Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 921-927
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010107

活动标架下的双曲抛物面

刘晓周，包图雅

内蒙古民族大学数理学院，内蒙古 通辽
Email: liuxz666@126.com

收稿日期：2020年9月21日；录用日期：2020年10月6日；发布日期：2020年10月13日

摘 要

双曲抛物面是微分几何中一常见研究对象，本文用活动标架理论得到一些双曲抛物面的活动标架基本量，进而去研究双曲抛物面。

关键词

双曲抛物面，活动标架法，施密特正交化法，不可展曲面

The Hyperbolic Paraboloid under the Moving Frame

Xiaozhou Liu, Tuya Bao

College of Mathematics and Physics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia
Email: liuxz666@126.com

Received: Sep. 21st, 2020; accepted: Oct. 6th, 2020; published: Oct. 13th, 2020

Abstract

Hyperbolic paraboloid is a common object in differential geometry. In this paper, we use the theory of moving frame to get some basic quantities of Hyperbolic paraboloid, and then study Hyperbolic paraboloid.

Keywords

Hyperbolic Paraboloid, Moving Frame Method, Schmidt Orthogonalization Method, Undevelopable Surface

文章引用: 刘晓周, 包图雅. 活动标架下的双曲抛物面[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 921-927.
DOI: 10.12677/pm.2020.1010107

活动标架法是微分几何中研究曲面的一个重要方法，能够很好地分析曲面的性质[1]。双曲抛物面是微分几何的一个重要研究对象，在生活中有着广泛应用。参考文献[2]，利用参数变换给双曲抛物面构造曲率线网参数表示；参考文献[3]分析通过双曲抛物面一条直母线的平面与其他直母线的位置关系，研究了双曲抛物面的直母线在特殊平面上的射影；参考文献[4]对双曲抛物面的直纹性进行探究，总结了双曲抛物面在建筑、电力工程、日常生活、宇宙学中的应用。下面根据活动标架理论，得到活动标架下双曲抛物面的一些基本量[5]，以便进一步去分析双曲抛物面。

活动标架法首先要寻找一个活动标架，使得活动标架与双曲抛物面上的点一一对应起来。我们在曲面上选取正交坐标网，我们取双曲抛物面上的曲率线网[2]。但是在计算中我们发现，利用双曲抛物面上的曲率线网计算过程很复杂。因此我们使用双曲抛物面上的常用参数 $r(u,v)=(u+v,u-v,-4uv)$，通过计算得到 $r_u=(1,1,-4v)$， $r_v=(1,-1,-4u)$，但是 $F=r_u\cdot r_v=(1,1,-4v)\cdot(1,-1,-4u)=16uv\neq 0$，不是我们想要的正交坐标网。为此在这里我们对 r_u 和 r_v 施行施密特正交化法，使其成为正交的单位向量[6]。具体做法如下：

正交化： $r_u'=r_u=(1,1,-4v)$，

$$r_v'=r_v-\frac{(r_v,r_u')}{(r_u',r_u')}r_u'=\left(1-\frac{16uv}{2+16v^2},-1-\frac{16uv}{2+16v^2},-4u+\frac{64uv^2}{2+16v^2}\right)。$$

单位化： $r_u''=\dfrac{r_u'}{|r_u'|}=\dfrac{1}{\sqrt{2+16v^2}}(1,1,-4v)$，

$$r_v''=\frac{r_v'}{|r_v'|}=\frac{2+16v^2}{\sqrt{8(1+8v^2)(8u^2+8v^2+1)}}(1,-1,-4u)+\frac{-16uv}{\sqrt{8(1+8v^2)(8u^2+8v^2+1)}}(1,1,-4v)。$$

这样我们得到了一组正交的单位向量组，我们令：

$$e_1=r_u''=\frac{1}{\sqrt{2+16v^2}}(1,1,-4v),$$

$$e_2=r_v''=\frac{\sqrt{2+16v^2}}{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}(1,-1,-4u)+\frac{-8uv}{\sqrt{(2+16v^2)(8u^2+8v^2+1)}}(1,1,-4v),$$

$$e_3=e_1\times e_2=\frac{1}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}(-2u-2v,2u-2v,-1),$$

