Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(9), 989-997
Published Online November 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.99125

Hans汉斯

A Classification on a Class of Vertex Quasiprimitive and Bi-Quasiprimitive Cubic Symmetric Graphs

Junjie Huang

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 1281823822@qq.com

Received: Oct. 9th, 2019; accepted: Oct. 30th, 2019; published: Nov. 6th, 2019

Abstract

Let Γ be a graph and $G \le \mathrm{Aut}\Gamma$. Then Γ is called a *G*-basic graph, if *G* is quasiprimitive or bi-quasiprimitive on vertex set $V\Gamma$. In this paper, we classify cubic symmetric *G*-basic graphs of order $2p^m q^n$, where $p < q$ are primes, and $m, n \ge 1$.

Keywords

Symmetric Graph, Quasiprimitive Group, Bi-Quasiprimitive Group, Almost Simple Group

某类顶点拟本原和二部拟本原的3度对称图的分类

黄俊杰

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明
Email: 1281823822@qq.com

收稿日期：2019年10月9日；录用日期：2019年10月30日；发布日期：2019年11月6日

摘 要

设Γ是一个图，$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$，则称Γ是一个*G*-基图，如果*G*在顶点集$V\Gamma$上是拟本原的或者二部拟本原的。在这篇文章中，我们将分类阶为$2p^m q^n$的3度对称*G*-基图，其中$p < q$为素数，$m, n \ge 1$。

文章引用：黄俊杰. 某类顶点拟本原和二部拟本原的 3 度对称图的分类[J]. 理论数学, 2019, 9(9): 989-997.
DOI: 10.12677/pm.2019.99125

关键词

对称图，拟本原群，二部拟本原群，几乎单群

1. 引言

对于一个图Γ，我们设$V\Gamma$，$E\Gamma$和$A\Gamma$分别表示Γ的顶点集，边集和弧集，$\mathrm{Aut}\Gamma$表示Γ的全自同构群；$|V\Gamma|$称为图Γ的阶。如果群$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$作用在$V\Gamma$，$E\Gamma$或$A\Gamma$上传递，则分别称Γ为G-点传递图，G-边传递图或G-弧传递图。特别地，弧传递图也称为对称图。对任意的$u \in V\Gamma$，定义$\Gamma(u)=\{u \in V\Gamma \mid \{u,v\} \in E\Gamma\}$为点$u$的邻域，称$|\Gamma(u)|$为点$u$的度数，记为$\mathrm{val}(u)$。如果对任意的$u,v \in V\Gamma$，$u$和$v$的度数相等，则称$\Gamma$为正则图，$|\Gamma(u)|$为图$\Gamma$的度数，记作$\mathrm{val}(\Gamma)=\mathrm{val}(u)$。给定一个正整数$s$和$V\Gamma$上的$s+1$个点$u_0,u_1,\cdots,u_s$，称$(u_0,u_1,\cdots,u_s)$是一条$s$-弧，如果$u_{i-1} \ne u_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,s-1)$，且u_{j-1}和u_j $(j=1,2,\cdots,s)$是邻接的。若$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$在Γ的s-弧集上传递，则称Γ为(G,s)-弧传递图；如果Γ是(G,s)-弧传递图但不是$(G,s+1)$-弧传递图，则称Γ为(G,s)-传递图。特别地，一个$(\mathrm{Aut}\Gamma,s)$-传递图可简单的称为s-传递图。

在代数图论中，阶数特定的对称图受到了国内外学者的广泛关注。例如：文献([1])给出了不大于768个点的三度图的分类。设p,q为素数，在文献([2] [3] [4])中，作者分别分类了p，$2p$，$3p$阶的对称图；之后，Praeger等在([5])和([6])中分别将其推广到pq阶的对称图。1947年，Tutte在文献([7])中确定了3度图的点稳定子群的结构，在此之后的几十年里，3度对称图引起了大量学者的研究，他们给出了3度对称图的各种构造方法及其分类。例如，Du和Wang在文献([8])中考虑了单群$\mathrm{PSL}(2,r)$上的3度Cayley图，其中r为一个素数的方幂；Feng等在([9])中分类了阶为$8p$和$8p^2$的3度对称图；Zhou和Feng在([10])中对$2pq$阶的3度对称图进行了分类。

设$X \le \mathrm{Sym}(\Omega)$是一个传递置换群，则称$X$是拟本原的，如果$X$的每个极小正规子群都在$\Omega$上传递；称$X$是二部拟本原的，如果$X$的每个极小正规子群在$\Omega$上至多有两个轨道并且存在一个极小正规子群作用在$\Omega$上恰有两个轨道。给定一个图$\Gamma$，$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$，称$\Gamma$是一个$G$-基图，如果$G$在顶点集$V\Gamma$上是拟本原的或者二部拟本原的。研究对称图的一般分为以下两步：

第一步，研究对称图的基图；

第二步，刻画对称图的基图的正规覆盖。

基图的分类是研究对称图的基础，它不仅可以为学习对称图提供一些图例，而且对于后续研究基图的覆盖有着重要的参考作用。设Γ是一个阶为$2p^mq^n$的3度对称图，本文将分类Γ的G-基图，其中$p<q$为素数，$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$，$m,n \ge 1$，所得主要结论如下：

