Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(8), 857-863
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.98112

Hans汉斯

State-Field Correspondences and Conformal Super-Algebras

Minxu Zhai, Xiandong Wang

College of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1193872663@qq.com

Received: Sep. 16th, 2019; accepted: Oct. 4th, 2019; published: Oct. 11th, 2019

Abstract

In the present paper, the concept of a conformal super-algebra is introduced and its relationship with a state-field correspondence is given. The locality is defined for any two Laurent-series with well-defined coefficients and some examples are discussed. In particular, the Loop state-field correspondence is constructed and some properties are obtained.

Keywords

State-Field Correspondence, Locality, Conformal Super-Algebra, Vertex Algebra

态场对应与共形超代数

翟敏序，王宪栋

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 1193872663@qq.com

收稿日期：2019年9月16日；录用日期：2019年10月4日；发布日期：2019年10月11日

摘　要

给出了共形超代数的概念并研究它与态场对应之间的关系；推广了有关Laurent-幂级数局部性的概念并给出它的具体实例。特别，用张量积的方法构造了Loop-态场对应，并研究了其局部性质。

关键词

态场对应，局部性，共形超代数，顶点代数

文章引用: 翟敏序, 王宪栋. 态场对应与共形超代数[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 857-863.
DOI: 10.12677/pm.2019.98112

1. 引言

顶点算子与顶点代数的雏形起源于上世纪 60 年代理论物理学中关于弦论的讨论，它是研究二维共形场论及统计力学的适用代数模型。作为一种公理化的代数结构，它带有无限多个非结合的双线性运算，并满足若干比较复杂的运算规则，这个纯代数概念的形成主要基于 R.E. Borcherds 的工作[1]。

顶点代数的研究与李理论的讨论密切相关，在某种意义下它可以看成是李理论的延伸与拓广。顶点代数与 Virasoro-代数表示的结合导致了顶点算子代数概念的产生，其主要例子包括 Virasoro-顶点算子代数、Heisenberg-顶点算子代数、仿射顶点算子代数及格顶点算子代数等等。目前，关于顶点算子代数及其相关理论的讨论已经成为代数学研究的活跃课题之一，参见文献[2] [3] [4] [5] [6]。

弱化顶点代数定义中的某些公理可以得到一些相关的代数结构，它们自然是顶点代数概念的推广。在 2002 年初，B. Bakalov 和 V.G. Kac 给出了场代数的概念，并讨论了场代数与顶点代数的关系[7]。作为这些相关讨论的准备，文献[7]还引入了更一般的态场对应的概念，并初步描述了它的一些特性。

本文的主要内容：在文献[7]已有结论的基础上，讨论态场对应的进一步性质，给出相关的共形超代数的概念，它可以看成是李共形超代数概念的某种推广[8] [9]。另外，通过张量积方法构造相应的 Loop-态场对应，描述其结构，并讨论涉及局部性的一些基本问题。本文假定 F 是一个特征为零的代数闭域或复数域，所有向量空间及代数都是指域 F 上的，讨论中用到的基本术语和符号可以参考文献[7] [10]。

2. 态场对应的预备知识

首先采用文献[7]的基本术语，给出态场对应的概念如下

定义 2.1 域 F 上的态场对应是一个四元组 $(V,Y,|0\rangle,T)$，其中 V 是 F 上的一个向量超空间，$|0\rangle$ 是 V 的非零偶向量，也称其为 V 的真空向量，$T\in EndV$ 是阶化的自同态；Y 是一个阶化的线性映射：

$$V\to glf(V),\ \ a\mapsto Y(a,z)=\sum_{n\in Z}a_{(n)}z^{-n-1},$$

这里 $glf(V)$ 是 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 上的所有场构成的向量超空间，它的齐次元素是满足下方截断条件的幂级数：$b(z)=\sum_{n\in Z}b_{(n)}z^{-n-1}$，$b_{(n)}\in EndV\ (\forall n\in Z)$ 有相同的奇偶性，且对任意的向量 $v\in V$，有 $b_{(n)}v=0$，$n\gg 0$。