这样我们就完成了活动标架法的第一步，即找到了一个**双参数的活动标架**。

定理 1：双曲抛物面 $r(u,v)=(u+v,u-v,-4uv)$ 的相对分量为：

$$\omega_1^2=\frac{8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}(1+8v^2)}\mathrm{d}v,\omega_1^3=\frac{4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v,$$

$$\omega_2^1=\frac{-8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}(1+8v^2)}\mathrm{d}v,\omega_2^3=\frac{2\sqrt{2+16v^2}}{8u^2+8v^2+1}\mathrm{d}u+\frac{-32uv}{(8u^2+8v^2+1)\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v,$$

$$\omega_3^1=\frac{-4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v,\omega_3^2=\frac{-2\sqrt{2+16v^2}}{8u^2+8v^2+1}\mathrm{d}u+\frac{32uv}{\left(8u^2+8v^2+1\right)\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\text{。}$$

证明：对双参数的活动标架进行微分：

$$\mathrm{d}r=\{1,1,-4v\}\mathrm{d}u+\{1,-1,-4u\}\mathrm{d}v=\omega^1e_1+\omega^2e_2\text{，}$$

把 e_1 和 e_2 代入，得到：

$$\begin{aligned}&\frac{\omega^1}{\sqrt{2+16v^2}}(1,1,-4v)+\frac{\sqrt{2+16v^2}\,\omega^2}{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}(1,-1,-4u)+\frac{-8uv\omega^2}{\sqrt{\left(2+16v^2\right)\left(8u^2+8v^2+1\right)}}(1,1,-4v)\\&=\{1,1,-4v\}\mathrm{d}u+\{1,-1,-4u\}\mathrm{d}v\end{aligned}\text{，}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\omega^1}{\sqrt{2+16v^2}}+\dfrac{\sqrt{2+16v^2}\,\omega^2}{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}+\dfrac{-8uv\omega^2}{\sqrt{\left(2+16v^2\right)\left(8u^2+8v^2+1\right)}}=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v\\[2ex]\dfrac{\omega^1}{\sqrt{2+16v^2}}-\dfrac{\sqrt{2+16v^2}\,\omega^2}{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}+\dfrac{-8uv\omega^2}{\sqrt{\left(2+16v^2\right)\left(8u^2+8v^2+1\right)}}=\mathrm{d}u-\mathrm{d}v\\[2ex]\dfrac{-4v\omega^1}{\sqrt{2+16v^2}}+\dfrac{-4u\sqrt{2+16v^2}\,\omega^2}{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}+\dfrac{32uv^2\omega^2}{\sqrt{\left(2+16v^2\right)\left(8u^2+8v^2+1\right)}}=-4v\mathrm{d}u-4u\mathrm{d}v\end{cases}\text{，}$$

解得
$$\begin{cases}\omega^1=\sqrt{2+16v^2}\,\mathrm{d}u+\dfrac{16uv}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\\[2ex]\omega^2=\dfrac{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\end{cases}\text{。}$$

$$\mathrm{d}e_1=\left(\frac{-16v\mathrm{d}v}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{-16v\mathrm{d}v}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{-4\mathrm{d}v}{\sqrt{2+16v^2}}+\frac{64v^2\mathrm{d}v}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)=\omega_1^2e_2+\omega_1^3e_3\text{，}$$

把 e_2 和 e_3 代入，得到：

$$\begin{aligned}&\omega_1^2\frac{\sqrt{2+16v^2}}{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}(1,-1,-4u)+\omega_1^2\frac{-8uv}{\sqrt{\left(2+16v^2\right)\left(8u^2+8v^2+1\right)}}(1,1,-4v)\\&+\omega_1^3\frac{1}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}(-2u-2v,2u-2v,-1)\\&=\left(\frac{-16v\mathrm{d}v}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{-16v\mathrm{d}v}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}},\frac{-4\mathrm{d}v}{\sqrt{2+16v^2}}+\frac{64v^2\mathrm{d}v}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}\text{，}$$

解得：
$$\begin{cases}\omega_1^2=\dfrac{8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\left(1+8v^2\right)}\mathrm{d}v\\[2ex]\omega_1^3=\dfrac{4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\end{cases}\text{。}$$

