Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(1), 1-5
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.101001

The Homological Properties of the Residue Rings of Skew Power Series

Zhaoqing Gong, Lunqun Ouyang

School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan
Email: 271811021@qq.com, ouyanglqtxy@163.com

Received: Dec. 4th, 2019; accepted: Dec. 23rd, 2019; published: Dec. 31st, 2019

Abstract

Let R be a perfect coherent commutative ring, α be an automorphism of a ring R, and $f(x)$ be a skew power series of $R[\![x;\alpha]\!]$. In this paper, we mainly investigate the flat property or the faithfully flat property of the residue ring $R[\![x;\alpha]\!]/(f(x))$ when the coefficients of $f(x)$ satisfy some additional conditions.

Keywords

α-Compatible Ideal, Flat Module, Faithfully Flat Module

斜幂级数剩余类环的同调性质

龚朝庆，欧阳伦群

湖南科技大学，数学与计算科学学院，湖南 湘潭
Email: 271811021@qq.com, ouyanglqtxy@163.com

收稿日期：2019年12月4日；录用日期：2019年12月23日；发布日期：2019年12月31日

摘 要

设R是一个完全凝聚的交换环，α是环R的自同构，$f(x)$是$R[\![x;\alpha]\!]$中的一个斜幂级数。该文对一些特殊的$f(x)$，即$f(x)$的某些系数满足一定条件时，得到了斜幂级数剩余类环$R[\![x;\alpha]\!]/(f(x))$作为R-模的平坦与忠实平坦等同调性质。

文章引用：龚朝庆，欧阳伦群．斜幂级数剩余类环的同调性质[J]．理论数学, 2020, 10(1): 1-5.
DOI: 10.12677/pm.2020.101001

关键词

α-相容理想，平坦模，忠实平坦模

1. 前言

设 R 是有单位元 1 的完全凝聚的交换环，α 是环 R 上的一个自同构。记 $R[[x;\alpha]]=\left\{\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i \middle| a_i\in R, i\in N\right\}$，其中加法运算为普通的幂级数加法，乘法运算为满足下列关系式的乘法运算：对于任意 $r\in R$，$xr=\alpha(r)x$，则 $R[[x;\alpha]]$ 按上述运算构成一个环，称为环 R 上的斜幂级数环。设 I 是环 R 的理想，如果对任意 $a,b\in R$，$ab\in I\Leftrightarrow a\alpha(b)\in I$，则称 I 是环 R 的 α-相容理想。如果环 R 的任意理想都是 α-相容理想，则称 R 是 α-相容环。

令 $f(x)\in R[[x;\alpha]]$，本文主要研究当 $f(x)$ 的某些系数满足一定条件时，斜幂级数剩余类环 $R[[x;\alpha]]/(f(x))$ 作为 R-模是一个平坦 R-模以及忠实平坦 R-模，并且将该结论推广到了幂级数剩余类环上。

2. 预备知识

引理 1 设 R 是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的自同构，I 是环 R 的 α-相容理想，则对任意 $a,b\in R$，下列结论成立：

1) 若 $ab\in I$，则对任意正整数 n，有 $a\alpha^{-n}(b)\in I$，$\alpha^{-n}(a)b\in I$；

2) 若存在正整数 n，使得 $a\alpha^{-n}(b)\in I$ 或 $\alpha^{-n}(a)b\in I$，则必有 $ab\in I$。

证明： 1) 若 $ab\in I$，则有 $a\alpha(\alpha^{-1}(b))\in I$。于是由 α-相容理想的定义可得 $a\alpha^{-1}(b)\in I$，再由 $a\alpha^{-1}(b)\in I$ 可推出 $a\alpha(\alpha^{-2}(b))\in I$，从而同样可推出 $a\alpha^{-2}(b)\in I$。依此类推可得对任意正整数 n，有 $a\alpha^{-n}(b)\in I$。

