有两个不同构的5-(12, 6, 1)设计。

关键词

单纯t-设计，射影特殊线性群，射影一般线性群，自同构群，区传递

1. 引言

1.1. 研究背景

t-设计是一类非常重要的组合设计。与$t=2$的情形即BIB设计的情形相比，目前对$t \ge 3$时的t-设计理论的研究远非完善。设$q=p^n$，其中p为素数。对于以射影线性群为自同构群的t-设计的存在性及构造问题，文献[1]完整解决了以$PSL(2,q)$为自同构群，区组长度为k的3-设计的存在性问题，这里$k \ne 0,1(\bmod p)$。文献[2]-[8]找到了一些$t \ge 4$的t-设计存在的例子。文献[6] [7] [8]完整确定了二维射影线性群区传递作用下的4-$(q+1,5,\lambda)$与4-$(q+1,6,\lambda)$及5-$(q+1,7,\lambda)$设计的参数，并构造了相应参数的设计。

参数为t-(v,k,λ)的一个设计，简称t-设计，定义为符合以下条件的一对符号$(X,\mathfrak{B})$：

(i) X是一个v-集合；

(ii) $\mathfrak{B}$是X的一组k-子集；

(iii) X的任意给定的t-子集都恰好含于$\mathfrak{B}$的λ个成员之中。

X的元素称为点，$\mathfrak{B}$的成员称为区组。设$\mathfrak{D}=(X,\mathfrak{B})$为一个$t$-$(v,k,\lambda)$设计。若$\mathfrak{B}$中不包含重复区组，则称$\mathfrak{D}$为单纯的设计。若$X$的每个$k$-子集都在$\mathfrak{B}$中出现相同的次数，则称$\mathfrak{D}$为平凡的$t$-设计。当$v \le k+t$时，任一$t$-$(v,k,\lambda)$设计都是平凡的。本文中我们只考虑非平凡的单纯$t$-设计。

令$G \le sym(X)$，对任意的$g \in G$，$S \subseteq X$，定义$S^g=\{x^g : x \in S\}$。$S^G=\{S^g : g \in G\}$称为S的轨道，$G_S=\{g \in G : S^g = S\}$称为$S$的稳定子群，且$|G|=|S^G||G_S|$。$(X,\mathfrak{B})$的一个自同构是指具有下述性质的$X$的置换$g$：如果$B \in \mathfrak{B}$，则$B^g \in \mathfrak{B}$。由$(X,\mathfrak{B})$的自同构组成$sym(X)$的子群，称为$(X,\mathfrak{B})$的自同构群。对任意的$B, B' \in \mathfrak{B}$，若存在$g \in G$使得$B^g = B'$，则称$G$区传递作用于$\mathfrak{D}$上。

令q为素数幂，$X = GF(q) \cup \{\infty\}$为射影直线。对任意的$a,b,c,d \in GF(q)$，定义函数

$$f : X \to X$$

其中

$$x^f = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

定义$a/0=\infty$，$a/\infty=0$，$\infty+a=a+\infty=\infty$，$(a\infty+b)/(c\infty+d)=a/c$。$f$称为线性分式，$f$的行列式

为 $\det f = ad - bc$。所有行列式为非零平方元的线性分式的集合构成线性分式群 $LF(2,q)$，它同构于 $PSL(2,q)$。所有行列式非零的线性分式的集合也构成群，同构于 $PGL(2,q)$。

设 $\mathfrak{D} = (X, \mathfrak{B})$ 是一个 5-$(q+1,6,\lambda)$ 设计，$G \le Aut(\mathfrak{D})$ 区传递作用于 $\mathfrak{D}$ 上。令 $GF(q)$ 表示 q 元有限域，$X = GF(q) \cup \{\infty\}$ 为射影直线。本文证明了若 $G = PSL(2,q)$，则 $\mathfrak{D}$ 有两个不同构的 5-$(12,6,1)$ 设计。并且用一个新的方法证明了文献[3]中的一个结论：若 $G = PGL(2,q)$，则存在唯一的 5-$(12,6,2)$ 设计。