最后，还要求满足下列两个相容性条件：

真空性：$Y(|0\rangle,z)=I_V$，$Y(a,z)|0\rangle=a+T(a)z+\cdots\in V[[z]]$，其中符号 I_V 表示向量超空间的恒等映射，元素 $a\in V$；

平移不变性：$[T,Y(a,z)]=Y(T(a),z)=\partial_z Y(a,z)$，$\forall a\in V$。

注记 2.3 利用上述平移不变性(2)，容易推出下列等式成立：

$$T(a_{(n)}b)=(Ta)_{(n)}b+a_{(n)}(Tb),\ \ (Ta)_{(n)}=-na_{(n-1)},\ \ \forall a,b\in V.$$

引理 2.3 设 $(V,Y,|0\rangle,T)$ 是域 F 上的态场对应，定义线性映射 Y^{op} 如下：

$$Y^{op}:V\to glf(V),a\mapsto Y^{op}(a,z)=(-1)^{p(a)p(b)}\mathrm{e}^{zT}Y(b,-z)a$$

其中 $p(x)$ 表示齐次元素 $x\in V$ 的次数，则 $(V,Y^{op},|0\rangle,T)$ 也是域 F 上的一个态场对应，并且有等式：$(Y^{op})^{op}=Y$。

证明 这本质上是参考文献[7]中命题 1.8 的结论。

3. 共形超代数

下面给出的概念可以看成李共形超代数概念的自然推广。

定义 3.1 (共形超代数)设 R 是一个 $\mathrm{Z}/(2)$-阶化的 $F[\partial]$-模，并带有双线性映射 $[.\lambda.]$：$R\times R\to R[\lambda]$，称其为 λ-括积，如果满足下列条件：

$$[\partial a_\lambda b]=-\lambda[a_\lambda b],\ [a_\lambda \partial b]=(\partial+\lambda)[a_\lambda b],$$

其中元素 $a,b\in R$，符号 λ 可以看成是形式变量，算子 ∂ 在向量超空间 R 上的线性作用是阶化的，也称 ∂ 为平移算子。

带有 λ-括积的 $\mathrm{Z}/(2)$-阶化 $F[\partial]$-模 R，称为域 F 上的一个共形超代数。此时，对元素 $a,b\in R$，$[a_\lambda b]=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}a_{(j)}b$ 是关于变量 λ 的多项式，(j) 也可以看成向量超空间 R 上的一个双线性运算，且 $a_{(j)}b\geq 0$，$j\gg 0$。

引理 3.2 设 $(R,[.\lambda.])$ 是域 F 上的共形超代数，定义双线性映射

$$[.\lambda.]^{op}:R\times R\to R[\lambda],(a,b)\mapsto[a_\lambda b]^{op},$$

使得 $[a_\lambda b]^{op}=-(-1)^{p(a)p(b)}[b_{-\lambda-\partial}\alpha]$，这里 $a,b\in R$ 是齐次元素，则 $(R,[.\lambda.]^{op})$ 也是域 F 上的共形超代数，称其为 $(R,[.\lambda.])$ 的反共形超代数。

证明 由定义不难直接验证，引理结论成立。

引理 3.3 设 $(V,Y,|0\rangle)$ 是任意给定的态场对应，$(V,Y^{op},|0\rangle)$ 相应的反态场对应。对 V 的任意齐次元素 u,v，令

$$[u_\lambda v]=Res_z\mathrm{e}^{\lambda z}Y(u,z)v,$$

$$[u_\lambda v]^{op}=Res_z\mathrm{e}^{\lambda z}Y^{op}(u,z)v,$$

经线性扩充得到双线性映射 $[.\lambda.]$，$[.\lambda.]^{op}:R\times R\to R[\lambda]$，则 $(V,[.\lambda.])$ 是共形超代数，且 $(V,[.\lambda.]^{op})$ 是相应的反共形超代数。