定理1.1：设$p<q$为素数，Γ是一个阶为$2p^mq^n$的3度G-基对称图，其中$G \le \mathrm{Aut}\Gamma$，$m,n \ge 1$，则Γ满足表1。

2. 预备知识

本文所考虑的所有图均为有限的、非空的、无向的、连通的、以及没有圈和重边的正则图。关于本文所使用的群论和图论的符号和基本概念都是标准的，可以参看学者们的著作([11] [12] [13] [14])等。例如：

Table 1. 3 degree G-based symmetry diagram of order $2p^m q^n$
表 1. 阶为 $2p^m q^n$ 的 3 度 G-基对称图

Γ	$\mathrm{Aut}\Gamma$	(G,G_α)	Γ	$\mathrm{Aut}\Gamma$	(G,G_α)
$\mathcal{G}_{20}^1$	S_5	$(A_5,\mathbb{Z}_3)$	$\mathcal{G}_{20}^2$	$S_5\times\mathbb{Z}_2$	(S_5,S_3)
NC_{30}	$S_6.\mathbb{Z}_2$	$(S_6.\mathbb{Z}_2,S_4\times S_2)$	$\mathcal{G}_{28}^1$	$\mathrm{PGL}(2,7)$	$(\mathrm{PSL}(2,7),S_3)$
$\mathcal{G}_{28}^2$	$\mathrm{PGL}(2,7)$	$(\mathrm{PGL}(2,7),S_3\times S_2)$	$\mathcal{G}_{56}^1$	$\mathrm{PGL}(2,7)$	$(\mathrm{PSL}(2,7),\mathbb{Z}_3)$
$\mathcal{G}_{56}^2$	$\mathrm{PGL}(2,7)$	$(\mathrm{PGL}(2,7),S_3)$	$\mathcal{G}_{56}^3$	$\mathrm{PGL}(2,7)\times\mathbb{Z}_2$	$(\mathrm{PGL}(2,7),S_3)$
C_{110}	$\mathrm{PGL}(2,11)$	$(\mathrm{PGL}(2,11),S_3\times S_2)$	NC_{182}^1	$\mathrm{PSL}(2,13)$	$(\mathrm{PSL}(2,13),S_3)$
NC_{182}^2	$\mathrm{PGL}(2,13)$	$(\mathrm{PGL}(2,13),S_3\times S_2)$	NC_{102}	$\mathrm{PSL}(2,17)$	$(\mathrm{PSL}(2,17),S_4)$
NC_{506}	$\mathrm{PGL}(2,23)$	$(\mathrm{PSL}(2,23),S_3\times S_2)$	C_{506}	$\mathrm{PGL}(2,23)$	$(\mathrm{PGL}(2,23),S_4)$
$\mathcal{G}_{650}^1$	$\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,25))$	$(\mathrm{PGL}(2,25),S_4)$	$\mathcal{G}_{650}^2$	$\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,25))$	$(\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,25)),S_4\times S_2)$
NC_{2162}	$\mathrm{PSL}(2,47)$	$(\mathrm{PSL}(2,47),S_4)$	$\mathcal{G}_{234}^1$	$\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(3,3))$	$(\mathrm{PSL}(3,3),S_4)$
$\mathcal{G}_{234}^2$	$\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(3,3))$	$(\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(3,3)),S_4\times S_2)$			

我们用 $\mathbb{Z}_n$ 表示 n 阶循环群， A_n 和 S_n 分别表示交错群和对称群。

本节的主要内容是给出一些重要的结论和例子。首先我们给出由 Tutte 于 1947 年确定的 3 度对称图的点稳定子群的结构，它为我们研究 3 度对称图奠定了基础。

引理 2.1 ([7])：设 Γ 是一个连通的 3 度 (G,s)-弧传递图。则 $s\le 5$，并且 $(G_\alpha,|G_\alpha|,s)$ 满足表 2，其中 $\alpha\in V\Gamma$。

Table 2. Point-stabilized subgroups of 3-degree symmetry maps
表 2. 3 度对称图的点稳定子群

s	1	2	3	4	5
G_α	$\mathbb{Z}_3$	S_3	$S_3\times S_2$	S_4	$S_4\times S_2$
$\lvert G_\alpha\rvert$	3	2×3	$2^2\times 3$	$2^3\times 3$	$2^4\times 3$

设 G 是一个有限群，H 是 G 的子群。令 D 为 H 在 G 中的若干个形如 $HxH\,(x\notin H)$ 的双陪集之并。定义群 G 上关于 H 和 D 的陪集(有向)图 $\Gamma=\mathrm{Cos}(G,H,D)$ 如下：顶点集 $V\Gamma=[G:H]$，即 H 在 G 中的所有右陪集之并，边集 $E\Gamma=\{\{Ha,Hda\}\mid a\in G,d\in D\}$。陪集图有如下的性质。

