Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 928-937
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010108

海森堡群上与分数次积分相关的交换子的有界性

高春芳

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: 1197429204@qq.com

收稿日期：2020年9月28日；录用日期：2020年10月13日；发布日期：2020年10月20日

摘 要

令 $\mathfrak{L}=-\Delta_{\mathbb{H}^n}+V$ 为海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 上具有Gaussian核上界的Schrödinger算子，其中非负位势V属于逆Hölder类 B_q， $q\geq Q/2$。对于 $0<\alpha<Q$，令 $\mathfrak{L}^{-\alpha/2}$ 为 $\mathfrak{L}$ 的分数次积分算子。假设b属于比经典BMO型空间大的 $BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$ 空间。该文证明了交换子 $\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]$ 从 $L^{p_1}(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^{p_2}(\mathbb{H}^n)$ 是有界的，其中 $1<p_1<Q/\alpha$， $1/p_2=1/p_1-\alpha/Q$。

关键词

海森堡群，Gaussian上界，交换子，新BMO函数

The Boundedness of Commutators Associated with Fractional Integrals on the Heisenberg Group

Chunfang Gao

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: 1197429204@qq.com

Received: Sep. 28th, 2020; accepted: Oct. 13th, 2020; published: Oct. 20th, 2020

Abstract

Let $\mathfrak{L}=-\Delta_{\mathbb{H}^n}+V$ be the Schrödinger operator on $\mathbb{H}^n$ with Gaussian kernel bounds, where the

文章引用: 高春芳. 海森堡群上与分数次积分相关的交换子的有界性[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 928-937.
DOI: 10.12677/pm.2020.1010108

nonnegative potential V belongs to the reverse Hölder class B_q, $q \ge Q/2$. Let $\mathfrak{L}^{-\alpha/2}$ be the fractional integrals of $\mathfrak{L}$ for $0<\alpha<Q$. Suppose $b \in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$, which is larger than classical $BMO(\mathbb{H}^n)$. We obtain the boundedness of the commutator $\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]$ from $L^{p_1}(\mathbb{H}^n)$ to $L^{p_2}(\mathbb{H}^n)$, where $1<p_1<Q/\alpha$, $1/p_2 = 1/p_1 - \alpha/Q$.

Keywords

Heisenberg Group, Gaussian Bound, Commutator, New BMO Function

1. 引言

令 $\mathbb{H}^n$ 为海森堡群，$Q=2n+2$ 为其齐次维数。令 $\mathfrak{L}=-\Delta_{\mathbb{H}^n}+V$ 为 $\mathbb{H}^n$ 上的 Schrödinger 算子，其中 $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ 为 $\mathbb{H}^n$ 上的次 Laplace 算子且非负位势 V 属于逆 Hölder 类 B_q， $q \ge Q/2$。

现在，我们考虑 $L^2(\mathbb{H}^n)$ 上的 Schrödinger 算子 $\mathfrak{L}$，假设 $\mathfrak{L}$ 生成一个收缩半群 $\left\{T_t^{\mathfrak{L}}:t>0\right\}=\left\{\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}:t>0\right\}$。令 $P_t(g,h)$ 表示收缩半群 $\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}$ 的核。$P_t(g,h)$ 满足 Gaussian 上界(参见[1] Page 4)，即当 $g,h\in\mathbb{H}^n$ 且 $t>0$ 时，

$$\left|p_t(g,h)\right| \le Ct^{-Q/2}\mathrm{e}^{-ct^{-1}\left|gh^{-1}\right|^2} \tag{1.1}$$

近几年，一些与分数次积分相关的问题被许多学者广泛研究(参见[2]-[7])。其中 X. Duong 和 L. Yan [3]研究的交换子$\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]$从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的有界性引起了我们的兴趣，这里 $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$。E. Bongioanni，E. Harboure 和 O. Salinas [8]引入了一类新 BMO 型空间 $BMO_\rho^\theta(\mathbb{R}^n)$，它是 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 的推广。本文的目的是将 $BMO_\rho^\theta(\mathbb{R}^n)$ 从 $\mathbb{R}^n$ 上推广到 $\mathbb{H}^n$ 上，证明交换子$\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]$从 $L^{p_1}(\mathbb{H}^n)$ 到 $L^{p_2}(\mathbb{H}^n)$ 是有界的，其 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$， $1/p_2=1/p_1-\alpha/Q$。

在本文中，我们用 c 和 C 表示独立于函数的未知正常数，在不同的情况下可能代表不同的值。$A\approx B$ 表示存在一个常数 c 使得 $c^{-1}A\le B\le cA$。

我们回顾一些有关海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 的基本知识。$\mathbb{H}^n$ 是具有底流行 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 的李群，乘积为 $(x,y,t)(x',y',t')=(x+x',y+y',t+t'+2x'y-2xy')$。它的李代数由如下左不变向量场给出