若 $ab\in I$，则有 $\alpha^n(\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b))=1\cdot\alpha^n(\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b))\in I$，其中 n 是正整数，于是由上面的证明可得 $1\cdot\alpha^{-n}(\alpha^n(\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b)))=\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n}(b)\in I$。由于 I 是环 R 的 α-相容理想，于是可得 $\alpha^{-n}(a)\alpha^{-n+1}(b)\in I$，依此类推可得 $\alpha^{-n}(a)b\in I$。

2) 若存在正整数 n，使得 $a\alpha^{-n}(b)\in I$ 或 $\alpha^{-n}(a)b\in I$，则由文献[1]中的命题 2.3 可得 $a\alpha^n(\alpha^{-n}(b))=ab\in I$ 及 $\alpha^n(\alpha^{-n}(a))b=ab\in I$。

推论 1： 设 R 是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的自同构，I 是环 R 的 α-相容理想，则对任意 $a,b\in R$，下列结论成立：

1) 若 $ab\in I$，则对任意非零整数 n，有 $a\alpha^n(b)\in I$，$\alpha^n(a)b\in I$；

2) 若存在非零整数 n，使得 $a\alpha^n(b)\in I$ 或 $\alpha^n(a)b\in I$，则必有 $ab\in I$。

证明： 由引理 1 及文献[1]中的命题 2.3 可知上述结论成立。

引理 2： 设 R 是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的自同构，对任意正整数 n，任意 $r\in R$，有 $x^nr=\alpha^n(r)x^n$，$rx^n=x^n\alpha^{-n}(r)$。

证明： 由于 $xr=\alpha(r)x$，于是可得 $x^2r=x(xr)=x(\alpha(r)x)=(x\alpha(r))x=\alpha^2(r)x^2$，依此类推可得 $x^nr=\alpha^n(r)x^n$。

由 $x^n r=\alpha^n(r)x^n$，可得 $rx^n=\alpha^n\left(\alpha^{-n}(r)\right)x^n=x^n\alpha^{-n}(r)$。

引理 3：设 R 是有单位元 1 的结合环，α 是环 R 的自同构，I 是环 R 的 α-相容理想，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$。则对任意正整数 n，任意 $b\in I$，有 $f(x)b\in I[\![x;\alpha]\!]$，$f(x)bx^n\in\left(f(x)\right)\cdot I$。

证明：由于 $f(x)b=\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)b=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\left(x^ib\right)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\alpha^i(b)x^i$，由 $b\in I$ 可得对任意 $0\le i<\infty$，$a_ib\in I$，于是由推论 1 可得 $a_i\alpha^i(b)\in I$，从而可得 $f(x)b\in I[\![x;\alpha]\!]$。

由于 $f(x)bx^n=f(x)x^n\alpha^{-n}(b)$，由于 $b=1\cdot b\in I$，于是由推论 1 可得 $1\cdot\alpha^{-n}(b)=\alpha^{-n}(b)\in I$，从而可得 $f(x)bx^n\in\left(f(x)\right)\cdot I$。

3. 主要结果

定理 1：设 R 是有单位元 1 的完全凝聚的 α-相容的交换环，α 是环 R 的自同构，$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$。如果存在 n，使得 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 都是幂等元，$a_n=1$，那么 $A=R[\![x;\alpha]\!]/\left(f(x)\right)$ 是平坦右 R-模。

证明：在 R-模正合列：

$$0\to\left(f(x)\right)\to R[\![x;\alpha]\!]\to A\to 0$$

中，$R[\![x;\alpha]\!]\cong\prod R$，由文献[2]，由于 R 是完全凝聚的环，因此易得 $R[\![x;\alpha]\!]$ 是平坦右 R-模。故由文献[3]知，A 是平坦右 R-模的充要条件是对 R 中任意有限生成的左理想 I，有

$$\left(f(x)\right)\cap R[\![x;\alpha]\!]\cdot I=\left(f(x)\right)\cdot I$$

显然 $\left(f(x)\right)\cdot I\subseteq\left(f(x)\right)\cap R[\![x;\alpha]\!]\cdot I$，下证 $\left(f(x)\right)\cap R[\![x;\alpha]\!]\cdot I\subseteq\left(f(x)\right)\cdot I$。设 $k_i(x)\in R[\![x;\alpha]\!]$，$c_i\in I$，则由引理 3 可得 $\sum k_i(x)c_i\in I[\![x;\alpha]\!]$。若 $\sum k_i(x)c_i\in\left(f(x)\right)$，下证一定有 $\sum k_i(x)c_i\in\left(f(x)\right)\cdot I$。

