**Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(6), 749-754**
Published Online August 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.96098

Hans汉斯

# Series Expansion of Generalized Ramanujan Constant $R(a,c-a)$

**Xiaoyu Wang[1], Peigui Zhou[2], Fei Wang[1*]**

[1]Teaching Section of Mathematics, Zhejiang Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Hangzhou Zhejiang
[2]Keyi College of Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang
Email: *wf509529@163.com

Received: Jul. 21st, 2019; accepted: Jul. 31st, 2019; published: Aug. 16th, 2019

## Abstract

**In this paper, the authors present several kinds of series expansion expressions of generalized Ramanujan constant $R(a,c-a)=-2\gamma-\psi(a)-\psi(c-a)$ by the *n*th order derivative of $\psi(x)$. By these results, some known results about $R(a,c-a)$ can be easily improved.**

## Keywords

**Generalized Ramanujan Constant, Psi Function, Series Expansion**

# 广义Ramanujan常数$R(a,c-a)$的级数展开

**王晓宇[1]，周培桂[2]，王　飞[1*]**

[1]浙江机电职业技术学院数学教研室，浙江　杭州
[2]浙江理工大学科技与艺术学院，浙江　杭州
Email: *wf509529@163.com

收稿日期：2019年7月21日；录用日期：2019年7月31日；发布日期：2019年8月16日

## 摘　要

本文通过$\psi(x)$的*n*阶导数，给出了广义Ramanujan常数$R(a,c-a)=-2\gamma-\psi(a)-\psi(c-a)$的不同类型的级数展开式，这些级数展开式可以改进$R(a,c-a)$的一些已知结果。

*通讯作者。

文章引用: 王晓宇, 周培桂, 王飞. 广义 Ramanujan 常数 $R(a,c-a)$ 的级数展开[J]. 理论数学, 2019, 9(6): 749-754.
DOI: 10.12677/pm.2019.96098

## 关键词

**广义Ramanujan常数，Psi函数，级数展开**



## 1. 引言

在本文中，对于正实数 $x$ 和 $y$，$\Gamma$-函数、$B$-函数以及 $\psi$-函数分别定义[1]为：

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t, B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \tag{1.1}$$

令 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right]=0.57721566\cdots$，是 Euler-Mascheroni 常数，则

$$\psi(1)=-\gamma, \psi(1/2)=-\gamma-\log 4 \tag{1.2}$$

在 $(0,\infty)\times(0,\infty)$ 上定义 Ramanujan 常数[2] [3] [4]为：

$$R(a,b)=-\psi(a)-\psi(b)-2\gamma \tag{1.3}$$

当 $b=1-a$ 时，式(1.3)记为

$$R(a)=R(a,1-a)=-\psi(a)-\psi(1-a)-2\gamma,$$

结合式(1.2)~(1.3)知 $R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\log 16$。

当 $b=c-a, c\in R$ 时，式(1.3)记为

$$R(a,c-a)=-\psi(a)-\psi(c-a)-2\gamma \tag{1.4}$$

另外，Rieman-zeta 函数

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}, \operatorname{Re} s>1 \tag{1.5}$$

对 $x\in R^+$，$\psi(x)$ 有下面一些常用到的等式：

$$\psi(x)=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k(x+k)}, \psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x} \tag{1.6}$$

$$\psi(n)=-\gamma+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}(n\ge 2) \tag{1.7}$$

$$\psi(x+n)=\psi(x+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(n-k)+x} \tag{1.8}$$

$$\psi^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^{n+1}}, n\in N \tag{1.9}$$

$$\psi'(1)=\frac{\pi^2}{6}=\zeta(2),\psi'(2)=\frac{\pi^2}{6}-1,\psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}=3\psi'(1) \tag{1.10}$$

$$\psi''(1)=-2\zeta(3),\psi''\left(\frac{1}{2}\right)=-14\zeta(3).$$

众周所知，Ramanujan 常数 $R(a)$ 在零平衡的高斯超几何函数的研究中有着重要的应用，在特殊函数的一些其他领域也是必不可少的。而高斯超几何函数在特殊函数中有着极为重要的地位，与很多类型的特殊函数相关，它的性质和 Γ-函数、$B$-函数以及 $\psi$-函数密切相关，在研究这些函数的性质时经常用到 Ramanujan 常数 $R(a)$，而 $R(a)$ 的级数展开是重要而有效的研究工具[5] [6] [7] [8]。但目前 $R(a)$ 的一些已知性质主要考虑的是 $b=1-a$ 的情况，本文的主要目的是建立广义 Ramanujan 常数 $R(a)$ （即 $b=c-a,c\in R$ 的情形)的不同类型的级数展开。