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\frac{\partial}{\partial t},Y_j=\frac{\partial}{\partial y_j}+2x_j\frac{\partial}{\partial t},T=\frac{\partial}{\partial t},j=1,2,\cdots,n。$$

它们满足$\left[X_j,Y_j\right]=-4T,j=1,2,\cdots,n$。次 Laplace 算子 $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ 定义为 $\Delta_{\mathbb{H}^n}=\sum_{j=1}^n\left(X_j^2+Y_j^2\right)$。梯度算子 $\nabla_{\mathbb{H}^n}$ 定义为 $\nabla_{\mathbb{H}^n}=\left(X_1,X_2,\cdots,X_n,Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\right)$。$\mathbb{H}^n$ 上的伸缩变换为 $\delta_\lambda(x,y,t)=\left(\lambda x,\lambda y,\lambda^2 t\right),\lambda>0$。$\mathbb{H}^n$ 上的 Harr 测度与 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度是一致的。我们用 $|E|$ 表示任意可测集 E 上的测度，那么有 $\left|\delta_\lambda E\right|=\lambda^Q|E|$，其中 $Q=2n+2$ 称为 $\mathbb{H}^n$ 的齐次维数。我们用 $|g|=\left(\left(|x|^2+|y|^2\right)+|t|^2\right)^{1/4}$， $g=(x,y,t)\in\mathbb{H}^n$ 定义 $\mathbb{H}^n$ 上的一个齐次范数。该范数满足三角不等式且可导出左不变距离 $d(g,h)=\left|g^{-1}h\right|$。$\mathbb{H}^n$ 上以 g 为中心，r 为半径的球定义为 $B(g,r)=\left\{h\in\mathbb{H}^n:\left|g^{-1}h\right|<r\right\}$。球 $B(0,r)$ 左平移 g 得到球 $B(g,r)$，所以我们有

$|B(g,r)|=\alpha^1 r^Q$，其中 $\alpha^1=|B(0,1)|$。

2. 准备工作

2.1. 分数次积分和辅助函数

定义 2.1 对 $0<\alpha<Q$，Schrödinger 算子 $\mathfrak{L}$ 的分数次积分 $\mathfrak{L}^{-\alpha/2}$ 定义为

$$\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f(g)=\frac{1}{\Gamma(\alpha/2)}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}(f)\frac{\mathrm{d}t}{t^{-\alpha/2+1}}(h)。$$

引理 2.2 对 $0<\alpha<Q$，如果 $1<p_1<Q/\alpha$，$1/p_2=1/p_1-\alpha/Q$，那么

$$\left\|\mathfrak{L}^{-\alpha/2}(f)\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)}\le C\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{H}^n)}。$$

证明：令 $0<\alpha<Q$，经典的分数次积分 I_α 定义为

$$I_\alpha(f)(g)=\int_{\mathbb{H}^n}\frac{f(h)}{|gh^{-1}|^{Q-\alpha}}\mathrm{d}h。$$

因为半群 $\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}$ 的核 $p_t(g,h)$ 满足 Gaussian 上界(1.1)，容易验证，对于任意的 $g\in\mathbb{H}^n$，$\left|\mathfrak{L}^{-\alpha/2}(f)(g)\right|\le CI_\alpha(|f|)(g)$。根据 I_α 的 L^p 有界性，我们可以得到

$$\left\|\mathfrak{L}^{-\alpha/2}(f)\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)}\le C\left\|I_\alpha(|f|)\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)}\le C\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{H}^n)},$$

其中 $1<p_1<Q/\alpha$ 且 $1/p_2=1/p_1-\alpha/Q$。因此，引理 2.2 得证。

定义 2.3 令 $f\in L^q_{loc}(\mathbb{H}^n)$ 和 $B=B(g,r)\subset\mathbb{H}^n$。Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 及其变式 $M_{\sigma,s}f$ 分别定义为

$$Mf(g)=\sup_{g\in B}\frac{1}{B}\int_B|f(h)|\mathrm{d}h,\quad M_{\sigma,s}f(g)=\sup_{g\in B}\left(\frac{1}{|B|^{1-\sigma s/Q}}\int_B|f(h)|^s\,\mathrm{d}h\right)^{1/s}。$$

如果 $\sigma=0$，那么 $M_{0,s}f(g)$ 记为 $M_sf(g)$。

定义 2.4 令 $f\in L^p(\mathbb{H}^n)$ 和 $p\ge1$。与收缩半群 $\{\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}},t>0\}$ 相关的 Sharp 极大函数 $M^{\#}_{\mathfrak{L}}f$ 定义为

$$M^{\#}_{\mathfrak{L}}f(g)=\sup_{g\in B}\frac{1}{|B|}\int_B\left|f(h)-\mathrm{e}^{-t_B\mathfrak{L}}f(h)\right|\mathrm{d}h,$$