证明 只需证明关于 λ-括积 $[\lambda]$ 的结论，关于 $[.\lambda.]^{op}$ 的结论的证明是类似的。令 $\partial=T$，从而有下列所要求的等式

$$\begin{aligned}[\partial u_\lambda v]&=Res_z\mathrm{e}^{\lambda z}Y(\partial u,z)v\\&=-\lambda Res_z\mathrm{e}^{\lambda z}Y(u,z)v,\\&=-\lambda[u_\lambda v]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[u_\lambda \partial v]&=Res_z\mathrm{e}^{\lambda z}Y(u,z)\partial v\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}u_{(n)}\partial v\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\partial\left(u_{(n)}v\right)+nu_{(n-1)}v\right)\\&=(\partial+\lambda)[u_\lambda v]\end{aligned}.$$

引理 3.4 设 R 是域 F 上的共形超代数，带有平移算子 ∂，构造向量超空间的张量积 $\tilde{R}$ 及相应的算子

T 如下：

$$\tilde{R}=R\otimes F\left[t,t^{-1}\right]=R\left[t,t^{-1}\right],\ \ T=\partial\otimes 1+1\otimes\partial_t,$$

对单项式元素 $at^m,bt^n\in\tilde{R}$， $a,b\in R$ 及 $m,n\in Z$，定义它们的括积

$$\left[at^m,bt^n\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j}.$$

这里 $a_{(j)}b$ 是共形超代数 R 中的 (j)-运算， $j\geq 0$。通过线性扩充，上述等式在向量超空间 $\tilde{R}$ 上定义了一个双线性运算，使其成为一个非结合超代数，并且子空间 $T\tilde{R}$ 是它的一个双边齐次理想。

证明 子空间 $T\tilde{R}$ 有齐次张成元：$(\partial a)t^m+mat^{m-1}$， $\forall m\in Z$，这里 $a\in R$ 是齐次元素。从而由下面的计算结果可知，$T\tilde{R}$ 是一个双边齐次理想。

$$\begin{aligned}
&\left[(\partial a)t^m+mat^{m-1},bt^n\right]\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left((\partial a)_{(j)}b\right)t^{m+n-j}+m\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m-1}{j}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}\\
&=-\sum_{j=1}^{\infty}j\binom{m}{j}\left(a_{(j-1)}b\right)t^{m+n-j}+m\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m-1}{j}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}\\
&=-\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\binom{m}{j+1}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}+\sum_{j=0}^{\infty}m\binom{m-1}{j}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}\\
&=0
\end{aligned}$$

这里用到：$(j+1)\binom{m}{j+1}=m\binom{m-1}{j}$，$(\partial a)_{(j)}=(-j)a_{(j-1)}$。

$$\begin{aligned}
&\left[at^m,(\partial b)t^n+nbt^{n-1}\right]\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}\partial b\right)t^{m+n-j}+n\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\partial\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j}+\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}j\left(a_{(j-1)}b\right)t^{m+n-j}+n\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(\partial\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j}+(m+n-j)\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}\right)\\
&\quad-\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}(m+n-j)\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}+\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}j\left(a_{(j-1)}b\right)t^{m+n-j}+n\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)t^{m+n-j-1}
\end{aligned}.$$

在上述最后的表达式中，第 1 个和式含于子空间 $T\tilde{R}$，而后 3 个和式之和为零。

引理 3.5 术语如上，在非结合超代数 $\tilde{R}/T\tilde{R}$ 中，用符号 $a_{(m)}$ 表示元素 at^m 所在的等价类，则有下列诱导括积的表达式：

$$\left[a_{(m)},b_{(n)}\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)_{(m+n-j)}.$$

此时，还有等式：$\left[a_{(m)},b_{(n)}\right]=-(-1)^{p(a)p(b)}\left[b_{(n)},a_{(m)}\right]^{op}$，这里 a,b 是 R 的齐次元素，$[.,.]^{op}$ 是由运算 $[.\lambda.]^{op}$ 导出的括积运算。

证明 根据共形超代数 R 中的反 λ-括积 $[.\lambda.]^{op}$ 的定义，不难看出：

$$\left[b_\lambda a\right]=-(-1)^{p(a)p(b)}\left[a_{(-\lambda-\partial)}b\right]^{op},$$