## 2. 主要结果

本节给出主要结果，本节出现的 $R(x)$ 均是 $R(x,c-x)$。

首先，建立广义 Ramanujan 常数 $R(x,c-x)$ 在 $x=0$ 点处的级数展开。

**定理 2.1.** 设 $x\in(0,c),c\in R$，广义 Ramanujan 常数 $R(x,c-x)$ 有如下的级数展开式：

$$R(x,c-x)=\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\frac{1}{c-x}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(c-x)^n \tag{2.1}$$

其中，$a_n=\left[1+(-1)^n\right]\zeta(n+1)-\left(\frac{1}{1^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{(c-1)^{n+1}}\right),n\in N$。

下面的定理中给出 $R(x,c-x)-1/\left[x(c-x)\right]$ 的级数展开式。

**定理 2.2.** 设 $x\in(0,c/2],y=x(c-x)$，则 $R(x,c-x)$ 有如下的级数展开式：

$$R(x,c-x)=\frac{1}{y}+b_0+4\sum_{n=1}^{\infty}b_n(c-2x)^n=\frac{1}{y}+b_0+4\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}\left(c^2-4y\right)^n, \tag{2.2}$$

其中，

$$b_0=-2\left[\psi(c/2+1)-\psi(1)\right],b_n=\frac{1+(-1)^n}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+c)^{n+1}},n\in N.$$

下面的定理中，我们将 $R(x,c-x)$ 展开成 $y=x(c-x)$ 的级数。

**定理 2.3.** 设 $x\in(0,c/2],y=x(c-x)$，则 $R(x,c-x)$ 有如下的级数展开式：

$$R(x,c-x)=\frac{c}{y}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n y^n, \tag{2.3}$$

其中，$c_0=-1,c_n=(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+c}{\left(k^2+kc\right)^{n+1}},n\in N$。

## 3. 主要结果的证明

本节给出定理 2.1~2.3 的证明。

**定理 2.1 的证明：** 令

$f_1(x)=-\gamma-\psi(c-x)$，则 $f_1(0)=0$，$R(x,c-x)-\frac{1}{x}=f_1(x)-\left[\gamma+\psi(1+x)\right]$，且

$$f_1^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\psi^{(n)}(c-x),$$

根据式(1.5)和(1.9)可知，

$$f_1^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\psi^{(n)}(c)=n!\left[\zeta(n+1)-\left(1^{-(n+1)}+2^{-(n+1)}+\cdots+(c-1)^{-(n+1)}\right)\right],$$

于是，

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\zeta(n+1)-\left(1^{-(n+1)}+2^{-(n+1)}+\cdots+(c-1)^{-(n+1)}\right)\right]x^n \tag{3.1}$$

另外，由式(1.7)可知：

$$\psi(1+x)=-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n \tag{3.2}$$

有：

$$\gamma+\frac{1}{x}+\psi(x)=\gamma+\psi(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)} \tag{3.3}$$

由式(3.2)、(3.3)可得，

$$\begin{aligned}R(x,c-x)-\frac{1}{x}&=-2\gamma-\psi(x)-\psi(1-x)-\frac{1}{x}\\&=-2\gamma-\psi(1+x)-\psi(1-x)\\&=-\gamma-\psi(1+x)+f_1(x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[1+(-1)^n\right]\zeta(n+1)-\left(1^{-(n+1)}+2^{-(n+1)}+\cdots+(c-1)^{-(n+1)}\right)\right\}x^n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\end{aligned}$$

由 $R(c-x)=R(x)$ 可得出第二个等式

$$R(x,c-x)=\frac{1}{c-x}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(c-x)^n.$$

**定理 2.2 的证明：**令

$$f_2(x)=R(x,c-x)-\frac{1}{y}=R(x,c-x)-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{c-x}\right)$$

由式(1.4)及(3.3)可将 $f_2(x)$ 写成如下形式：

$$f_2(x)=-\left[2\gamma+\psi(x+1)+\psi(c+1-x)\right] \tag{3.4}$$

当 $x=c/2$ 时，式(3.4)化为

$$f_2(c/2)=-2\left[\gamma+\psi(c/2+1)\right]=-2\left[\psi(c/2+1)-\psi(1)\right],$$