其中 $t_B=r_B^2$ 且 r_B 为球 $B\subset\mathbb{H}^n$ 的半径。

引理 2.5 假设收缩半群 $\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}$ 的核 $P_t(g,h)$ 满足 Gaussian 上界(1.1)。令 $\lambda>0$ 和 $f\in L^p(\mathbb{H}^n)$ $(1<p<\infty)$。那么对于每一个 $0<\eta<1$，我们可以找到独立于 λ 和 f 的 $\gamma>0$，使得 $\left|\{g\in\mathbb{H}^n:Mf(g)>A\lambda,M^{\#}_{\mathfrak{L}}f(g)\le\gamma\lambda\}\right|\le\eta\left|g\in\mathbb{H}^n:Mf(g)>\lambda\right|$，其中 $A>1$ 是依赖于 Q 的适当常数。

作为一个结果，对于任意 $f\in L^p(\mathbb{H}^n)$，$1<p<\infty$，我们有下述不等式：

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{H}^n)}\le\|Mf\|_{L^p(\mathbb{H}^n)}\le C\left\|M^{\#}_{\mathfrak{L}}f\right\|_{L^p(\mathbb{H}^n)}。$$

证明：证明过程参见[9]，命题 4.1。

定义 2.6 $\mathbb{H}^n$ 上的一个非负局部 L^q 可积函数 V 被称为属于逆 Hölder 类 B_q $(1<q<\infty)$，如果存在 $C>0$，对于 $\mathbb{H}^n$ 上的任意球 B，如下逆 Hölder 不等式成立：

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B V(g)^q\,\mathrm{d}g\right)^{1/q} \le \frac{C}{|B|}\int_B V(g)\mathrm{d}g 。$$

定义 2.7 对于 $g\in\mathbb{H}^n$，辅助函数 $\rho(g)$ 定义为

$$\rho(g)=\sup_{r>0}\left\{r:\frac{1}{r^{Q-2}}\int_{B(g,r)}V(h)\mathrm{d}h\le 1\right\}。$$

引理 2.8 ([1]，引理 4)假设 $V\in B_q$， $q>Q/2$。对任意 $g,h\in\mathbb{H}^n$，存在常数 $C>0$ 和 $k_0>0$ 使得

$$1/C\left(1+\left|g^{-1}h\right|/\rho(g)\right)^{-k_0}\le\rho(h)/\rho(g)\le C\left(1+\left|g^{-1}h\right|/\rho(g)\right)^{K_0/(K_0+1)} \tag{2.1}$$

一个以 g 为中心， $\rho(g)$ 为半径的球称为临界球。我们用 $\mathbb{Q}=B(g,\rho(g))$ 表示临界球。

2.2. 新 BMO 型空间

定义 2.9 新 BMO 型空间 $BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$ $(0<\theta<\infty)$ 定义为 $\mathbb{H}^n$ 上所有局部可积函数 b 的集合，对任意 $g\in\mathbb{H}^n$ 和 $r>0$，b 满足如下条件

$$\frac{1}{|B(g,h)|}\int_{B(g,h)}\left|b(h)-b_B\right|\mathrm{d}h\le C\left(1+r/\rho(g)\right)^\theta, \tag{2.2}$$

其中 $b_B=\frac{1}{|B|}\int_B b(h)\mathrm{d}h$。 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$ 的范数由满足(2.2)的常数的下确界给出，记为 $[b]_\theta$。

下面，我们给出一些关于函数 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$ 的引理。

引理 2.10 令 $\theta>0$ 和 $1\le s<\infty$。如果 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$，那么

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|b(h)-b_B\right|^s\mathrm{d}h\right)^{1/s}\le C[b]_\theta\left(1+\frac{r}{\rho(g)}\right)^{\theta'} \tag{2.3}$$

对所有 $B=B(g,r)$， $g\in\mathbb{H}^n$ 及 $r>0$ 均成立，其中 $\theta'=(k_0+1)\theta$ 且 k_0 为(2.1)中出现的常数。

证明：根据经典的 John-Nirenberg 不等式可知，给定一个球 B_0 和一个函数 $f\in BMO(B_0)$，对于任意球 $B\subset B_0$，当 $1\le s<\infty$ 时，我们有

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|f(h)-f_B\right|^s\mathrm{d}h\right)^{1/s}\le C\|f\|_{BMO(B_0)}, \tag{2.4}$$