引理 2.2 ([14])：设 $\Gamma=\mathrm{Cos}(G,H,D)$ 是群 G 关于 H 和 D 的陪集有向图，则

1) Γ 是点传递图，并且 $\mathrm{val}(\Gamma)=|D|/|H|$；

2) Γ 是连通图当且仅当 $G=\langle D\rangle$；

3) Γ 是无向图当且仅当 $D=D^{-1}$；

4) Γ 是 G-弧传递的当且仅当 $D=Hx_iH\,(x_i\notin H)$ 是一个单个的双陪集。

陪集图通常用于构造一些图例，下面的 4 个例子是根据 3 度图的点稳定子群的结构以及陪集图的性质构造而成，可参看文献([1])和([10])。

例 2.3：1) 设 $G=\mathrm{PSL}(2,13)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_3$，且存在一个对合 x 使得 $|HxH|/|H|=3$，$\langle H,x\rangle=G$。于是由引理 2.2 知陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,HxH)$ 是一个阶为 182 的 3 度对称图，记为 NC_{182}^1，且 $\mathrm{Aut}(NC_{182}^1)\cong\mathrm{PSL}(2,13)$。

2) 设 $G=\mathrm{PGL}(2,13)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_3\times S_2$，且存在一个对合 x 使得 $|HxH|/|H|=3$，$\langle H,x\rangle=G$。

于是由引理 2.2 知陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,HxH)$ 是一个阶为 182 的 3 度对称图，记为 NC_{182}^2，且 $\mathrm{Aut}(NC_{182}^2)\cong \mathrm{PGL}(2,13)$。

例 2.4：1) 设 $G=\mathrm{PSL}(2,23)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_3\times S_2$，且存在和一个对合 x 使得 $|HxH|/|H|=3$，$\langle H,x\rangle=G$。于是由引理 2.2 知陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,HxH)$ 是一个阶为 506 的 3 度对称图，记为 NC_{506}，且 $\mathrm{Aut}(NC_{506})\cong \mathrm{PSL}(2,23)$。

2) 设 $G=\mathrm{PGL}(2,23)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_4$，且存在和一个对合 x 使得 $|HxH|/|H|=3$ 且 $\langle H,x\rangle=G$。于是由引理 2.2 知陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,HxH)$ 是一个阶为 506 的 3 度对称图，记为 C_{506}，且 $\mathrm{Aut}(C_{506})\cong \mathrm{PGL}(2,23)$。

例 2.5：设 $G=\mathrm{PSL}(2,47)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_4$ 和一个对合 x 使得 $|HxH|/|H|=3$ 且 $\langle H,x\rangle=G$。于是由引理 2.2 知陪集图 $\mathrm{Cos}(G,H,HxH)$ 是一个阶为 2162 的 3 度对称图，记为 NC_{2162}，且其全自同构群为 $\mathrm{PSL}(2,23)$。

例 2.6：1) Levi 图 NC_{30} 是唯一的一个阶为 30 的 3 度对称图，它是 5-正则的二部图且 $\mathrm{Aut}(NC_{30})\cong S_6.\mathbb{Z}_2$。

2) Smith-Biggs 图 NC_{102} 是唯一的一个阶为 102 的 3 度对称图，且 $\mathrm{Aut}(NC_{102})\cong \mathrm{PSL}(2,17)$。

3) Coxter-Frucht 图 C_{110} 是唯一的一个阶为 110 的 3 度对称图，且 $\mathrm{Aut}(C_{110})\cong \mathrm{PGL}(2,11)$。

对于给定的较小群 G，利用 Magma ([15])软件计算包可以确定所有同构意义下的 G-弧传递图。通过 Magma ([15])直接计算，我们可得以下的 5 个例子。值得注意的是，在例子中所出现图，它们在同构意义下都是唯一的。

例 2.7：1) 设 $G=A_5$，则 G 有一个子群 $H\cong \mathbb{Z}_3$，由 Magma ([15])可知，存在一个阶为 20 的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{20}^1$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{20}^1)\cong S_5$。

2) 设 $G=S_5$，则 G 有一个子群 $H\cong S_3$，于是通过 Magma ([15])计算，存在一个阶为 20 的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{20}^2$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{20}^2)\cong S_5\times\mathbb{Z}_2$。

例 2.8：设 $G=\mathrm{PSL}(2,7)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_3$ 或 $\mathbb{Z}_3$，于是存在两个 3 度对称图，分别记为 $\mathcal{G}_{28}^1$ 和 $\mathcal{G}_{56}^1$，它们的阶分别为 28 和 56，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{28}^1)\cong \mathrm{PGL}(2,7)$，$\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{56}^1)\cong \mathrm{PGL}(2,7)$。

例 2.9：设 $G=\mathrm{PGL}(2,7)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_3\times S_2$ 或 S_3。通过 Magma ([15])计算可得：

1) 如果 $H\cong S_3\times S_2$，则存在一个阶为 28 的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{28}^2$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{28}^2)\cong \mathrm{PGL}(2,7)$。

2) 如果 $H\cong S_3$，则存在两个阶为 56 的 3 度对称图，分别记为 $\mathcal{G}_{56}^2$ 和 $\mathcal{G}_{56}^3$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{56}^2)\cong \mathrm{PGL}(2,7)$，$\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{56}^3)\cong \mathrm{PGL}(2,7)\times\mathbb{Z}_2$。

例 2.10：1) 设 $G=\mathrm{PGL}(2,25)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_4$，通过 Magma ([15])计算，存在一个阶为 650 的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{650}^1$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{650}^1)\cong \mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,25))$。

2) 设 $G=\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,25))$，则 G 有一个子群 $H\cong S_4\times S_2$，由 Magma ([15])可知，存在一个阶为 650 的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{650}^2$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{650}^2)\cong \mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(2,25))$。

