Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(8), 916-921
Published Online October 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.98118

Hans汉斯

Uniqueness Problem of Merpmorphic Function Concerning Difference Equation

Bingmao Deng

School of Financial Mathematics and Statics, Guangdong University of Finance, Guangzhou Guangdong
Email: dbmao2012@163.com

Received: Sep. 28th, 2019; accepted: Oct. 15th, 2019; published: Oct. 22nd, 2019

Abstract

This paper studied the uniqueness of a finite order meromorphic solution $f(z)$ of the difference equation $f(z+c)-f(z)=R(z)$ sharing 0, 1, ∞ CM with meromorphic $g(z)$. Our results supplemented and improved the result due to Cui and Chen in 2017.

Keywords

Meromorphic Function, Share Values, Difference Equation

与差分方程相关的唯一性问题

邓炳茂

广东金融学院金融数学与统计学院，广东 广州
Email: dbmao2012@163.com

收稿日期：2019年9月28日；录用日期：2019年10月15日；发布日期：2019年10月22日

摘 要

本文主要研究了差分方程$f(z+c)-f(z)=R(z)$的一个有穷级亚纯函数解$f(z)$与$g(z)$CM分担0，1，∞的唯一性问题，补充并推广了崔宁，陈宗煊等人2017年的结论。

关键词

亚纯函数，分担值，差分方程

文章引用: 邓炳茂. 与差分方程相关的唯一性问题[J]. 理论数学, 2019, 9(8): 916-921.
DOI: 10.12677/pm.2019.98118

1. 引言及主要结果

假设读者熟悉亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的基本内容及相关标准符号(见参考文献[1] [2] [3])。

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是定义在整个复平面上的亚纯函数，a 是一个有穷复数。如果 $f(z)-a$ 与 $g(z)-a$ 有相同的零点(计重数)，则称 $f(z)$ 与 $g(z)$ CM 分担 a。如果 $f(z)$ 与 $g(z)$ 有相同的极点(计重数)，则称 $f(z)$ 与 $g(z)$ CM 分担 ∞。(本中的亚纯函数均指定义在整个复平面上的亚纯函数)。

1929 年，Nevanlinna [4]证明了著名的五值唯一性定理。

定理 1. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数，$a_i\ (i=1,2,3,4,5)$ 是五个相互判别的复数。若 $f(z)$ 与 $g(z)$ CM 分担 $a_i\ (i=1,2,3,4,5)$，则 $f(z)\equiv g(z)$。

亚纯函数的唯一性理论是复分析的一个重要研究部分，随着这一理论的发展，亚纯函数唯一性理论现在也日趋完善，并获得许多有趣的研究成果(见参考文献[5] [6])。近年来，随着差分形式对数导数引理的成功建立，涉及差分与差分方程的唯一性问题成为热点研究课题[7] [8]。

2017 年，崔宁、陈宗煊[9]研究了一类差分方程解 f 与一个亚纯函数 g CM 分担三个值的唯一性问题，他们证明了如下定理。

定理 2. 设 $a_1(z), a_0(z), F(z)$ 是非零多项式，并且满足 $a_1(z)+a_0(z)\not\equiv 0$。设 $f(z)$ 差分方程

$$a_1(z)f(z+1)+a_0(z)f(z)=F(z) \tag{1.1}$$

的有穷级超越亚纯解。如果亚纯函数 $g(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 0，1，∞，那么下列情形之一必发生：

(I) $f(z)\equiv g(z)$；

(II) $f(z)+g(z)\equiv f(z)g(z)$；

(III) 存在一个多项式 $\beta(z)=az+b_0$ 和一个常数 a_0 满足 $\mathrm{e}^{a_0}\neq \mathrm{e}^{b_0}$，使得 $f(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\beta(z)}}{\mathrm{e}^{\beta(z)}\left(\mathrm{e}^{a_0-b_0}-1\right)}$ 与 $f(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\beta(z)}}{1-\mathrm{e}^{b_0-a_0}}$，其中 $a\neq 0$，b_0 为常数。