其中 C 是独立于球 B_0 的常数。

因此，为了证明(2.3)，我们只需证明如下假设：如果 $R\ge 1$ 且 $\mathbb{Q}$ 为临界球，那么我们可以得到 $b\in BMO(R\mathbb{Q})$ 和 $\|b\|_{BMO(R\mathbb{Q})}\le C[b]_\theta(1+R)^{(k_0+1)\theta}$。如果这个假设是正确的，那么对于任意的球 $B\subset R\mathbb{Q}$，由(2.4)可得

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|b(h)-b_B\right|^s\mathrm{d}h\right)^{1/s}\le C[b]_\theta(1+R)^{(k_0+1)\theta}。 \tag{2.5}$$

现在，令 $B=B(g,r)$ 和 $\mathbb{Q}=B(g,\rho(g))$，这里的 $g\in\mathbb{H}^n$ 且 $r>0$。如果 $r\le\rho(g)$，选择 $R=1$。通过(2.5)，我们得到(2.3)。如果 $r>\rho(g)$，注意到 $B=(r/\rho(g))\mathbb{Q}$。那么，当 $R=r/\rho(g)$ 时，由(2.5)可得(2.3)。

接下来，我们证明上述假设成立。令 $B=B(z,r)\subset R\mathbb{Q}$， $z\in\mathbb{H}^n$ 和 $r>0$。由(2.1)可知 $\rho(g)(1+R)^{-k_0}\le C\rho(z)$，又 $r<R\rho(g)$，因此 $r/\rho(z)\le C(1+R)^{k_0+1}$。由 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$ 可得

$$\frac{1}{|B|}\int_B |b(h)-b_B|\mathrm{d}h \le C[b]_\theta (1+R)^{(k_0+1)\theta}。$$

综上，我们完成了引理 2.10 的证明。

引理 2.11 令 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$，$B=B(g,r)$ 和 $s\ge 1$。那么

$$\left(\frac{1}{|2^k B|}\int_{2^k B}|b(h)-b_B|^s \mathrm{d}h\right)^{1/s} \le C[b]_\theta k\left(1+\frac{2^k r}{\rho(g)}\right)^{\theta'}$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$ 及 $r>0$ 均成立，其中 $\theta'=(k_0+1)\theta$ 且 k_0 为(2.1)中出现的常数。

证明：根据引理 2.10，可得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{|2^k B|}\int_{2^k B}|b(h)-b_B|^s \mathrm{d}h\right)^{1/s}\\
&\le C\left(\frac{1}{|2^k B|}\int_{2^k B}|b(h)-b_{2^k B}|^s \mathrm{d}h\right)^{1/s} + C\sum_{j=1}^{k}|b_{2^j B}-b_{2^{j-1}B}|\\
&\le C[b]_\theta \sum_{j=1}^{k}\left(1+\frac{2^j r}{\rho(g)}\right)^{\theta'} \le C[b]_\theta k\left(1+\frac{2^k r}{\rho(g)}\right)^{\theta'}
\end{aligned}$$

引理 2.12 如果收缩半群 $\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}$ 的核 $p_t(g,h)$ 满足 Gaussian 上界(1.1)且 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$，那么，对于任意 $f\in L^p(\mathbb{H}^n)$，$p>1$，$g\in\mathbb{H}^n$ 和 $1<r<\infty$，我们有

$$\sup_{g\in B}\frac{1}{|B|}\int_B \left|\mathrm{e}^{-t_B\mathfrak{L}}(b-b_B)f(h)\right|\mathrm{d}h \le C[b]_\theta \left(M\left(|f|\right)^s\right)^{1/s}(g),$$

其中 $t_B=r_B^2$。

证明：对于 $f\in L^p(\mathbb{H}^n)$，$p>1$，$g\in\mathbb{H}^n$ 以及 $g\in B$，我们有

$$\frac{1}{|B|}\int_B \left|\mathrm{e}^{-t_B\mathfrak{L}}(b-b_B)f(h)\right|\mathrm{d}h \le C(M_1+M_2),$$

其中

$$\begin{cases}
M_1 := \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B\int_{2B}|P_t(g,h)||(b-b_B)f(h)|\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\
M_2 := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|B|}\int_B\int_{2^{k+1}B\setminus 2^k B}|P_t(g,h)||(b-b_B)f(h)|\mathrm{d}h\mathrm{d}g
\end{cases}$$