等式两边展开，可以得到下面的一系列式子：

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}b_{(j)}a&=-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}(\lambda+\partial)^m a_{(m)}b\\&=-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^m}{m!}\binom{m}{k}\lambda^{m-k}\partial^k\left(a_{(m)}b\right),\\&=-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{k!j!}\lambda^j\partial^k\left(a_{(j+k)}b\right)\end{aligned}$$

$$b_{(j)}a=-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+k}}{k!}\partial^k\left(a_{(j+k)}b\right).$$

从而有如下等式：

$$\begin{aligned}\left[b_{(n)},a_{(m)}\right]&=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n}{j}\left(b_{(j)}a\right)_{(m+n-j)}\\&=-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{j+k}}{k!}\left(\partial^k\left(a_{(j+k)}b\right)\right)_{(m+n-j)}\\&=-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{j}(-1)^j\binom{m+n-j}{k}\left(a_{(j+k)}b\right)_{(m+n-j-k)}\\&=-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{r-k}(-1)^{r+k}\binom{m+n-r+k}{k}\left(a_{(r)}b\right)_{(m+n-r)}\end{aligned}.$$

再利用下述注记 3.6，有等式

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{r-k}(-1)^{r+k}\binom{m+n-r+k}{k}\\&=(-1)^r\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{r-k}(-1)^k\binom{m+n-r+k}{k}\\&=(-1)^r\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{r-k}\binom{-m-n+r-1}{k}\\&=(-1)^r\binom{-m+r-1}{r}=\binom{m}{r}\end{aligned}.$$

从而，上述等式可以写成下列形式：

$$-(-1)^{p(a)p(b)}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{m}{r}\left(a_{(r)}b\right)_{(m+n-r)}=-(-1)^{p(a)p(b)}\left[a_{(m)},b_{(n)}\right]^{op}.$$

注记 3.6 对任意 $m,n\in\mathbb{Z}$，有组合等式：$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\binom{m}{j-k}=\binom{n+m}{j}$。

对顶点代数或顶点算子代数的情形，上述引理 3.5 中的括积公式等价于局部性质，见文献[3] [10]等。对态场对应的情形，相应的代数结构是非结合的，需要推广局部性的定义，从而可以得到类似的结论，这就是下面的定理 3.8 及注记 3.9，它也是本文的主要结果。

定义 3.7 设 A 是域 F 上的任意非结合代数，$A[\![z,z^{-1}]\!]$ 是所有 A-值 Laurent-幂级数构成的向量空间，称元素 $a(z),b(z)\in A[\![z,z^{-1}]\!]$ 是相互局部的，如果存在正整数 N，使得下列等式成立：

$$(z-w)^N a(z)b(w)=0.$$

定理 3.8 术语如上，取 $A=\tilde{R}/T\tilde{R}$，它是域 F 上的一个非结合超代数。对齐次元素 $a\in R$，定义 Laurent-幂级数 $Y(a,z)$ 如下

$$Y(a,z)=\sum_{n\in \mathrm{Z}} a_{(n)}z^{-n-1}\in A[\![z,z^{-1}]\!],$$

其中 $a_{(m)}$ 是 at^m 所在的等价类，则 $Y(a,z)$，$Y(b,z)$ 是相互局部的，这里 a，b 是向量超空间 R 中的齐次元素。

证明 利用前面给出的括积公式：$\left[a_{(m)},b_{(n)}\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)_{(m+n-j)}$，不难验证下列等式成立：

$$\left[Y(a,z),Y(b,z)\right]=\sum_{j=0}^{\infty}Y\left(a_{(j)}b,w\right)\frac{\partial_w^j}{j!}\delta(z,w).$$