例 2.11：1) 设 $G=\mathrm{PSL}(3,3)$，则 G 有一个子群 $H\cong S_4$，存在一个阶为 234 的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{234}^1$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{234}^1)\cong \mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(3,3))$。

2) 设 $G=\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(3,3))$，则 G 有一个子群 $H\cong S_4\times S_2$，故由 Magma ([15])计算，存在一个阶为 234 的 3 度对称图，记为 $\mathcal{G}_{234}^2$，且 $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{234}^2)\cong \mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(3,3))$。

下面的引理是([16]，引理 2.5])的一个特例，它略微改进了 Praeger 的结论([17]，定理 4.1])。

引理 2.12 ([16])：设 Γ 是一个连通的奇素数度的 G-弧传递图，$G\le \mathrm{Aut}\Gamma$ 有一个非传递的正规子群 N

在 $V\Gamma$ 上至少有两个轨道。则下面的陈述成立：

1) N 在 $V\Gamma$ 上半正则，$G/N \le \mathrm{Aut}(\Gamma_N)$，$\Gamma_N$ 是 G/N-弧传递的，并且 Γ 是 Γ_N 的正规 N-覆盖。

2) Γ 是 (G,s)-弧传递的当且仅当 Γ_N 是 $(G/N,s)$-弧传递的，其中 $1 \le s \le 5$ 或 $s = 7$。

3) $G_\alpha \cong (G/N)_\delta$，其中 $\alpha \in V\Gamma$，$\delta \in V\Gamma_N$。

3. 定理 1.1 的证明

为了完整的证明定理 1.1，我们先证明以下两个引理，第一个引理分类了一类单群。

引理 3.1：设 T 是一个非交换单群且满足 $|T| \,\|\, 2^5 \cdot 3 \cdot r^m \cdot s^n$，且 $3r^m s^n \,\|\, |T|$，其中 $r < s$ 为素数，$m,n \ge 1$。则下列之一成立，其中 $|\pi(T)|$ 表示 $|T|$ 的所有素因子的个数。

1) 如果 $|\pi(T)| = 3$，则 $(T,|T|)$ 满足表 3。

Table 3. Single group T with 3 prime factors

表 3. 含有 3 个素因子的单群 T

T	$\|T\|$	T	$\|T\|$
A_5	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	A_6	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$
$\mathrm{PSL}(2,7)$	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$\mathrm{PSL}(2,8)$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
$\mathrm{PSU}(3,3)$	$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	$\mathrm{PSL}(3,3)$	$2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$
$\mathrm{PSL}(2,17)$	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 17$		

2) 如果 $|\pi(T)| = 4$，则 $(T,|T|)$ 满足表 4。

Table 4. Single group T with 4 prime factors

表 4. 含有 4 个素因子的单群 T

T	$\|T\|$	T	$\|T\|$
$\mathrm{PSL}(2,11)$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$\mathrm{PSL}(2,13)$	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$
$\mathrm{PSL}(2,16)$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$	$\mathrm{PSL}(2,23)$	$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$
$\mathrm{PSL}(2,25)$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$	$\mathrm{PSL}(2,31)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$
$\mathrm{PSL}(2,32)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31$	$\mathrm{PSL}(2,47)$	$2^4 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 47$
$\mathrm{PSL}(2,49)$	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$	$\mathrm{PSL}(2,97)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 97$
$\mathrm{PSL}(3,5)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$		

证明：因为 $3r^m s^n \,\|\, |T|$，所以 $3 \le |\pi(T)| \le 4$，因此 T 满足([18]，定理 I)。

如果 $|\pi(T)| = 3$，则 $r = 2$ 或 3，$s \ge 5$，因此 T 是一个 $\{2,3,s\}$-群。如果 $r = 2$，则 $|T| \,\|\, 2^{5+m} \cdot 3 \cdot s^n$，于是 $3^2 \nmid |T|$，故由([18]，表 1)可知：$T \cong A_5$ 或 $\mathrm{PSL}(2,7)$，此时，$|T| = 2^2 \times 3 \times 5$ 或 $2^3 \times 3 \times 7$。如果 $r = 3$，则 $|T| \,\|\, 2^5 \cdot 3^{m+1} \cdot s^n$，故 $2^6 \nmid |T|$。再由([18]，表 1)可得：$T \cong A_5$，A_6，$\mathrm{PSL}(2,7)$，$\mathrm{PSL}(2,8)$，$\mathrm{PSU}(3,3)$，$\mathrm{PSL}(3,3)$ 或 $\mathrm{PSL}(2,17)$。

如果 $|\pi(T)| = 4$，由 $|T| \,\|\, 2^5 \cdot 3 \cdot r^m \cdot s^n$ 可知 $3 < r < s$，因此 T 是一个 $\{2,3,r,s\}$-群，于是由([18]，定理 I)可知：T 满足([18]，表 2)或者 T 同构于单群 $\mathrm{PSL}(2,q)$，其中 $q > 3$ 为一个素数的方幂。如果 T 满足([18]，表 2)，则通过检查它们的阶可得：$T \cong \mathrm{PSL}(3,5)$，此时 $|T| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$。如果 $T \cong \mathrm{PSL}(2,q)$，则由([18]，