1.2. 预备知识

引理 1 [9]：设 $t \ge 2$，$\mathfrak{D} = (X, \mathfrak{B})$ 为一个 t-(v,k,λ) 设计。再设 $1 \le i \le t$，则 $\mathfrak{D}$ 也是一个 i-(v,k,λ_i) 设计，此处

$$\lambda_i = \lambda \binom{v-i}{t-i} \Big/ \binom{k-i}{t-i}.$$

引理 2 [9]：一个 t-(v,k,λ) 设计的区组个数

$$b = \lambda \binom{v}{t} \Big/ \binom{k}{t}.$$

引理 3 [6]：设 $\mathfrak{D} = (X, \mathfrak{B})$ 为一个 4-$(12,6,\lambda)$ 设计，$X = GF(11) \cup \{\infty\}$，如果 $G = PGL(2,11)$ 区传递作用于 $\mathfrak{D}$ 上，则存在唯一的 4-$(12,6,8)$ 设计。

引理 4 [6]：设 $\mathfrak{D} = (X, \mathfrak{B})$ 为一个 4-$(12,6,\lambda)$ 设计，$X = GF(11) \cup \{\infty\}$，如果 $G = PSL(2,11)$ 区传递作用于 $\mathfrak{D}$ 上，则 $\mathfrak{D}$ 是一个 4-$(12,6,4)$ 设计。

引理 5 [10]：设 $g \in PSL(2,q)$，g 的阶为 d 且 $d > 1$，则 g 有 a 个不动点和 $b = (q+1-a)/d$ 个 d 圈。当 $q \equiv 3 \pmod 4$ 时，$PSL(2,q)$ 的置换特征如表 1 所示。

Table 1. The permutation character of $PSL(2,q)$ where $q \equiv 3 \pmod 4$

表 1. $q \equiv 3 \pmod 4$ 时 $PSL(2,q)$ 的置换特征

g 的阶	g 的中心化子的阶	共轭类的个数	不动点个数
1	$\frac{q^3-q}{2}$	1	$q+1$
p	q	2	1
2	$q+1$	1	0
$d \mid \frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{\phi(d)}{2}$	2
$d \mid \frac{q+1}{2}, d \ne 2$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{\phi(d)}{2}$	0

2. 定理的证明

引理 6：设 $\mathfrak{D} = (X, \mathfrak{B})$ 为一个 5-$(q+1,6,\lambda)$ 设计，$X = GF(q) \cup \{\infty\}$。若 $G = PGL(2,q)$ 区传递作用于 $\mathfrak{D}$ 上，则 $\lambda |G_B| (q-2)(q-3) = 720$。可能出现的情形：$q = 11$，$\lambda = 2$。

证明：由于 $\mathfrak{D} = (X, \mathfrak{B})$ 为 G 区传递作用下的 5-$(q+1,6,\lambda)$ 设计，可设 $\mathfrak{B} = B^G$，则 $b = |B^G| = |G| / |G_B|$。由引理 2 知

$$b = \lambda \binom{q+1}{5} \Big/ \binom{6}{5} = \frac{(q+1)q(q-1)}{|G_B|}.$$

故 $\lambda|G_B|(q-2)(q-3)=720$。由于 q 为素数幂且 $v>k+t$，可得 $q=11$。

当 $q=11$ 时，$\lambda|G_B|=10$。由于 λ 为正整数，故 $\lambda\in\{1,2,5,10\}$。由引理 1 知，若 $\mathfrak{D}$ 为一个 5-$(12,6,1)$ 设计，则 $\mathfrak{D}$ 也为一个 4-$(12,6,4)$ 设计；若 $\mathfrak{D}$ 为一个 5-$(12,6,2)$ 设计，则 $\mathfrak{D}$ 也为一个 4-$(12,6,8)$；若 $\mathfrak{D}$ 为一个 5-$(12,6,5)$ 设计，则 $\mathfrak{D}$ 也为一个 4-$(12,6,20)$ 设计；若 $\mathfrak{D}$ 为一个 5-$(12,6,10)$ 设计，则 $\mathfrak{D}$ 也为一个 4-$(12,6,40)$ 设计。再由引理 3 知 λ 的值可能为 2。

下用一个新的方法证明文献[3]中的一个结论。

定理 1： 设 $\mathfrak{D}=(X,\mathfrak{B})$ 为一个 5-$(q+1,6,\lambda)$ 设计，$X=GF(q)\cup\{\infty\}$。如果 $G=PGL(2,q)$ 区传递作用于 $\mathfrak{D}$ 上，则存在唯一的 5-$(12,6,2)$ 设计。