对于 M_1，应用(1.1)和引理 2.10，我们通过 Hölder 不等式可以推出

$$\begin{aligned}
M_1 &\le \frac{1}{|B|}\int_B\int_{2B}\frac{C}{t_B^{Q/2}}\mathrm{e}^{-c|gh^{-1}|^2/t_B}|(b(h)-b_B)f(h)|\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\
&\le \frac{1}{|B|}\int_B\int_{2B}\frac{C}{r_B^{Q}}\mathrm{e}^{-c}|(b(h)-b_B)f(h)|\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\
&\le \frac{C}{|B|}\int_B\int_{2B}|(b(h)-b_B)f(h)|\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\
&\le C\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|b(h)-b_B|^{s'}\mathrm{d}h\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{|2B|}\int_{2B}|f(h)|^s\mathrm{d}h\right)^{1/s}\\
&\le C[b]_\theta\left(1+r/\rho(g)\right)^{\theta'}\cdot M_s f(g) \le C[b]_\theta M_s f(g)
\end{aligned}$$

对于 M_2，因为 $g\in B(g_0,r_B)$， $h\in 2^{k+1}B\setminus 2^kB$，所以 $|gh^{-1}|\approx 2^k r_B$。根据(1.1)和引理 2.11，由 Hölder 不等式可以得到

$$
\begin{aligned}
M_2 &\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|B|}\int_B\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\frac{C}{t_B^{Q/2}}\mathrm{e}^{-c|gh^{-1}|^2/t_B}\left|\left(b(h)-b_B\right)f(h)\right|\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\
&\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|B|}\int_B\int_{2^{k+1}B\setminus 2^kB}\frac{C}{r_B^{Q}}\mathrm{e}^{-c2^{2k}r_B^2/r_B^2}\left|\left(b(h)-b_B\right)f(h)\right|\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-c2^{2k}}\frac{1}{|B|}\int_{2^{k+1}B}\left|\left(b(h)-b_B\right)f(h)\right|\mathrm{d}h\mathrm{d}g\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-c2^{2k}}\left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\left|b(h)-b_{2^{k+1}B}\right|^{s'}\mathrm{d}h\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\left|f(h)\right|^{s}\mathrm{d}h\right)^{1/s}\\
&\quad +C\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-c2^{2k}}\left|b_{2^{k+1}B}-b_B\right|\left(\frac{1}{|2^{k+1}B|}\int_{2^{k+1}B}\left|f(h)\right|^{s}\mathrm{d}h\right)^{1/s}\\
&\le C[b]_\theta\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-c2^{2k}}\left(1+2^kr/\rho(g)\right)^{\theta'}\cdot M_sf(g)+C\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-c2^{2k}}M_sf(g)\\
&\le CM_sf(g)
\end{aligned}
$$

综上，我们完成了引理 2.12 的证明。

3. 主要结果的证明

我们首先给出微分算子 $\mathfrak{L}^{-\alpha/2}-\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}\mathfrak{L}^{-\alpha/2}$ 的核估计，它对于证明主要结果有很重要的作用。

引理 3.1 假设收缩半群 $\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}$ 的核 $P_t(g,h)$ 满足 Gaussian 上界(1.1)。那么对于 $0<\alpha<1$，与微分算子 $\mathfrak{L}^{-\alpha/2}-\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}\mathfrak{L}^{-\alpha/2}$ 相关的核 $K_{\alpha,t}(g,h)$ 满足

$$\left|K_{\alpha,t}(g,h)\right|\le\frac{Ct}{|gh^{-1}|^{Q-\alpha+2}}。$$

证明：根据[10] Page 258，令 $f_{\alpha,t}(z)=z^{-\alpha/2}\left(1-\mathrm{e}^{-tz}\right)$。我们首先用半群 $\mathrm{e}^{-z\mathfrak{L}}$ 表示算子 $f_{\alpha,t}(\mathfrak{L})$。$f_{\alpha,t}(\mathfrak{L})$ 定义为 $f_{\alpha,t}(\mathfrak{L})=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\mathfrak{L}-\lambda I)^{-1}f_{\alpha,t}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$，其中 $\gamma=\gamma_+\cup\gamma_-$，当 $t\ge 0$ 时，$\gamma_+(t)=t\mathrm{e}^{iv}$，当 $t<0$ 时，$\gamma_-(t)=-t\mathrm{e}^{-iv}$，并且 $v>\pi/2$。

对于 $\lambda\in\gamma$，令 $(\mathfrak{L}-\lambda I)^{-1}=\int_0^\infty\mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{e}^{-s\mathfrak{L}}\mathrm{d}s$。改变积分顺序得 $f_{\alpha,t}(\mathfrak{L})=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-s\mathfrak{L}}n(s)\mathrm{d}s$，其中 $n(s)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\mathrm{e}^{\lambda s}f_{\alpha,t}(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。因此，$f_{\alpha,t}(\mathfrak{L})$ 的核 $K_{\alpha,t}(g,h)$ 可以表示为 $K_{\alpha,t}(g,h)=\int_0^\infty P_s(g,h)n(s)\mathrm{d}s$。