定理 3.2 和引理 3.4(2)，3.5(2))可知：要么 $q\in\{5^2,7^2,2^4,2^5\}$，要么 $q\geq 11$ 是一个素数。

假设 $T\cong \mathrm{PSL}(2,q)$，其中 $q\geq 11$ 是一个素数，则 $|T|=\frac{1}{2}q(q+1)(q-1)$。注意到，$3<r<s$，因此，

$$\frac{1}{2}(q+1)(q-1)\Big|\,2^5\cdot 3\cdot r^m,$$

即

$$\frac{q+1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}\Big|\,2^4\cdot 3\cdot r^m.$$

因为 $\left(\frac{q+1}{2},\frac{q-1}{2}\right)=1$，所以 $\frac{q+1}{2}\Big|r^m$ 或 $\frac{q-1}{2}\Big|r^m$，即 $\frac{q-1}{2}\Big|2^4\cdot 3$ 或 $\frac{q+1}{2}\Big|2^4\cdot 3$。由此可得：$q=11$，13，17，23，31，47 或 97。通过检查它们对应单群 $\mathrm{PSL}(2,q)$ 的阶可知：满足条件的 q 为 11，13，23，31，47，97。□

假设 $p<q$ 为素数，Γ 是一个连通的阶为 $2p^mq^n$ 的 3 度 G-弧传递图，其中 $G\leq \mathrm{Aut}\Gamma$，$m,n\geq 1$。设 N 是G的一个极小正规子群，则 $N=T^d$，其中 T 是一个单群且 $d\geq 1$。令 $\alpha\in V\Gamma$。

引理 3.2：应用上面的符号说明。如果 N 是非交换的，则 $d=1$。

证明：反证法。假设 $d\geq 2$，则由 $N=T^d$ 可知：$|N|\nmid 2p^mq^n$。如果 N 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道，则由引理 2.12 可知，N 在 $V\Gamma$ 上半正则，于是 $|N|\,\big|\,|V\Gamma|$，注意到 $|V\Gamma|=2p^mq^n$，矛盾。故 N 在 $V\Gamma$ 上至多有 2 个轨道。令 $N=T_1\times T_2\times\cdots\times T_d$，其中 $T_i\cong T\left(i=1,2,\cdots,d\right)$。

假设 N 在 $V\Gamma$ 上传递。由 $1\neq N_\alpha\lhd G_\alpha$ 且 Γ 是连通图可得：$1\neq N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}\lhd G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$。因此，$N_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ 是传递的且 Γ 是 N-弧传递的。如果 T_1 在 $V\Gamma$ 上传递，则由([12]，定理 4.2A)可知：中心化子 $C_N(T_1)$ 在 $V\Gamma$ 上半正则，从而 T_2 在 $V\Gamma$ 上半正则，这与 $|T_2|$ 不能整除 $|V\Gamma|=2p^mq^n$ 相矛盾。如果 T_1 在 $V\Gamma$ 上至少有 3 个轨道，则由引理 2.12 可知：T_1 在 $V\Gamma$ 上半正则，矛盾。因此，T_1 在 $V\Gamma$ 上恰好有 2 个轨道，记为 U 和 W。因为 $T_1\lhd N$，故 U 和 W 构成 $V\Gamma$ 上的一个 N-不变块系，于是 N_U 在 N 中的指数为 2。但是，$N=T^d$ 没有指数为 2 的子群，矛盾。

假设 N 在 $V\Gamma$ 上恰有两个轨道，记为 Δ_1,Δ_2。此时，Γ 是一个二部图，其二部分别为 Δ_1 和 Δ_2。令 $G^+=G_{\Delta_1}=G_{\Delta_2}$。如果 G^+ 作用在 Δ_1 上是非忠实的，则由([19]，引理 5.2)可知：Γ 是一个完全二部图，于是 $\Gamma=K_{3,3}$，因此，$|V\Gamma|=6$，矛盾。如果 G^+ 作用在 Δ_1 上是忠实的，则 $N\leq G^+$ 可以看作 Δ_1 上的一个传递置换群。如果 T_1 在 Δ_1 上传递，则由([12]，定理 4.2A)可知：T_2 在 Δ_1 上半正则，故 $|T_2|\,\big|\,p^mq^n$，矛盾。因此，T_1 在 Δ_1 上至少有 2 个轨道，故由([20]，引理 3.2)可知：T_1 在 Δ_1 上半正则，矛盾。□

下面给出定理 1.1 的完整证明。

定理 1.1 的证明：设 Γ 是一个连通的阶为 $2p^mq^n$ 的 3 度对称 G-基图，则 G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原的或者二部拟本原的，其中 $p<q$ 为素数，$G\leq \mathrm{Aut}\Gamma$，$m,n\geq 1$。设 N 是 G 的一个极小正规子群，则 $N=T^d$，其中 T 是一个单群且 $d\geq 1$。令 $\alpha\in V\Gamma$，下面我们分两种情形来完成定理 1.1 的证明。