DOI: 10.12677/pm.2020.1010107

$$
\mathrm{d}e_2^{\mathrm{T}} = \left(\begin{array}{l}
\dfrac{-8u-8v-64uv^2-64v^3}{\sqrt{2+16v^2}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{-16u\left[8u^2-8uv-64v^4-64uv^3+1\right]}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v, \\
\dfrac{8u-8v+64uv^2-64v^3}{\sqrt{2+16v^2}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{-16u\left[8u^2+8uv-64v^4+64uv^3+1\right]}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{8u^2+8v^2+1}}\mathrm{d}v, \\
\dfrac{-2\sqrt{2+16v^2}}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{128uv\left(4u^2+8v^2+1\right)}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v
\end{array}\right), = \omega_2^1 e_1+\omega_2^3 e_3
$$

把 e_1 和 e_3 代入，得到：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\omega_2^1}{\sqrt{2+16v^2}}+\dfrac{(-2u-2v)\omega_2^3}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}=\dfrac{-8u-8v-64uv^2-64v^3}{\sqrt{2+16v^2}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{-16u\left[\left(1+8v^2\right)\left(1-8v^2\right)+8u^2\right]}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v \\
\dfrac{\omega_2^1}{\sqrt{2+16v^2}}+\dfrac{(2u-2v)\omega_2^3}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}=\dfrac{8u-8v+64u^2v-64v^3}{\sqrt{2+16v^2}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{-16u\left(8uv+8v^2+1\right)}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{8u^2+8v^2+1}}\mathrm{d}v \\
\dfrac{-4v\omega_2^1}{\sqrt{2+16v^2}}+\dfrac{-\omega_2^3}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}=\dfrac{-2\sqrt{2+16v^2}}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{128uv\left(4u^2+8v^2+1\right)}{\left(2+16v^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v
\end{cases},
$$

解得 $\begin{cases}
\omega_2^1=\dfrac{-8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\left(1+8v^2\right)}\mathrm{d}v \\
\omega_2^3=\dfrac{2\sqrt{2+16v^2}}{8u^2+8v^2+1}\mathrm{d}u+\dfrac{-32uv}{\left(8u^2+8v^2+1\right)\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v
\end{cases}$。

$$
\mathrm{d}e_3 = \left(\begin{array}{l}
\dfrac{-16v^2+16uv-2}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{-16u^2+16uv-2}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v, \\
\dfrac{16v^2+16uv+2}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{-16u^2-16uv-2}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v, \\
\dfrac{8u}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u+\dfrac{8v}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v
\end{array}\right) = \omega_3^1 e_1+\omega_3^2 e_2
$$

把 e_1 和 e_2 代入，解得 $\begin{cases}
\omega_3^1=\dfrac{-4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v \\
\omega_3^2=\dfrac{-2\sqrt{2+16v^2}}{8u^2+8v^2+1}\mathrm{d}u+\dfrac{32uv}{\left(8u^2+8v^2+1\right)\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v
\end{cases}$。

通过上述计算，我们得到了相对分量，显然有 $\omega_1^2=-\omega_2^1,\omega_2^3=-\omega_3^2,\omega_1^3=-\omega_3^1$ 成立。

定理 2：双曲抛物面的结构方程：

$$\mathrm{d}\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1=0\text{，}$$

$$\mathrm{d}\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2=\frac{16u}{\sqrt{2+16v^2}\sqrt{8u^2+8v^2+1}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\text{，}$$

$$\mathrm{d}\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=0\text{，}$$

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\omega_1^3\wedge\omega_3^2=\frac{8}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\text{，}$$

$$\mathrm{d}\omega_2^3=\omega_2^1\wedge\omega_1^3=0\text{，}$$

$$\mathrm{d}\omega_3^1=\omega_3^2\wedge\omega_2^1=\frac{32u}{\sqrt{2+16v^2}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\text{。}$$

证明：

$$\mathrm{d}\omega^1=\mathrm{d}\left(\sqrt{2+16v^2}\mathrm{d}u+\frac{16uv}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\right)=\frac{-16v}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v+\frac{16v}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=0\text{，}$$

$$\omega^2\wedge\omega_2^1=\frac{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}{\sqrt{2+16v^2}}\frac{8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\left(1+8v^2\right)}\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}v=0\text{，}$$

故有 $\mathrm{d}\omega^1=\omega^2\wedge\omega_2^1$ 成立。

$$\mathrm{d}\omega^2=\mathrm{d}\left(\frac{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\right)=\frac{2\frac{8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\frac{16u}{\sqrt{2+16v^2}\sqrt{8u^2+8v^2+1}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\text{，}$$

$$\begin{aligned}\omega^1\wedge\omega_1^2&=\left(\sqrt{2+16v^2}\mathrm{d}u+\frac{16uv}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\right)\wedge\frac{8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\left(1+8v^2\right)}\mathrm{d}v\\&=\frac{16u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\end{aligned}\text{，}$$