注意到定理 2 中的条件 $a_1(z)+a_0(z)\not\equiv 0$，自然会问：(1) 当 $a_1(z)+a_0(z)\equiv 0$ 时，是否仍有相关结论？(2) 结论(II)中 $f(z)+g(z)\equiv f(z)g(z)$，是否能确定出 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的具体形式？

对于问题(1)，当 $a_1(z)+a_0(z)\equiv 0$，(1.1)式可改写成

$$f(z+c)-f(z)=R(z) \tag{1.2}$$

其中 $R(z)=F(z)/a_1(z)$ 是一个非零有理函数。

本文研究了以上问题，并获得了以下结论。

定理 3. 设 $R(z)$ 是非零有理函数。设 $f(z)$ 差分方程(1.2)的有穷级超越亚纯解。如果亚纯函数 $g(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 0，1，∞，则有 $f(z)\equiv g(z)$。

另外，针对问题(2)，结合定理 3，本文考虑了定理 2 去掉 $a_1(z)+a_0(z)\not\equiv 0$ 这一条件的情形。

定理 4. 设 $a_1(z), a_0(z), F(z)$ 是非零多项式。设 $f(z)$ 差分方程(1.1)的有穷级超越亚纯解。如果亚纯函数 $g(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 0，1，∞，那么下列情形之一必发生：

(1) $f(z)\equiv g(z)$；

(2) $f(z)=\mathrm{e}^{bz+b_0}+1$，$g(z)=\mathrm{e}^{-bz-b_0}+1$。其中 $\mathrm{e}^{b}\neq 1$，$a_1(z)+a_0(z)\not\equiv 0$。

(3) 存在一个多项式 $\beta(z)=az+b_0$ 和一个常数 a_0 满足 $\mathrm{e}^{a_0}\neq \mathrm{e}^{b_0}$，使得 $f(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\beta(z)}}{\mathrm{e}^{\beta(z)}\left(\mathrm{e}^{a_0-b_0}-1\right)}$ 与 $g(z)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{\beta(z)}}{1-\mathrm{e}^{b_0-a_0}}$，其中 $a\neq 0$，b_0 为常数。

例1. 设 $f(z)=\mathrm{e}^{2z}+1$，$g(z)=\mathrm{e}^{-2z}+1$。则 $f(z)$ 是 $zf(z+1)-\mathrm{e}^{2}zf(z)=\left(1-\mathrm{e}^{2}\right)z$ 的一个有穷级整函数解。显然 $g(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 0，1，∞。这表明定理情形二是存在的。

注：定理 4 证明了定理 2 中的条件 $a_1(z)+a_0(z)\not\equiv 0$ 是可去掉的，并进一步讨论了定理 2 中情形 2 具体解的形式。

2. 一些引理

引理 2.1 ([10])设 $f(z)$ 是一个有穷级亚纯函数，c 是非零常数，则有

$$T\left(r,f\left(z+c\right)\right)=T\left(r,f\right)+S\left(r,f\right)。$$

引理 2.2 ([2]) 设 $f_i(z)(1\leq i\leq n)(n\geq 2)$ 是亚纯函数，$g_i(z)(1\leq i\leq n)(n\geq 2)$ 是整函数，并且满足：

(1) $\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\mathrm{e}^{g_i(z)}\equiv 0$；

(2) 对任意的 $1\leq i\leq n$，$1\leq k<l\leq n$ 时，均有

$$T\left(r,f_j\right)=S\left(r,\mathrm{e}^{g_h-g_l}\right)，\quad r\to\infty，\quad r\notin E，$$

其中 $E\subset(1,\infty)$ 是对数测度有穷的集合.