根据 R 中 λ-括积的定义，对元素 $a,b\in R$，必有 $a_{(j)}b=0$，$j\gg 0$。从而上述和式只包含有限项，再利用 δ-函数的性质，必存在正整数 N，使得

$$(z-w)^N\left[Y(a,z),Y(b,w)\right]=0.$$

注记 3.9 术语如上。设 $T(A)$ 是非结合超代数 A 作为向量超空间的张量代数，定义结合代数 $T(A)$ 的双边理想 I，它由下列齐次元素所生成

$$a_{(m)}\otimes b_{(n)}-(-1)^{p(a)p(b)}b_{(n)}\otimes a_{(m)}-\left[a_{(m)},b_{(n)}\right],$$

其中 $m,n\in \mathrm{Z}$，$a,b\in R$ 是齐次元素。

令 $B=T(A)/I$ 是相应的商代数，它有生成元集：$a_{(n)}+I$，这里 a 是向量超空间 R 的齐次元素，n 是任意整数。把等价类 $a_{(n)}+I$ 简记为 $a_{(n)}$，从而得到下列括积的等式：

$$\left[a_{(m)},b_{(n)}\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m}{j}\left(a_{(j)}b\right)_{(m+n-j)}.$$

结合代数 B 可以看成括积运算下的李代数，并构造它的子代数 g,g_- 如下：

$$g=span\left\{a_{(n)};a\in R_{\bar{0}}\cup R_{\bar{1}},n\in \mathrm{Z}\right\},$$

$$g_-=span\left\{a_{(n)};a\in R_{\bar{0}}\cup R_{\bar{1}},n\geq 0\right\}\subset g.$$

不难看出：作为结合代数 B 的伴随模的商模，向量空间 $V=B/Bg_-$ 有下列形式的单项式基：

$$a^1_{(-m_1)}a^2_{(-m_2)}\cdots a^r_{(-m_r)}\cdot 1,\quad m_1\geq m_2\geq\cdots\geq m_r\geq 1.$$

最后，令 $\Sigma=\left\{a(z)=\sum_{n\in \mathrm{Z}}a_{(n)}z^{-n-1};a\in R_{\bar{0}}\cup R_{\bar{1}}\right\}$，其元素可以自然看成是 $EndV$ -值的 Laurent-幂级数。这些元素还满足下方截断性，且是两两相互局部的，从而子集 Σ 成一个顶点代数。

参考文献

[1] Borcherds, R.E. (1986) Vertex Algebras, Kac-Moody Algebras and the Monster. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **83**, 3068-3071. https://doi.org/10.1073/pnas.83.10.3068

[2] Dong, C. and Lepowsky, J. (1993) Generalized Vertex Algebras and Relative Vertex Operators. Progress in Mathematics, Vol. 112, Birkhauser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0353-7

[3] Lepowsky, J. and Li, H.-S. (2004) Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations. Progress in Mathematics, Vol. 227, Birkhauser, Boston. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8186-9

[4] Frenkel, I.B., Lepowsky, J. and Meurman, A. (1988) Vertex Operator Algebras and the Monster. Pure and Applied Mathematics, Vol. 134, Academic Press, Boston. https://doi.org/10.1142/9789812798411_0010

[5] Frenkel, I.B. and Zhu, Y. (1992) Vertex Operator Algebras Associated to Representations of Affine and Virasoro Algebras. *Duke Mathematical Journal*, **66**, 123-168. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06604-X

[6] Dong, C. and Lin, X. (2014) Unitary Vertex Operator Algebras. *Journal of Algebra*, **397**, 252-277. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.09.007

[7] Bakalov, B. and Kac, V.G. (2003) Field Algebras. *International Mathematics Research Notices*, **3**, 123-159. https://doi.org/10.1155/S1073792803204232

[8] De Sole, A. and Kac, V.G. (2005) Freely Generated Vertex Algebras and Non-Linear Lie Conformal Algebras. *Communications in Mathematical Physics*, **254**, 659-694. https://doi.org/10.1007/s00220-004-1245-x

[9] De Sole, A. and Kac, V.G. (2009) Lie Conformal Algebra Cohomology and the Variational Complex. *Communications in Mathematical Physics*, **292**, 667-719. https://doi.org/10.1007/s00220-009-0886-1

[10] Kac, V.G. (1998) Vertex Algebras for Beginners. University Lecture Series 10, 2nd Edition, American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/ulect/010