故有 $\mathrm{d}\omega^2=\omega^1\wedge\omega_1^2$ 成立。

而 $\mathrm{d}\omega^3=0$，

$$\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3=\frac{4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v+\frac{-4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=0\text{，}$$

故有 $\mathrm{d}\omega^3=\omega^1\wedge\omega_1^3+\omega^2\wedge\omega_2^3$ 成立。

$$\mathrm{d}\omega_1^2=\mathrm{d}\left(\frac{8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\left(1+8v^2\right)}\mathrm{d}v\right)=\frac{8\left(1+8v^2\right)}{\left(1+8v^2\right)\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v=\frac{8}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v\text{，}$$

$$\omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = \frac{8}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v,$$

故有 $\mathrm{d}\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$ 成立。

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_2^3 &= \mathrm{d}\left(\frac{2\sqrt{2+16v^2}}{8u^2+8v^2+1}\mathrm{d}u + \frac{-32uv}{\left(8u^2+8v^2+1\right)\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{-512u^2v-512v^3-64v+64v+512v^3+512u^2v}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^2\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = 0\end{aligned},$$

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = \frac{8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\left(1+8v^2\right)} \frac{4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\sqrt{2+16v^2}} \mathrm{d}v \wedge \mathrm{d}v = 0,$$

故有 $\mathrm{d}\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3$ 成立。

$$\mathrm{d}\omega_3^1 = \mathrm{d}\left(\frac{-4}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\right) = \frac{32u}{\sqrt{2+16v^2}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v,$$

$$\begin{aligned}\omega_3^2 \wedge \omega_2^1 &= \left(\frac{-2\sqrt{2+16v^2}}{8u^2+8v^2+1}\mathrm{d}u + \frac{32uv}{\left(8u^2+8v^2+1\right)\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\right) \wedge \frac{-8u}{\sqrt{8u^2+8v^2+1}\left(1+8v^2\right)}\mathrm{d}v \\ &= \frac{32u}{\sqrt{2+16v^2}\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v\end{aligned},$$

故有 $\mathrm{d}\omega_3^1 = \omega_3^2 \wedge \omega_2^1$ 成立。

这样，我们得到了双曲抛物面结构方程。

应用：双曲抛物面是不可展曲面。

根据活动标架理论，高斯曲率 $K = \frac{-\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2}$。

把双曲抛物面的活动标架基本量带入，得到双曲抛物面的高斯曲率：

$$\begin{aligned}K = \frac{-\mathrm{d}\omega_1^2}{\omega^1 \wedge \omega^2} &= \frac{-\frac{8}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v}{\left(\sqrt{2+16v^2}\mathrm{d}u + \frac{16uv}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v\right) \wedge \frac{2\sqrt{8u^2+8v^2+1}}{\sqrt{2+16v^2}}\mathrm{d}v} \\ &= \frac{-4}{\left(8u^2+8v^2+1\right)^2} \neq 0\end{aligned}$$

因此得到双曲抛物面不可展。

本文得到了双曲抛物面的活动标架基本量，为今后利用活动标架法研究双曲抛物面奠定了基础。又利用双曲抛物面的活动标架基本量，验证了双曲抛物面是不可展曲面这一性质。

基金项目

内蒙古自治区青年科技英才支持计划(NJYT-19-A09)；内蒙古自然科学基金(2018MS01011)；国家自

然科学基金(11661062)。

参考文献

[1] 梅向明, 黄敬之. 微分几何[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2008: 229-241.
[2] 张量, 宋卫东. 双曲抛物面上的曲率线网及其应用[J]. 高等数学研究, 2014, 17(4): 53-54.
[3] 王阳. 双曲抛物面直母线的性质[J]. 洛阳师专学报, 1998(2): 20-23.
[4] 桂国祥, 刘雅芸. 双曲抛物面在实际生活中的应用[J]. 产业与科技论坛, 2018, 17(16): 52-53.
[5] 刘晓周, 包图雅. 活动标架下的正螺面[J]. 内蒙古民族大学学报(自然科学蒙文版), 2020(1): 1-5.
[6] 包图雅, 张陆. 曲线上的 Frenet 标架[J]. 湖北民族学院学报(自然科学版), 2015, 33(3): 245-246+255.