则 $f_i(z)\equiv 0(1\leq i\leq n)$。

引理 2.3 ([9])设 $f(z)$ 是有穷级亚纯函数，$g(z)$ 是亚纯函数。如果 $g(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 0，1，∞，则 $g(z)$ 也是有穷级亚纯函数，并且 $T(r,g)=O\left(T(r,f)\right)+S(r,f)$。

3. 定理 3 的证明

由 $f(z)$ 与 $g(z)$ CM 分担 0，1，∞，结合引理 2.3 可得，存在多项式 $\alpha(z)$，$\beta(z)$，使得下式成立：

$$\frac{g(z)}{f(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z)}，\quad \frac{g(z)-1}{f(z)-1}=\mathrm{e}^{\beta(z)}。\tag{3.1}$$

若 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\equiv \mathrm{e}^{\beta(z)}$，从(3.1)式，易得 $f(z)\equiv g(z)$。以下讨论 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\not\equiv \mathrm{e}^{\beta(z)}$ 的情形。

由(3.1)式，以及 $\mathrm{e}^{\alpha(z)}\not\equiv \mathrm{e}^{\beta(z)}$，可解得

$$f(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{\beta(z)}}{\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{\beta(z)}}。\tag{3.2}$$

将(3.2)式代入(1.2)式，可得

$$A_1\mathrm{e}^{\alpha+\beta}+A_2\mathrm{e}^{2\beta}+A_3\mathrm{e}^{2\alpha}+A_4\mathrm{e}^{\alpha}+A_5\mathrm{e}^{\beta}\equiv 0。\tag{3.3}$$

其中 $A_1=(R-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}+(R+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}$，$A_2=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}$，$A_3=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}$，$A_4=1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}$，$A_5=\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-1$。

以下分四种情形讨论。

情形 1. $\deg\alpha>\deg\beta$。则(3.3)式可改写成

$$B_2 e^{2\alpha} + B_1 e^{\alpha} + B_0 \equiv 0, \tag{3.4}$$

其中

$$\begin{cases} B_2 = -R \cdot e^{\Delta_c \alpha}; \\ B_1 = \left[(R-1) e^{\Delta_c \beta} + (R+1) e^{\Delta_c \alpha} \right] e^{\beta} + \left(1 - e^{\Delta_c \alpha} \right); \\ B_0 = \left(e^{\Delta_c \beta} - 1 \right) e^{\beta} - R \cdot e^{\Delta_c \beta} e^{2\beta}. \end{cases}$$

对任意的 $0 \le i \le 2$，显然有 $T(r, B_i) = S(r, e^{\alpha})$。因此，由(3.4)式及引理 2.2 可得 $B_2 = -R \cdot e^{\Delta_c \alpha} \equiv 0$，从而有 $R \equiv 0$，这与 R 是非零有理函数相矛盾。

情形 2. $\deg \alpha < \deg \beta$。则(3.3)式可改写成

$$C_2 e^{2\beta} + C_1 e^{\beta} + C_0 \equiv 0, \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{cases} C_2 = -R \cdot e^{\Delta_c \beta}; \\ C_1 = \left[(R-1) e^{\Delta_c \beta} + (R+1) e^{\Delta_c \alpha} \right] e^{\alpha} + \left(e^{\Delta_c \beta} - 1 \right); \\ C_0 = \left(1 - e^{\Delta_c \alpha} \right) e^{\alpha} - R \cdot e^{\Delta_c \alpha} e^{2\alpha}. \end{cases}$$

对任意的 $0 \le i \le 2$，显然有 $T(r, C_i) = S(r, e^{\beta})$。因此，由(3.5)式及引理 2.2 可得 $C_2 = -R \cdot e^{\Delta_c \beta} \equiv 0$，从而有 $R \equiv 0$，这与 R 是非零有理函数相矛盾。

情形 3. $\deg \alpha = \deg \beta \ge 1$。分四种子情形讨论。

情形 3.1. $\deg(\alpha - \beta) = \deg(2\alpha - \beta) = \deg(2\beta - \alpha) = \deg \alpha$。则(3.3)式可改写为

$$A_1 e^{F_1} + A_2 e^{F_2} + A_3 e^{F_3} + A_4 e^{F_4} + A_5 e^{F_5} \equiv 0。\tag{3.6}$$