证明： 设 $\mathfrak{B}=B^G$。由引理 6 知若 $\lambda=2$，则 $|G_B|=5$。令 $G_B=\langle f\rangle$。由于 B 为 X 的 6-子集，故 B 中包含 f 的一个 5-圈和一个不动点。由于 G 在 X 上的作用是精确 3 重传递的，可设 $B=\{\infty,0,1,\alpha,\beta,\gamma\}$，其中 $(\infty\,0\,1\,\alpha\,\beta)$ 为 f 的一个 5-圈，γ 为 f 的一个不动点。设 $x^f=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，其中 $a,b,c,d\in GF(11)$。由 $\infty^f=0$ 及 $0^f=1$ 知 $a=0$ 且 $b=d$，从而 $x^f=\dfrac{b}{cx+b}$。由于 $b\neq 0$，故存在 $e\in GF(11)$ 使得 $x^f=\dfrac{1}{ex+1}$。由 $1^f=\alpha$ 得 $x^f=\dfrac{\alpha}{(1-\alpha)x+\alpha}$。又 $\alpha^f=\beta$ 及 $\beta^f=\infty$，从而 $\dfrac{\alpha(2-\alpha)}{-\alpha^2+\alpha+1}=\infty$，即 $-\alpha^2+\alpha+1=0$。将方程 $-\alpha^2+\alpha+1=0$ 在 $GF(11)$ 中求解，得 $\alpha=4$ 或 $\alpha=8$。当 $\alpha=4$ 时，$x^f=\dfrac{1}{2x+1}$，$\beta=5$，$\gamma=6$ 或 $\gamma=10$。当 $\alpha=8$ 时，$x^f=\dfrac{2}{x+2}$，$\beta=9$，$\gamma=4$ 或 $\gamma=5$。综上述 B 可能为如下四种情形：$\{\infty,0,1,4,5,6\}$，$\{\infty,0,1,4,5,10\}$，$\{\infty,0,1,8,9,4\}$，$\{\infty,0,1,8,9,5\}$。

取 $B=\{\infty,0,1,4,5,6\}$，调用程序得到初始区组 B 在 G 作用下的轨道 B^G，发现上述四个区组在同一条轨道中，且 $|G_B|=5$。故只需验证 (X,B^G) 是否可以构成一个 5-$(12,6,2)$ 设计。调用程序知 X 的任意给定的 5-子集都恰好含于 B^G 的两个成员之中。故 (X,B^G) 为同构意义下满足条件的唯一的 5-$(12,6,2)$ 设计。

引理 7： 设 $\mathfrak{D}=(X,\mathfrak{B})$ 为一个 5-$(q+1,6,\lambda)$ 设计，$X=GF(q)\cup\{\infty\}$。若 $G=PSL(2,q)$ 区传递作用于 $\mathfrak{D}$ 上，则 $\lambda|G_B|(q-2)(q-3)=360$。可能出现的情形：$q=11$，$\lambda=1$。

证明： 由于 $\mathfrak{D}=(X,\mathfrak{B})$ 为一个 G 区传递作用下的 5-$(q+1,6,\lambda)$ 设计，设 $\mathfrak{B}=B^G$，则 $b=|B^G|=|G|/|G_B|$。由引理 2 知

$$b=\lambda\binom{q+1}{5}\Big/\binom{6}{5}=\frac{(q+1)q(q-1)}{(2,q-1)|G_B|}.$$

故 $\lambda|G_B|(q-2)(q-3)(2,q-1)=720$。由于 q 为素数幂且 $v>k+t$，可得 $q=11$。即 $\lambda|G_B|(q-2)(q-3)=360$。

当 $q=11$ 时，$\lambda|G_B|=5$。由于 λ 为正整数，故 $\lambda\in\{1,5\}$。由引理 1 知，若 $\mathfrak{D}$ 为一个 5-$(12,6,1)$ 设计，则 $\mathfrak{D}$ 也为一个 4-$(12,6,4)$ 设计；若 $\mathfrak{D}$ 为一个 5-$(12,6,5)$ 设计，则 $\mathfrak{D}$ 也为一个 4-$(12,6,20)$ 设计。再由引理 4 知 λ 的值可能为 1。