情形 1：假设 G 在 $V\Gamma$ 上是拟本原的。

此时 N 在 $V\Gamma$ 上是传递的。如果 N 是一个交换群，则 N 在 $V\Gamma$ 上正则，从而 $|T|^d=|N|=2p^mq^n$，矛盾。因此 N 是非交换的，于是由引理 3.2 可知：$d=1$，从而 $N=T$。进一步，由于 $T_\alpha\neq 1$，则 Γ 是 T-弧传递的，因此 T_α 满足引理 2.1，于是 $|T_\alpha|\,\big|\,48$。由 T 的传递性可得：$|T|=|V\Gamma|\cdot|T_\alpha|$ 整除 $2^5\cdot 3\cdot p^m\cdot q^n$。另一方面，由于 Γ 是 T-弧传递的，则 $3\,\big|\,|T_\alpha|$，于是 $3p^mq^n\,\big|\,|T|$。故 T 满足引理 3.1。

假设$\left|\pi(T)\right|=3$，则T和$\left(p^m,q^n\right)$满足下表5。

Table 5. Single group T with three prime factors and its corresponding $\left(p^m,q^n\right)$

表5. 含有3个素因子的单群T及其对应的$\left(p^m,q^n\right)$

T	A_5	A_6	$\mathrm{PSL}(2,7)$	$\mathrm{PSL}(2,8)$	$\mathrm{PSU}(3,3)$	$\mathrm{PSL}(3,3)$	$\mathrm{PSL}(2,17)$
$\left(p^m,q^n\right)$	(2,5)	(3,5)	(2,7)或$(2^2,7)$	(3,7)	$(3^2,7)$	$(3^2,13)$	(3,17)

如果$T\cong A_5$，则$\left|T_\alpha\right|=\left|T\right|/\left|V\Gamma\right|=3$，从而$T_\alpha\cong\mathbb{Z}_3$，故由例2.7可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{20}^1$。如果$T\cong A_6$，$\mathrm{PSL}(2,8)$或$\mathrm{PSL}(2,17)$，则$\left|V\Gamma\right|=2pq$，从而由([10])可知：只有当$T\cong\mathrm{PSL}(2,17)$时才存在满足条件的图$\Gamma$，此时$T$有一个子群$T_\alpha\cong S_4$。由例2.6可知$\Gamma\cong NC_{102}$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,7)$，且$\left(p^m,q^n\right)=(2,7)$或$\left(2^2,7\right)$，则$\left|T_\alpha\right|=6$或3，从而由引理2.1可得，$T_\alpha\cong S_3$或$\mathbb{Z}_3$。由例2.8可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{28}^1$或$\mathcal{G}_{56}^1$。如果$T\cong\mathrm{PSU}(3,3)$，则$\left|T_\alpha\right|=2^4\cdot 3$，但是，$\mathrm{PSU}(3,3)$没有子群同构于$S_4\times S_2$，这与引理2.1相矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSL}(3,3)$，则$\left|T_\alpha\right|=2^3\cdot 3$且$T_\alpha\cong S_4$。由例2.11可知：$\Gamma\cong\mathcal{G}_{234}^1$。

假设$\left|\pi(T)\right|=4$，则T和$\left(p^m,q^n\right)$满足下表6。

Table 6. Single group T with four prime factors and their corresponding $\left(p^m,q^n\right)$

表6. 含有4个素因子的单群T及其对应的$\left(p^m,q^n\right)$

T	$\mathrm{PSL}(2,11)$	$\mathrm{PSL}(2,13)$	$\mathrm{PSL}(2,16)$	$\mathrm{PSL}(2,23)$	$\mathrm{PSL}(2,25)$	$\mathrm{PSL}(2,31)$
$\left(p^m,q^n\right)$	(5,11)	(7,13)	(5,17)	(11,23)	$(5^2,13)$	(5,31)
T	$\mathrm{PSL}(2,32)$	$\mathrm{PSL}(2,47)$	$\mathrm{PSL}(2,49)$	$\mathrm{PSL}(2,97)$	$\mathrm{PSL}(3,5)$	
$\left(p^m,q^n\right)$	(11,31)	(23,47)	$(5^2,7^2)$	$(7^2,97)$	$(5^3,31)$	

如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,q)$，其中$q\in\{11,13,16,23,31,32,47\}$，则$\left|V\Gamma\right|=2pq$，由([10])可知，只有当$q=13$，23或47时才存在满足条件的图$\Gamma$，进一步，由例2.3，2.4和2.5可得，$\Gamma\cong NC_{182}^1$，$NC_{506}$或$NC_{2162}$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,97)$或$\mathrm{PSL}(3,5)$，则$\left|T_\alpha\right|=2^4\cdot 3$。但是，$\mathrm{PSL}(2,97)$和$\mathrm{PSL}(3,5)$都没有子群同构于$S_4\times S_2$，这与引理2.1相矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,25)$或$\mathrm{PSL}(2,49)$，则$\left|T_\alpha\right|=2^2\cdot 3$或$2^3\cdot 3$，此时$T_\alpha\cong S_3\times S_2$或$S_4$，由Magma ([15])计算可知，此时不存在满足条件的图Γ。