其中 $A_1 = (R-1) e^{\Delta_c \beta} + (R+1) e^{\Delta_c \alpha}$，$A_2 = -R \cdot e^{\Delta_c \beta}$，$A_3 = -R \cdot e^{\Delta_c \alpha}$，$A_4 = 1 - e^{\Delta_c \alpha}$，$A_5 = e^{\Delta_c \beta} - 1$，$F_1 = \alpha + \beta$，$F_2 = 2\beta$，$F_3 = 2\alpha$，$F_4 = \alpha$，$F_5 = \beta$。显然，对任意的 $1 \le i \le 5$，$1 \le h < l \le 5$，均有 $T(r, A_i) = S\left(r, e^{F_h - F_l}\right) = S(r, e^{\alpha})$。因此，由引理 2.2 可得，$A_2 = -R \cdot e^{\Delta_c \beta} \equiv 0$，从而有 $R \equiv 0$，这与 R 是非零有理函数相矛盾。

情形 3.2. $\deg(\alpha - \beta) < \deg \alpha$。令 $\alpha - \beta = p_1$，则 $\alpha = \beta + p_1$，因此(3.3)式可改写成

$$D_2 e^{2\beta} + D_1 e^{\beta} \equiv 0, \tag{3.7}$$

其中 $D_2 = \left((R-1) e^{\Delta_c \beta} + (R+1) e^{\Delta_c \alpha} \right) e^{p_1} - R \cdot e^{\Delta_c \beta} - R \cdot e^{\Delta_c \alpha} e^{2 p_1}$，$D_1 = \left(1 - e^{\Delta_c \alpha} \right) e^{p_1} + e^{\Delta_c \beta} - 1$。显然，对任意的 $1 \le i \le 2$，均有 $T(r, D_i) = S(r, e^{\beta})$。由引理 2.2 可得，$D_2 \equiv D_1 \equiv 0$。

由 $\deg \alpha = \deg \beta \ge 1$，显然 $\deg \Delta_c \alpha = \deg \Delta_c \beta = \deg \alpha - 1$，可得 $\deg p_1 \le \deg \Delta_c \alpha = \deg \Delta_c \beta$。

情形 3.2.1. $\deg(\Delta_c \alpha + p_1) < \deg p_1$。则显然 $\deg p_1 = \deg \Delta_c \alpha \ge 1$，由 $D_1 \equiv 0$ 结合引理 2.2，易得 $e^{\Delta_c \alpha + p_1} + 1 \equiv 0$，且 $e^{p_1} + e^{\Delta_c \beta} \equiv 0$，即得 $e^{p_1} = -e^{-\Delta_c \alpha} = -e^{\Delta_c \beta}$。将此式代入 $D_2 \equiv 0$，可得

$$D_2 = -(R-1) e^{2\Delta_c \beta} - (R+1) - 2R \cdot e^{\Delta_c \beta} \equiv 0。\tag{3.8}$$

由 $\deg \Delta_c \beta = \deg \Delta_c \alpha \ge 1$，$R$ 是有理函数，以及引理 2.2，可得 $R \equiv 0$，这与 R 是非零有理函数相矛盾。

情形 3.2.2. $\deg(\Delta_c \alpha + p_1) > \deg p_1$。则显然有 $\deg \Delta_c \alpha = \deg \Delta_c \beta > \deg p_1 \ge 0$，则由 $D_1 \equiv 0$ 结合引理 2.2，易得 $e^{p_1} \equiv 1$，即 $e^{p_1} = e^{\alpha - \beta} = 1$，从而有 $e^{\alpha} \equiv e^{\beta}$，这与假设 $e^{\alpha} \equiv e^{\beta}$，矛盾。

情形 3.2.3. $\deg(\Delta_c \alpha + p_1) = \deg p_1 \ge 1$。则显然 $\deg p_1 = \deg \Delta_c \alpha \ge 1$，以及 $\deg(\Delta_c \alpha - \Delta_c \beta) = \deg \Delta_c p_1$。当 $\deg(p_1 - \Delta_c \beta) = \deg p_1$ 时，由 $D_1 \equiv 0$ 结合引理 2.2，可得 $-1 = 0$，矛盾。因此 $\deg(p_1 - \Delta_c \beta) < \deg p_1$。