引理 8： $G=PSL(2,11)$ 作用在 X 的 6-子集上的轨道及轨道长度分别为：

$$O_1=\{0,1,2,3,4,5\}^G,\ |O_1|=|G|/2;\ O_2=\{0,1,2,3,4,6\}^G,\ |O_2|=|G|/5;$$

$$O_3=\{0,1,2,3,4,9\}^G,\ |O_3|=|G|/5;\ O_4=\{0,1,2,3,5,6\}^G,\ |O_4|=|G|/6;$$

$$O_5=\{0,1,2,3,5,7\}^G,\ |O_5|=|G|/6;\ O_6=\{0,1,2,3,5,9\}^G,\ |O_6|=|G|/6.$$

证明：由 Cauchy-Frobenius 引理知 G 作用在 X 的 6-子集上的轨道条数为：$t=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_6(g)$。由引理 5 知 $q=11$ 时只有 $1,2,3,5,6$ 阶元可以固定 6-子集，故

$$t=\frac{1}{|G|}\left[\binom{q+1}{6}+\frac{|G|}{q+1}\binom{\frac{q+1}{2}}{3}+\frac{2|G|}{q+1}\binom{\frac{q+1}{3}}{2}+\frac{8|G|}{5}+\frac{|G|}{3}\right]=6.$$

调用程序得到 G 作用在 X 的 6-子集上的轨道及轨道长度。

定理 2：设 $\mathfrak{D}=(X,\mathfrak{B})$ 为一个 5-$(q+1,6,\lambda)$ 设计，$X=GF(q)\cup\{\infty\}$。如果 $G=PSL(2,q)$ 区传递作用于 $\mathfrak{D}$ 上，$\mathfrak{D}$ 为两个不同构的 5-$(12,6,1)$ 设计。

证明：设 $\mathfrak{B}=S^G$。由引理 7 知若 $\lambda=1$，则 $|G_S|=5$。再由引理 8，故只需验证 (X,O_2) 与 (X,O_3) 是否可以构成 5-$(12,6,1)$ 设计。调用程序知 X 的任意给定的 5-子集都恰好含于 O_i 的一个成员之中，其中 $i=2,3$。即 (X,B^G) 为满足条件的两个不同构的 5-$(12,6,1)$ 设计。

参考文献

[1] Cameron, P.J., Maimani, H.R., Omidi, G.R. and Tayfeh-Rezaie, B. (2006) 3-Designs from $PSL(2,q)$. *Discrete Mathematics*, **306**, 3063-3073. https://doi.org/10.1016/j.disc.2005.06.041

[2] Bierbrauer, J. (1993) A Family of 4-Designs with Block Size 9. *Discrete Mathematics*, **138**, 113-117. https://doi.org/10.1016/0012-365X(94)00192-L

[3] 王华国. 射影线性群作用下的区传递 4-设计[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 中南大学数学系, 2009.

[4] 刘伟俊, 谭琼华, 龚罗中. 旗传递 5-$(v,k,2)$ 设计[J]. 江苏大学学报, 2010, 31(5): 612-615.

[5] 刘伟俊, 姚蹈, 陈静. 一般射影线性群 $PGL(2,q)$ 与 4-$(q+1,5,\lambda)$ 设计[J]. 数学理论与应用, 2010, 30(1): 123-128.

[6] 陈静, 陈暑波, 刘伟俊. 二维射影线性群与区传递 4-$(v,6,\lambda)$ 设计[J]. 中国科学, 2010, 40(11): 1045-1054.

[7] 唐剑雄, 陈静, 刘伟俊, 等. 二维射影线性群与区传递 4-$(q+1,5,\lambda)$ 设计[J]. 数学进展, 2012, 41(5): 547-553.

[8] 杨冠, 刘伟俊. 射影线性群区传递作用于 5-$(q+1,7,\lambda)$ 设计[J]. 浙江大学学报, 2013, 40(5): 489-491.

[9] 沈灏. 组合设计理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2008: 24-28.

[10] Biggs, N.L. and White, A.T. (1979) Permutation Groups and Combinatoral Structures. Cambridge University Press, Cambridge, 61-75. https://doi.org/10.1017/CBO9780511600739