由(1.1)可得

$$\left|K_{\alpha,t}(g,h)\right|\le C\int_0^\infty s^{-Q/2}\mathrm{e}^{-c|gh^{-1}|/s}\left(\int_0^\infty\left|\mathrm{e}^{s\lambda}\lambda^{-\alpha/2}\left(1-\mathrm{e}^{-t\lambda}\right)\right|\mathrm{d}|\lambda|\right)\mathrm{d}s。\tag{3.1}$$

注意到，当 $t|\lambda|>1$ 时，$\left|1-\mathrm{e}^{-t\lambda}\right|\le c$ 且当 $t|\lambda|\le 1$ 时，$\left|1-\mathrm{e}^{-t\lambda}\right|\le ct|\lambda|$。对应于 $t|\lambda|>1$ 和 $t|\lambda|\le 1$ 上的积分，我们将(3.1)中右边积分分为第一部分 A_1 和第二部分 A_2。那么，$A_1\le C\int_0^\infty s^{-Q/2}\mathrm{e}^{-c|gh^{-1}|/s}\int_{1/t}^\infty\mathrm{e}^{-\beta sv}v^{-\alpha/2}\mathrm{d}v\mathrm{d}s$，$\beta>0$。令 $u=tv$ 和 $h=s/t$，我们有

$$
\begin{aligned}
A_1 &\le Ct^{-Q/2}\int_0^\infty h^{-Q/2}\mathrm{e}^{-c\left|gh^{-1}\right|^2/th}\int_1^\infty \mathrm{e}^{-\beta hu}u^{-\alpha/2}t^{\alpha/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}h \\
&\le Ct^{(\alpha-Q)/2}\int_0^\infty h^{(\alpha-Q-2)/2}\mathrm{e}^{-c\left|gh^{-1}\right|^2/th}\frac{\mathrm{d}h}{h} \\
&\le \frac{Ct}{\left|gh^{-1}\right|^{Q-\alpha+2}}
\end{aligned}
$$
。

与 A_1 相类似，我们得到

$$
\begin{aligned}
A_2 &\le C\int_0^\infty s^{-Q/2}\mathrm{e}^{-c\left|gh^{-1}\right|^2/s}\int_0^{1/t}\mathrm{e}^{-\beta sv}v^{-\alpha/2}(tv)\mathrm{d}v\mathrm{d}s \\
&\le Ct^{(\alpha-Q)/2}\int_0^\infty h^{-Q/2}\mathrm{e}^{-c\left|gh^{-1}\right|^2/th}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\beta hu}u^{(2-\alpha)/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}h \\
&\le Ct^{(\alpha-Q)/2}\int_0^\infty h^{(\alpha-Q-2)/2}\mathrm{e}^{-c\left|gh^{-1}\right|^2/th}\frac{\mathrm{d}h}{h} \\
&\le \frac{Ct}{\left|gh^{-1}\right|^{Q-\alpha+2}}
\end{aligned}
$$
。

结合 A_1 和 A_2，我们完成了引理 3.1 的证明。

下面，我们给出主要结果及其证明。

定理 3.2 假设收缩半群 $\mathrm{e}^{-t\mathfrak{L}}$ 的核 $P_t(g,h)$ 满足 Gaussian 上界(1.1)。令 $b\in BMO_\rho^\theta(\mathbb{H}^n)$。那么对于 $0<\alpha<Q$，$1<1/p_1<Q/\alpha$ 以及 $1/p_2=1/p_1-\alpha/Q$，我们有

$$\left\|\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)}\le C[b]_\theta\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{H}^n)}。$$

证明：我们分两种情形来证明此定理。

情形一：我们考虑 $0<\alpha<1$ 的情形。选择两个大于 1 的实数 r 和 s 使得 $rs<p<Q/\alpha$。我们将证明存在一个常数 C 使得对于所有的 $g\in\mathbb{H}^n$ 和 $g\in B$，如下不等式成立：

$$\frac{1}{|B|}\int_B\left|\left(1-\mathrm{e}^{-t_B\mathfrak{L}}\right)\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f(h)\right|\mathrm{d}h\le C[b]_\theta\left(M_s\left(\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f\right)(g)+M_{\alpha,rs}(f)(g)\right), \tag{3.2}$$

其中 $t_B=r_B^2$ 且 r_B 为球 B 的半径。

由(1.1)，(3.2)和极大函数的有界性可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)} \\
&\le C\left\|M_{\mathfrak{L}}^{\#}\left(\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f\right)(g)\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)} \\
&\le C[b]_\theta\left\|M_s\left(\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f\right)(g)\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)}+C[b]_\theta\left\|M_{\alpha,rs}f(g)\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)} \\
&\le C[b]_\theta\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{H}^n)}
\end{aligned}
,
$$