令 $p_1-\Delta_c\beta=p_{11}$，则 $D_1=\left(1-\mathrm{e}^{-p_{11}}\right)\mathrm{e}^{p_1}-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha+p_1}-1\equiv 0$。由引理 2.2，可得 $-1=0$，矛盾。

情形 3.2.4. $\deg\left(\Delta_c\alpha+p_1\right)=\deg p_1=0$。则显 $\deg\Delta_c\alpha=\deg\Delta_c\beta=0$。即 α，β 是一次多项式，结合 $\deg(\alpha-\beta)<\deg\alpha$，不妨设 $\alpha(z)=a_1z+a_0$，$\beta(z)=a_1z+b_0$，其中 $a_1\neq 0$，$\mathrm{e}^{a_0}\neq\mathrm{e}^{b_0}$ 是常数。此式代入(3.2)式，可得

$$f(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{a_1z+b_0}}{\mathrm{e}^{a_1z+a_0}-\mathrm{e}^{a_1z+b_0}}=\frac{1-\mathrm{e}^{\beta(z)}}{\mathrm{e}^{\beta(z)}\left(\mathrm{e}^{a_0-b_0}-1\right)}。$$

再将上式代入(1.2)式并化简，可得

$$R(z)\left(\mathrm{e}^{a_0-b_0}-1\right)+\left(\mathrm{e}^{a_1c}-1\right)\mathrm{e}^{\beta(z)}\equiv 0。$$

结合引理 2.2，可得 $R(z)\left(\mathrm{e}^{a_0-b_0}-1\right)\equiv 0$，从而 $R(z)\equiv 0$，或者 $\mathrm{e}^{a_0-b_0}\equiv 1$，矛盾。

情形 3.3. $\deg(2\alpha-\beta)<\deg\alpha$。则令 $2\alpha-\beta=-p_2$，从而(3.3)式可改写成

$$G_4\mathrm{e}^{4\alpha}+G_3\mathrm{e}^{3\alpha}+G_2\mathrm{e}^{2\alpha}+G_1\mathrm{e}^{\alpha}\equiv 0, \tag{3.9}$$

其中 $G_4=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}\mathrm{e}^{2p_2}$，$G_3=\left((R-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}+(R+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}\right)\mathrm{e}^{p_2}$，$G_2=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}+\left(\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-1\right)\mathrm{e}^{p_2}$，$G_1=1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}$。显然，对任意的 $1\leq i\leq 4$，$T(r,G_i)=S\left(r,\mathrm{e}^{\alpha}\right)$，由引理 2.2 可得 $G_4=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}\mathrm{e}^{2p_2}\equiv 0$，这与 R 是非零有理函数相矛盾.

情形 3.4. $\deg(2\beta-\alpha)<\deg\alpha$。则令 $2\beta-\alpha=-p_3$，从而(3.3)式可改写成

$$H_4\mathrm{e}^{4\beta}+H_3\mathrm{e}^{3\beta}+H_2\mathrm{e}^{2\beta}+H_1\mathrm{e}^{\beta}\equiv 0, \tag{3.10}$$

其中 $H_4=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}\mathrm{e}^{2p_3}$，$H_3=\left((R-1)\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}+(R+1)\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}\right)\mathrm{e}^{p_3}$，$H_2=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}+\left(1-\mathrm{e}^{\Delta_c\alpha}\right)\mathrm{e}^{p_3}$，$H_1=\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}-1$。显然，对任意的 $1\leq i\leq 4$，$T(r,H_i)=S\left(r,\mathrm{e}^{\beta}\right)$，由引理 2.2 可得 $H_4=-R\cdot\mathrm{e}^{\Delta_c\beta}\mathrm{e}^{2p_3}\equiv 0$，这与 R 是非零有理函数相矛盾。