因为 $\sum k_i(x)c_i\in\left(f(x)\right)$，所以存在 $g(x)\in R[\![x;\alpha]\!]$，使得 $\sum k_i(x)c_i=f(x)g(x)$。

设 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m+\cdots$，则

$$\begin{aligned}f(x)g(x)&=\left(\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_jx^j\right)\\&=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^ib_0+\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^ib_1x+\cdots+\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^ib_mx^m+\cdots\\&=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\alpha^i(b_0)x^i+\sum_{i=0}^{\infty}a_i\alpha^i(b_1)x^{i+1}+\cdots+\sum_{i=0}^{\infty}a_i\alpha^i(b_m)x^{i+m}+\cdots\\&=a_0b_0+\left(a_0b_1+a_1\alpha(b_0)\right)x+\cdots+\left(a_0b_{n+m}+\cdots+a_{n+m}\alpha^{n+m}(b_0)\right)x^{n+m}+\cdots\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i+j=k}\left(a_i\alpha^i\left(b_j\right)\right)x^k\in I[\![x;\alpha]\!]\end{aligned}$$

当 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 都是幂等元，$a_n=1$ 时，依次比较 x^k 的系数得：

当 $k=0$ 时，$a_0b_0\in I$；

当 $k=1$ 时，我们有

$$a_0b_1+a_1\alpha(b_0)\in I.\tag{1}$$

将上式乘上 a_0 后得

$$a_0b_1+a_1a_0\alpha(b_0)\in I.$$

由于 $a_0b_0\in I$，I 是环 R 的 α-相容理想，于是可得 $a_0\alpha(b_0)\in I$，从而可得 $a_0b_1\in I$。再由(1)式可得

$a_1\alpha\left(b_0\right)\in I$，故由推论 1 可得 $a_1b_0\in I$；

当 $k=2$ 时，

$$a_0b_2+a_1\alpha\left(b_1\right)+a_2\alpha^2\left(b_0\right)\in I. \tag{2}$$

将该式乘上 a_0 后得

$$a_0b_2+a_1a_0\alpha\left(b_1\right)+a_2a_0\alpha^2\left(b_0\right)\in I.$$

由于 $a_0b_0\in I$，$a_0b_1\in I$，于是由推论 1 可得 $a_0\alpha\left(b_1\right)\in I$，$a_0\alpha^2\left(b_0\right)\in I$，从而可得 $a_0b_2\in I$。再将(2)式乘上 a_1 后可得

$$a_1a_0b_2+a_1\alpha\left(b_1\right)+a_2a_1\alpha^2\left(b_0\right)\in I.$$

由于 $a_1b_0\in I$，于是由推论 1 可得 $a_1\alpha^2\left(b_0\right)\in I$。又由于 $a_0b_2\in I$，于是可得 $a_1\alpha\left(b_1\right)\in I$，故可得 $a_1b_1\in I$。再由(2)式可得 $a_2\alpha^2\left(b_0\right)\in I$，于是由推论 1 可得 $a_2b_0\in I$，依此类推；

当 $k=n$ 时，由 $\sum_{i+j=n}a_i\alpha^i\left(b_j\right)\in I$ 可得 $a_0b_n\in I$，$a_1b_{n-1}\in I$，…，$a_nb_0=b_0\in I$；

当 $k=n+1$ 时，由 $\sum_{i+j=n+1}a_i\alpha^i\left(b_j\right)\in I$ 可得 $a_0b_{n+1}\in I$，$a_1b_n\in I$，…，$a_nb_1=b_1\in I$，$a_{n+1}b_0\in I$；