其中 $1/p_2=1/p_1-\alpha/Q$ 且 $1<1/p_1<Q/\alpha$。

我们现在证明(3.2)。对于 $g\in\mathbb{H}^n$ 和 $B=B(g_0,r_B)$，令 $f_1=f\chi_{2B}$ 和 $f_2=f-f_1$。我们有

$$\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f=(b-b_B)\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f-\mathfrak{L}^{-\alpha/2}(b-b_B)f_1-\mathfrak{L}^{-\alpha/2}(b-b_B)f_2$$

和

$$e^{-t_B\mathfrak{L}}\left(\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f\right)=e^{-t_B\mathfrak{L}}\left\{\left(b-b_B\right)\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f-\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\left(b-b_B\right)f_1-\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\left(b-b_B\right)f_2\right\}。$$

那么

$$\frac{1}{|B|}\int_B\left|\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f(h)-e^{-t_B\mathfrak{L}}\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f(h)\right|dh\le M_1+M_2+M_3+M_4+M_5,$$

其中

$$\begin{cases}M_1:=\frac{1}{|B|}\int_B\left|\left(b(h)-b_B\right)\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f(h)\right|dh\\ M_2:=\frac{1}{|B|}\int_B\left|\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\left(b(h)-b_B\right)f_1(h)\right|dh\\ M_3:=\frac{1}{|B|}\int_B\left|e^{-t_B\mathfrak{L}}\left(b(h)-b_B\right)\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f(h)\right|dh\\ M_4:=\frac{1}{|B|}\int_B\left|e^{-t_B\mathfrak{L}}\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\left(b(h)-b_B\right)\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f_1(h)\right|dh\\ M_5:=\frac{1}{|B|}\int_B\left|\left(\mathfrak{L}^{-\alpha/2}-e^{-t_B\mathfrak{L}}\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right)\left(b(h)-b_B\right)f_2(h)\right|dh\end{cases}$$

令 s' 为 s 的共轭使得 $1/s+1/s'=1$。由 Hölder 不等式和引理 2.10 可得

$$\begin{aligned}M_1&\le\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|b(h)-b_B\right|^{s'}dh\right)^{1/s'}\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f(h)\right|^{s}dh\right)^{1/s}\\&\le C[b]_\theta\left(1+r/\rho(g)\right)^{\theta'}M_s\left(\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f\right)(g)\\&\le C[b]_\theta M_s\left(\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f\right)(g)\end{aligned}。$$

令 $1/w=1/r-\alpha/Q$。根据引理 2.2 和引理 2.10，我们有

$$\begin{aligned}M_2&\le\left(\frac{1}{|B|}\int_{\mathbb{H}^n}\left|\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\left(b(h)-b_B\right)f_1(h)\right|^{w}dh\right)^{1/w}\\&\le\frac{C}{|B|^{1/w}}\left(\int_B\left|\left(b(h)-b_B\right)f(h)\right|^{r}dh\right)^{1/r}\\&\le C\left(\frac{1}{|B|}\int_B\left|b(h)-b_B\right|^{sr'}dh\right)^{1/sr'}\left(\frac{1}{|B|^{1-\alpha sr/Q}}\int_B\left|f(h)\right|^{sr}dh\right)^{1/sr}\\&\le C[b]_\theta M_{\alpha,rs}f(g)\end{aligned}。$$

类似的，我们根据引理 2.2，引理 2.10 和极大函数的有界性可得

$$M_3+M_4\le C[b]_\theta M_s\left(\mathfrak{L}^{-\alpha/2}f\right)(g)+C[b]_\theta M_{\alpha,rs}(f)(g)。$$

因为 $g\in B(g_0,r_B)$， $z\in 2^{k+1}B\setminus 2^{2k}B$，所以 $\left|g_0^{-1}u\right|\approx 2^k r_B$。由引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}
M_5 &\le \frac{1}{|B|}\int_B\int_{(2B)^{\complement}}\left|K_{\alpha,t_B}(h,z)\right|\left|\left(b(z)-b_B\right)f(z)\right|\mathrm{d}z\mathrm{d}h\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k+1}B\backslash 2^k B}\frac{t_B}{\left|g_0^{-1}z\right|^{Q-\alpha+2}}\left|\left(b(z)-b_B\right)f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{1}{\left|2^{k+1}B\right|^{1-\alpha/Q}}\int_{2^{k+1}B}\left|\left(b(z)-b_B\right)f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{1}{\left|2^{k+1}B\right|^{1-\alpha/Q}}\int_{2^{k+1}B}\left|\left(b(z)-b_{2^{k+1}B}\right)f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\quad +C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\left|b_{2^{k+1}B}-b_B\right|\frac{1}{\left|2^{k+1}B\right|^{1-\alpha/Q}}\int_{2^{k+1}B}\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\\
&\le C[b]_\theta\sum_{k=1}^{\infty}k2^{-k}\left(1+2^k r_B/\rho(g)\right)^{\theta'}M_{\alpha,rs}f(g)+C\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}M_{\alpha,1}f(g)\\
&\le C[b]_\theta M_{\alpha,rs}f(g)
\end{aligned}$$