情形2：假设G在$V\Gamma$上是二部拟本原的。

此时，G有一个极小正规子群$N=T^d$在$V\Gamma$上恰有两个轨道，分别记为Δ_1和Δ_2。于是，Γ是一个二部图，并且其二部分别为Δ_1和Δ_2。令$G^+=G_{\Delta_1}=G_{\Delta_2}$，则$N\le G^+$，$\left|G:G^+\right|=2$，$G_\alpha=G_\alpha^+$。如果$N$是交换的，则$N$在$\Delta_1$上正则，从而$\left|T\right|^d=\left|N\right|=p^mq^n$，矛盾。因此$N$是非交换的。由引理3.2可知：$N=T$是一个非交换单群。如果$G^+$作用在$\Delta_1$或$\Delta_2$上是非忠实的，则由([19]，引理5.2)可知：$\Gamma$是一个完全二部图，于是$\Gamma=K_{3,3}$。故，$\left|V\Gamma\right|=6$，矛盾。假设$G^+$作用在$\Delta_1$和$\Delta_2$上是忠实的，则由([21]，定理1.5)可知下列之一成立：

(a) G^+在$\Delta_i\left(i=1,2\right)$上是拟本原的；

(b) G^+有两个正规子群M_1，M_2满足$M_1\cong M_2$且它们在$V\Gamma$半正则。进一步，群$M_1\times M_2$在Δ_i上正则。

对于情形(b)，有：$|M_1|^2=|\Delta_i|=p^m q^n$，矛盾。下面考虑情形(a)。假设$G^+$在$\Delta_i$上是拟本原的，则$G^+$有一个极小正规子群$T$且$T$是一个单群，于是由O'Nan-Scott-Praeger定理([17])可知：$\mathrm{soc}(G^+)=T$或T^2。如果$\mathrm{soc}(G^+)=T^2$，则G^+是全形单型，且T在Δ_i上正则。因此$|T|=|\Delta_i|=p^m q^n$，矛盾。故$\mathrm{soc}(G^+)=T$。进一步，如果T不是G的唯一极小正规子群，则由$G=G^+.\mathbb{Z}_2$可知$G=G^+\times\mathbb{Z}_2$，于是G的正规子群$\mathbb{Z}_2$在$V\Gamma$上有$p^m q^n$个轨道，这与G在$V\Gamma$上是二部拟本原的相矛盾。故，T是G的唯一极小正规子群，即G是几乎单的且其基柱$\mathrm{soc}(G)=T$。令$G=T.o$，$G^+=T.o'$，其中$\mathbb{Z}_2\le o\le \mathrm{Out}(T)$且$|o:o'|=2$。由于$T_\alpha\le G_\alpha$，于是由引理2.1可知$|T_\alpha|\,\|\,48$，因此$|T|=|\Delta_1|\cdot|T_\alpha|$整除$2^5\cdot 3\cdot p^m\cdot q^n$。另一方面，由于$T_\alpha\ne 1$，则$3\,\|\,|T_\alpha|$，$3p^m q^n\,\|\,|T|$。故$T$满足引理3.1。

假设$|\pi(T)|=3$。此时T和(p^m,q^n)满足表5。如果$T\cong A_5$，则由Altas ([22])可知$\mathrm{Out}(A_5)=\mathbb{Z}_2$。因此$G^+=A_5$，$G=S_5$，且$|G_\alpha|=|G|/|V\Gamma|=6$，于是由引理2.1可知，$G_\alpha\cong S_3$。故由例2.7可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{20}^2$。如果$T\cong A_6$，则$\mathrm{Out}(A_6)=\mathbb{Z}_2^2$，于是$G=S_6$或$S_6.\mathbb{Z}_2$。若$G=S_6$，则$|G_\alpha|=24$，于是$G_\alpha\cong S_4$，由Magma ([15])计算可知：此时不存在满足条件的图Γ。若$G=S_6.\mathbb{Z}_2$，则$|G_\alpha|=48$，于是$G_\alpha\cong S_4\times S_2$，由例2.6可知$\Gamma\cong NC_{30}$。如果$T\cong \mathrm{PSL}(2,7)$，则$\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,7))=\mathbb{Z}_2$，且$(p^m,q^n)=(2,7)$或$(2^2,7)$。于是$G=\mathrm{PGL}(2,7)$，并且$G$有两个子群分别同构于$S_3\times S_2$和$S_3$。故由例2.9可知：$\Gamma\cong\mathcal{G}_{28}^2$，$\mathcal{G}_{56}^2$，或$\mathcal{G}_{56}^3$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,8)$，则由Altas ([6])可知$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_3$，此时与$\mathbb{Z}_2\le o\le\mathrm{Out}(T)$且$|o:o'|=2$相矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSU}(3,3)$，则$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$，于是$G=\mathrm{Aut}(\mathrm{PSU}(3,3))$，此时$|G_\alpha|=2^5\cdot 3$，这与引理2.1相矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSL}(3,3)$，则$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$，从而$G=\mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}(3,3))$，此时$G_\alpha\cong S_4\times S_2$，由例2.11可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{234}^2$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,17)$，则$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$，故$G=\mathrm{PGL}(2,17)$，此时$|G_\alpha|=48$，但是，$\mathrm{PGL}(2,17)$不存在48阶的子群，矛盾。