情形 4. $\deg\alpha=\deg\beta=0$。则由(3.2)式知，$f(z)$ 为常数，这与 $f(z)$ 是超越亚纯函数相矛盾。

综上所述，定理 3 得证。

4. 定理 4 的证明

定理 3 说明定理 2 对于条件“$a_1(z)+a_0(z)\equiv 0,(a_i\neq 0,i=0,1)$”，必有 $f(z)\equiv g(z)$，即且当“$a_1(z)+a_0(z)\equiv 0,(a_i\neq 0,i=0,1)$”时，定理 2 中的第二、三种情形不会出现。而当“$a_1(z)+a_0(z)\not\equiv 0$”时，定理 2 中的第二种情形是在“$\beta=2\alpha$，$\deg\alpha\geq 1$”这一条件下获得的(见[9]第 19 页)。而当 $\beta=2\alpha$，代入(3.2)式可得

$$f(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{2\alpha(z)}}{\mathrm{e}^{\alpha(z)}-\mathrm{e}^{2\alpha(z)}}=\mathrm{e}^{-\alpha(z)}+1。 \tag{4.1}$$

将(4.1)式代入(1.1)式，可得

$$\left(a_1(z)\mathrm{e}^{-\Delta_1\alpha(z)}+a_0(z)\right)\mathrm{e}^{-\alpha(z)}+a_1(z)+a_0(z)-F(z)=0。 \tag{4.2}$$

由(4.2)式，结合引理 2.2，可得 $a_1(z)\mathrm{e}^{-\Delta_c\alpha(z)}+a_0(z)\equiv 0$，且 $a_1(z)+a_0(z)-F(z)\equiv 0$。由于 $a_1(z)$，$a_0(z)$，$F(z)$ 是非零多项式，可得 $\mathrm{e}^{-\Delta_1\alpha(z)}$ 是常数，即得 $\alpha(z)=az+a_0$，由 $a_1(z)+a_0(z)\not\equiv 0$，可得，$\mathrm{e}^{a}\neq 1$。因此，定理 2 中的第二种情形，可进一步确定为：存在 $\alpha(z)=az+a_0$，其中 $\mathrm{e}^{a}\neq 1$，使得 $f(z)=\mathrm{e}^{-\alpha(z)}+1$，$g(z)=\mathrm{e}^{\alpha(z)}+1$。并且方程(1.1)的系数满足 $a_1(z)\mathrm{e}^{-a}+a_0(z)\equiv 0$，且有 $a_1(z)+a_0(z)-F(z)\equiv 0$。

综合以上讨论，结合定理 2，定理 3，可得定理 4。

基金项目

国家自然科学基金青年资助项目(11901119，11701188)；广东教育厅科研项目(2017KTECX130)。

参考文献

[1] 杨乐. 值分布及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982: 5-13.

[2] Yang, C.C. and Yi, H.X. (2003) Uniqueness Theory of Meromorphic Functions. Science Press, Beijing, 1-13.

[3] Hayman, W.K. (1964) Mermorphic Functions. Clarendon Press, Oxford, 4-10.

[4] Nevanlinna, R. (1929) Théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Gauthier-Villars, Paris. https://doi.org/10.1007/BF02592680

[5] Li, Y.H. and Qiao, J.Y. (2000) The Uniqueness of Meromorphic Functions Concerning Small Functions. *Science in China*, *Series A*, **43**, 581-590. https://doi.org/10.1007/BF02908769

[6] Li, P. and Yang, C.C. (2001) Uniqueness Theorems on Entire Functions and Their Derivatives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **253**, 50-57. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7007

[7] Chen, Z.X. and Yi, H.X. (2013) On Sharing Values of Meromorphic Functions and Their Differences. *Results in Mathematics*, **63**, 557-565.

[8] Heittokangas, J., Korhonen, R., Laine, I., Rieppo, J. and Zhang, J.L. (2009) Value Sharing Results for Shifts of Meromorphic Functions, and Sufficient Conditions for Periodicity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **355**, 352-363. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.053

[9] 崔宁, 陈宗煊. 一类线性差分方程的亚纯解与一个亚纯函数分担 3 个值的唯一性[J]. 数学年刊, 2017，38A(1): 13-22.

[10] Chiang, Y.M. and Feng, S.J. (2008) On the Nevanlinna Characteristic of $f(z+\eta)$ and Difference Equations in the Complex Plane. *The Ramanujan Journal*, **16**, 105-129. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9101-1