结合以上五部分，我们得到(3.2)。

情形二：我们考虑 $0<\alpha<Q$ 的情形。对于任意的 $k=0,1,\cdots,Q-1$，我们将 $p_{1,k}$， $p_{2,k}$ 和 $p_{3,k}$ 记为

$$\frac{1}{p_{1,k}}=\frac{1}{p_2}+\frac{\alpha k}{Q^2}，\quad \frac{1}{p_{2,k}}=\frac{1}{p_{1,k}}+\frac{\alpha}{Q^2}，\quad \frac{1}{p_{3,k}}=\frac{1}{p_{2,k}}+\frac{\alpha(Q-1-k)}{Q^2}。$$

注意到，$\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f=\left[b,\left(\mathfrak{L}^{-\alpha/2Q}\right)^Q\right]f=\sum_{k=0}^{Q-1}\mathfrak{L}^{-\alpha k/2Q}\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2Q}\right]\mathfrak{L}^{-\alpha(Q-1-k)/2Q}f$。由引理 2.1 和情形一，我们得到

$$\begin{aligned}
\left\|\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2}\right]f\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)} &\le \sum_{k=0}^{Q-1}\left\|\mathfrak{L}^{-\alpha k/2Q}\left[b,\mathfrak{L}^{-\alpha/2Q}\right]\mathfrak{L}^{-\alpha(Q-1-k)/2Q}f\right\|_{L^{p_2}(\mathbb{H}^n)}\\
&\le C[b]_\theta\sum_{k=0}^{Q-1}\|f\|_{L^{p_{3,k}}(\mathbb{H}^n)}\le C[b]_\theta\|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{H}^n)}
\end{aligned},$$

因为对于任意的 $k=0,1,\cdots,Q-1$，有 $\frac{1}{p_{3,k}}=\frac{1}{p_{2,k}}+\frac{\alpha(Q-1-k)}{Q^2}=\frac{1}{p_2}+\frac{\alpha}{Q}=\frac{1}{p_1}$，即 $p_{3,k}=p_1$。

综上，我们完成了定理 3.2 的证明。

基金项目

山东省自然科学基金(ZR2017JL008)资助。

致　谢

作者衷心感谢导师李澎涛教授以及各位学者研究文献的帮助。

参考文献

[1] Lin, C.C., Liu, H.P. and Liu, Y. (2011) Hardy Spaces Associated with Schrödinger Operators on Heisenberg Group. arXiv 1106.4960 (Preprint)

[2] Chanillo, S. (1982) A Note on Commutators. *Indiana University Mathematics Journal*, **31**, 7-16. https://doi.org/10.1512/iumj.1982.31.31002

[3] Duong, X.T. and Yan, L.X. (2008) On Commutators of Fractional Integrals. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **132**, 3549-3557. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07437-4

[4] Jiang, Y.S. (2011) Endpoint Estimates for Fractional Integral Associated to Schrödinger Operators on Heisenberg

Groups. *Acta Mathematica Scientia*, **3**, 247-254. https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60291-9

[5] Stein, E.M. (1970) Singular Integral and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, MR, 7280.

[6] Tang, L. and Dong, J.F. (2009) Boundedness for Some Schrödinger Type Operators on Morrey Spaces Related to Certain Nonnegatove Potentials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **355**, 101-109. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.043

[7] Yang, D.C., Yang, D.Y. and Zhou, Y. (2009) Endpoint Properties of Localized Riesz Transforms and Fractional Integrals Associated to Schrödinger Operators. *Potential Analysis*, **30**, 271-300. https://doi.org/10.1007/s11118-009-9116-x

[8] Bongioanni, E., Harboure, E. and Salinas, O. (2011) Commutators of Riesz Transform Related to Schrödingers. *Journal of Fourier Analysis & Applications*, **17**, 115-134. https://doi.org/10.1007/s00041-010-9133-6

[9] Martell, J.M. (2004) Sharp Maximal Functions Associated with Approximations of Identity in Spaces of Homogeneous Type and Applications. *Studia Mathematica*, **161**, 113-145. https://doi.org/10.4064/sm161-2-2

[10] Duong, X.T. and McIntosh, A. (1999) Singular Integral Operators with Non-Smooth Kernels on Irregular Domains. *Revista Matematica Iberoamericana*, **15**, 233-265. https://doi.org/10.4171/RMI/255