依此类推可得 $b_0\in I$，$b_1\in I$，…，$b_m\in I$，…，故由引理 3 可得

$$\sum k_i\left(x\right)c_i=f\left(x\right)g\left(x\right)=\sum_{j=0}^{\infty}f\left(x\right)b_jx^j\in\left(f\left(x\right)\right)\cdot I$$

定理 2：设 R 是有单位元 1 的完全凝聚的 α-相容的交换环，α 是环 R 的自同构，$f\left(x\right)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$。如果存在 $n\geq1$，使得 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$，$a_n=1$，那么 $A=R[\![x;\alpha]\!]/\left(f\left(x\right)\right)$ 是忠实平坦的右 R-模。

证明：显然 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 都是幂等元，则由定理 1 可知 A 是平坦右 R-模。下证对于 R 的任意有限生成的真左理想 I，$I\neq R$，一定有 $AI\neq A$，则根据文献[4]可得 A 是忠实平坦的右 R-模。下证 A 中的单位元 $1+\left(f\left(x\right)\right)$ 必不在 AI 中，则 $AI\neq A$。

反设 A 中的单位元 $1+\left(f\left(x\right)\right)\in AI$，则存在 $h_i\left(x\right)\in R[\![x;\alpha]\!]$，$c_i\in I$，使得

$$1+\left(f\left(x\right)\right)=\sum\left(h_i\left(x\right)+\left(f\left(x\right)\right)\right)c_i=\sum h_i\left(x\right)c_i+\left(f\left(x\right)\right)$$

由于 $h_i\left(x\right)\in R[\![x;\alpha]\!]$，$c_i\in I$，于是由引理 3 知 $\sum h_i\left(x\right)c_i\in I[\![x;\alpha]\!]$，从而存在 $g\left(x\right)\in R[\![x;\alpha]\!]$，使得 $1+f\left(x\right)g\left(x\right)\in I[\![x;\alpha]\!]$。由于 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$，于是由引理 2 可得

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots+a_{n+m}x^{n+m}+\cdots\\&=x^n\alpha^{-n}\left(a_n\right)+x^n\alpha^{-n}\left(a_{n+1}\right)x+\cdots+x^n\alpha^{-n}\left(a_{n+m}\right)x^m+\cdots\\&=x^n\left(\alpha^{-n}\left(a_n\right)+\alpha^{-n}\left(a_{n+1}\right)x+\cdots+\alpha^{-n}\left(a_{n+m}\right)x^m+\cdots\right)\end{aligned}$$

设

$$p\left(x\right)=\alpha^{-n}\left(a_n\right)+\alpha^{-n}\left(a_{n+1}\right)x+\cdots+\alpha^{-n}\left(a_{n+m}\right)x^m+\cdots,$$

则 $f\left(x\right)=x^np\left(x\right)$，所以

$$1+f\left(x\right)g\left(x\right)=1+x^np\left(x\right)g\left(x\right)\in I[\![x;\alpha]\!].$$

于是必有 $1\in I$，由此可得 $I=R$，这与假设 $I\neq R$ 相矛盾，故 A 是忠实平坦的右 R-模。

推论 2：设 R 是有单位元 1 的完全凝聚的交换环，$f\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$。如果存在 $n\geq1$，使得 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$，$a_n=1$，那么 $R[\![x]\!]/\left(f\left(x\right)\right)$ 是忠实平坦的右 R-模。

证明：在 $R[\![x;\alpha]\!]$ 中，令 $\alpha=1$，则有 $R[\![x;\alpha]\!]\cong R[\![x]\!]$，故由定理 2 知推论成立。

参考文献

[1] Hashemi, E. (2006) Compatible Ideals and Radicals of Ore Extensions. *New York Journal of Mathematics*, **12**, 349-356.

[2] 佟文延. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

[3] 周伯壎. 同调代数[M]. 北京: 科技出版社, 1983: 144-153.

[4] 杨静化. 关于 R[X]的剩余类环的同调维数[J]. 南京大学数学半年刊, 1998, 15(2): 251-256.