假设$|\pi(T)|=4$。此时T和(p^m,q^n)满足表6。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,31)$，$\mathrm{PSL}(2,97)$或$\mathrm{PSL}(3,5)$，则$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$，于是$G=\mathrm{PGL}(2,31)$，$\mathrm{PGL}(2,97)$或$\mathrm{PGL}(3,5)$。此时，$|G_\alpha|=|G|/|V\Gamma|=2^5\cdot 3$，这与引理2.1相矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,32)$，则$\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,32))=\mathbb{Z}_5$，此时与$\mathbb{Z}_2\le o\le\mathrm{Out}(T)$且$|o:o'|=2$相矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,16)$或$\mathrm{PSL}(2,49)$，则$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2^2$，于是$G=T.\mathbb{Z}_2$或$\mathrm{Aut}(T)$。若$G=T.\mathbb{Z}_2$，则$|G_\alpha|=2^4\cdot 3$，但是，$G$没有子群同构于$S_4\times S_2$，这与引理2.1相矛盾。若$G=\mathrm{Aut}(T)$，则$|G_\alpha|=2^5\cdot 3$，这与引理2.1相矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,47)$，则$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$，于是$G=\mathrm{PGL}(2,47)$，$|G_\alpha|=2^4\cdot 3$，然而，$G$没有子群同构于$S_4\times S_2$，矛盾。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,11)$，$\mathrm{PSL}(2,13)$或$\mathrm{PSL}(2,23)$，则$\mathrm{Out}(T)=\mathbb{Z}_2$，故$G=\mathrm{PGL}(2,11)$，$\mathrm{PGL}(2,13)$或$\mathrm{PGL}(2,23)$，进一步可得，$G_\alpha\cong S_3\times S_2$或$S_4$。故由例2.3，2.4和2.6可知：$\Gamma\cong C_{110}$，$NC_{182}^2$或$C_{506}$。如果$T\cong\mathrm{PSL}(2,25)$，则$\mathrm{Out}(\mathrm{PSL}(2,25))=\mathbb{Z}_2^2$，于是$G=T.\mathbb{Z}_2\cong PGL(2,25)$或$\mathrm{Aut}(T)$。因此，$G_\alpha=S_4$或$S_4\times S_2$。由例2.10可知$\Gamma\cong\mathcal{G}_{650}^1$或$\mathcal{G}_{650}^2$。□

基金项目

国家自然科学基金资助项目(80031010061)资助。

参考文献

[1] Conder, M.D.E. and Dobcsanyi, P. (2002) Trivalent Symmetric Graphs on up to 768 Vertices. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **40**, 41-63.

[2] Chao, C.Y. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. https://doi.org/10.2307/1995785

[3] Cheng, Y. and Oxley, J. (1987) On Weakly Symmetric Graphs of Order Twice a Prime. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **42**, 196-211. https://doi.org/10.1016/0095-8956(87)90040-2

[4] Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) A Classification of Symmetric Graphs of Order 3*p*. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **58**, 197-216. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1037

[5] Praeger, C.E., Wang, R.J. and Xu, M.Y. (1993) Symmetric Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **58**, 299-318. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1046

[6] Praeger, C.E. and Xu, M.Y. (1993) Vertex-Primitive Graphs of Order a Product of Two Distinct Primes. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **59**, 245-266. https://doi.org/10.1006/jctb.1993.1068

[7] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. https://doi.org/10.1017/S0305004100023720

[8] Du, S.F. and Wang, F.R. (2005) Arc-Transitive Cubic Cayley Graphs on PSL(2,p). *Science in China*, **48**, 1927-1308.

[9] Feng, Y.Q., Kwak, J.H. and Wang, K.S. (2005) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order 8*p* or $8p^2$. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 1033-1052. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2004.06.015

[10] Zhou, J.X. and Feng, Y.Q. (2010) Cubic Vertex-Transitive Graphs of Order 2*pq*. *Journal of Graph Theory*, **65**, 285-302. https://doi.org/10.1002/jgt.20481

[11] Biggs, N. (2004) Algebraic Graph Theory. Cambridge University Press, Cambridge.

[12] Dixon, J.D. and Mortimer, B. (1997) Permutation Groups. Spring-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0731-3

[13] 徐明曜. 有限群导引(上)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[14] 徐明曜. 有限群导引(下)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[15] Bosma, W., Cannon, J. and Playoust, C. (1997) The MAGMA Algebra System I: The User Language. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, 235-265. https://doi.org/10.1006/jsco.1996.0125

[16] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[17] Praeger, C.E. (1992) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc-Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227

[18] Huppert, B. and Lempken, W. (2000) Simple Groups of Order Divisible by at Most Four Primes. *Izvestiya Gomel'skogo Gosudarstvennogo Universiteta Im. F. Skoriny*, **16**, 64-75.

[19] Giudici, M., Li, C.H. and Praeger, C.E. (2003) Analyzing Finite Locally *s*-Arc-Transitive Graphs. *The Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, 291-317. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03361-0

[20] Lu, Z.P., Wang, C.Q. and Xu, M.Y. (2004) On Semisymmetric Cubic Graphs of Order $6p^2$. *Science in China Series A*, **47**, 1-17.

[21] Li, C.H., Praeger, C.E., Venkatesh, A. and Zhou, S.M. (2014) Finite Locally-Quasiprimitive Graphs. *Algebra Colloquium*, **21**, 627-634. https://doi.org/10.1142/S1005386714000571

[22] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A. and Wilson, R.A. (1985) Atlas of Finite Groups. Oxford University Press, London/New York.