对 $f_2(x)$ 求 $n$ 阶导数，则

$$f_2^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\psi^{(n)}(c+1-x)-\psi^{(n)}(x+1),$$

由式(3.4)和(1.9)可知：

$$f_2^{(2n-1)}(c/2)=0=b_{2n-1}, f_2^{(2n)}(c/2)=-2\psi^{(2n)}(c/2+1)=4^{n+1}(2n)!b_{2n} \tag{3.5}$$

因此，$f_2(x)$在$x=c/2$处有如下的级数展开式：

$$f_2(x)=b_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_2^{(n)}(c/2)}{n!}(x-c/2)^n=b_0+4\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}(c-2x)^{2n}=b_0+4\sum_{n=1}^{\infty}b_n(c-2x)^n.$$

由此可得式(2.2)中的第一个等式。根据$(c-2x)^2=c^2-4x(c-x)=c^2-4y$可得式(2.2)中第二个等式。

**定理 2.3 的证明：** 令$f_3(x)=\left[\frac{c}{y}-R(x,c-x)-1\right]\Big/y$，$f_4(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+c}{k(k+c)(k^2+kc+y)}$，

易知$f_4(0)=-c_1$。由式(1.4)知，

$$f_3(x)=\left\{\left[\gamma+\psi(x+1)\right]+\left[\gamma+\psi((c-x)+1)\right]-1\right\}\Big/y \tag{3.6}$$

根据式(3.3)及$\sum_{k=1}^{\infty}c/\left[k(k+c)\right]=1$，$f_3(x)$可以写成

$$f_3(x)=\frac{1}{y}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{x}{k+x}+\frac{c-x}{k+c-x}-\frac{c}{k+c}\right)=f_4(y) \tag{3.7}$$

对$f_4(y)$求$n$阶导数，可得

$$f_4^{(n)}(y)=(-1)^n n!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+c}{k(k+c)(k^2+kc+y)^{n+1}} \tag{3.8}$$

其中

$$\frac{f_4^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+c}{k(k+c)(k^2+kc)^{n+1}}=(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+c}{(k^2+kc)^{(n+1)+1}}=-c_{n+1}.$$

结合式(3.8)，$f_4(y)$有如下的级数展开式：

$$f_4(y)=f_4(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_4^{(n)}(0)}{n!}y^n=-\sum_{n=0}^{\infty}c_{n+1}y^n=-\sum_{n=1}^{\infty}c_ny^{n-1} \tag{3.9}$$

由式(3.9)，可直接证得等式(2.3)。

## 基金项目

浙江省教育厅科研基金项目(Y201635387)，浙江机电职业技术学院科研项目(A027117021)，浙江机电职业技术学院课堂教学改革项目(A015219393)，浙江省高等学校访问学者项目(FX2018093)。

## 参考文献

[1] Abramwitz, M. and Stegun, I.A. (1965) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Dover Publications, New York, 253-294.

[2] Qiu, S.L. and Vuorinen, M. (2005) Special Functions in Geometric Function Theory. In: Kühnau, R., Ed., *Handbook of Complex Analysis*: *Geometric Function Theory*, Elsevier, Amsterdam, 621-659. https://doi.org/10.1016/S1874-5709(05)80018-6

[3] Anderson, G.D., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (1997) Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps. John Wiley & Sons, New York, 32-47.

[4] Qiu, S.L. and Vuorinen, M. (2005) Some Properties of the Gamma and Psi Functions with Applications. *Mathematics of Computation*, **74**, 723-742. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-04-01675-8

[5] Anderson, G.D., Barnard, R.W., Richards, K.C., Vamanamurthy, M.K. and Vuorinen, M. (1995) Inequalities for Ze-

ro-Balanced Hypergeometric Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **347**, 1713-1723. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1995-1264800-3

[6] Qiu, S.L. and Feng, B.P. (2007) Some Properties of the Ramanujan Constant. *Journal of Hangzhou Dianzi University*, **27**, 88-91.

[7] Zhou, P.G., Qiu, S.L., Tu, G.Y., *et al*. (2010) Some Properties of the Ramanujan Constant. *Journal of Zhejiang Sci-Tech University*, **27**, 835-841.

[8] Wang, M.K., Chu, Y.M. and Qiu, S.L. (2015) Sharp Bounds for Generalized Elliptic Integrals of the First Kind. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **429**, 744-757.