Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 944-952
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010110

一类修理工带休假的冷贮备可修系统的指数稳定性

寇玉芳，原文志

太原师范学院 数学系，山西 晋中
Email: kou0123coco@163.com, ywzywz123@163.com

收稿日期：2020年10月5日；录用日期：2020年10月20日；发布日期：2020年10月27日

摘 要

本文讨论了一类可修系统的指数稳定性，这个系统是冷贮备的而且考虑了修理工带休假的情况。首先选择适当的状态空间，然后定义算子，把系统的模型方程化为Cauchy问题，再用C_0半群理论得到系统的动态解的性质，最后得到这个可修系统的指数稳定性。

关键词

冷贮备系统，C_0半群，动态解，指数稳定性

Exponential Stability of a Cold Standby Repairable System with Vacation

Yufang Kou, Wenzhi Yuan

Department of Mathematics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi
Email: kou0123coco@163.com, ywzywz123@163.com

Received: Oct. 5th, 2020; accepted: Oct. 20th, 2020; published: Oct. 27th, 2020

Abstract

In this paper, the exponential stability of a repairable system is discussed, which is cold standby and the case of repairman with vacation is considered. Firstly, the suitable state space is selected, then the operator is defined, the model equation of the system is transformed into the Cauchy problem, then the properties of the dynamic solution of the system are obtained by using the C_0 semigroup theory, and finally the exponential stability of the repairable system is obtained.

文章引用: 寇玉芳, 原文志. 一类修理工带休假的冷贮备可修系统的指数稳定性[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 944-952. DOI: 10.12677/pm.2020.1010110

Keywords

Cold Standby System, C_0 Semigroup, Dynamic Solution, Exponential Stability

1. 引言

在我们实际生活中，一个系统性能的好坏往往通过这个系统的稳定性来判断，所以研究系统稳定性是很有必要的。文献[1] [2] [3]研究了并联可修系统。文献[2]首先得到系统非负解是 0 本征值对应的非负本向量，又得到系统算子的谱分布，从而证明系统的渐进稳定性。

可靠性理论的研究包含各种模型，其中冷贮备系统是很重要的一类。现在很多文献假设部件出现问题之后可以马上处理，如何讨论系统的可靠性以及稳定性，例如文献[4] [5]。但是现实生活上当系统出现问题时因为各种客观因素，系统不能立马修复。所以把修理工休假等情况引入可修系统的模型中是有意义的。但是很多系统都只是运用传统方法得到可靠性指标而已，比如文献[6] [7]。

所以本文运用 C_0 半群理论来研究修理工带休假的冷贮备可修系统，通过分析系统动态解的性质来讨论系统的指数稳定性。

2. 系统模型

2.1. 基本假设

假设 1：系统中有两个不同型部件分别为 1 和 2，再加上一个修理工；

假设 2：当部件 1 和 2 都处于正常状态时，部件 1 工作，部件 2 做冷贮备；

假设 3：当部件 1 处于工作状态时，部件 2 冷贮备，修理工开始休假；

假设 4：当部件出现问题时有以下情况(1) 如果这时修理工正处于休假状态，那么等休假完成后进行维修；(2) 如果这时修理工空闲，那么需要马上维修；(3) 如果这时修理工处于工作状态，那么这个有问题的部件必须等待维修；

假设 5：修理工维修完成一个部件后，如果在系统中没有发现其他问题就开始休假，如果休假完成之后发现部件有问题，那么马上维修故障部件；如果系统仍然正常，那么必须待在系统里进入空闲状态，等待出现问题之后马上维修；

假设 6：在初始状态时刻部件 1 和 2 都是新的，而且部件 1 比 2 优先使用和维修，维修后的部件和新的一样；

假设 7：文中的随机变量是相互独立的。

2.2. 系统的状态描述如下

状态 0：部件 1 工作，部件 2 贮备，修理工空闲；

状态 1：部件 1 工作，部件 2 贮备，修理工休假；

状态 2：部件 1 工作，部件 2 故障，修理工休假；

状态 3：部件 1 工作，部件 2 在修理；

状态 4：部件 1 和部件 2 都待修，修理工休假；

状态 5：部件 1 在修理，部件 2 待修。

2.3. 系统的符号意义与数学方程

(1) 部件 1 的工作时间分布为： $F_1(t)=1-\exp(-\lambda t)$， $t\ge 0$

(2) 部件的维修时间分布为： $G(t)=\int_0^t g(y)\mathrm{d}y=1-\exp\left(-\int_0^t \mu(y)\mathrm{d}y\right)$

(3) 部件 2 贮备时间分布为： $F_2(t)=1-\exp(-\beta t)$， $t\ge 0$

(4) 修理工休假时间分布为： $H(t)=\int_0^t h(x)\mathrm{d}x=1-\exp\left(-\int_0^t \alpha(x)\mathrm{d}x\right)$

(5) 修理工空闲时间分布为： $F_3(t)=1-\exp(-\eta t)$， $t\ge 0$

设 $E=\{0,1,2,3,4,5\}$ 是系统的状态集， $i=0,1,2,3$ 时系统正常运行， $j=4,5$ 时系统发生问题。$X(t)$指 t 时刻的状态变量，取值于 E；$Y(t)$指 t 时刻故障时对应的修复时间。

系统方程如下

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\eta+\lambda+\beta\right)P_0(t)=\int_0^\infty P_3(t,y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda+\beta+\alpha(x)\right)P_1(t,x)=0\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_2(t,x)=\beta P_1(t,x)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial y}+\lambda+\mu(y)\right)P_3(t,y)=0\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}+\alpha(x)\right)P_4(t,x)=\lambda P_2(t,x)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial y}+\mu(y)\right)P_5(t,y)=\lambda P_3(t,y)\end{cases}\tag{1}$$

边界条件为

$$\begin{cases}P_1(t,0)=\eta P_0(t)\\ P_3(t,0)=\lambda P_0(t)+\beta P_0(t)+\int_0^\infty \lambda P_1(t,x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_1(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x\\ \qquad\qquad+\int_0^\infty P_2(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_5(t,y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ P_5(t,0)=\int_0^\infty P_4(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x\\ P_2(t,0)=P_4(t,0)=0\end{cases}\tag{2}$$

初始条件为：

$$P_0(0)=1，其余为 0\tag{3}$$

再做一些假设来增加(1)的合理性

(1) $0\le\alpha(x)<\infty$， $0\le\mu(y)<\infty$， $\int_0^x\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi<\infty$， $\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi<\infty$。

(2) $\int_0^\infty\alpha(\xi)\mathrm{d}\xi=\infty$， $\int_0^\infty\mu(\xi)\mathrm{d}\xi=\infty$。

(3) $0 < C_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \alpha(\xi)\mathrm{d}\xi < \infty$， $0 < C_2 = \lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y \mu(\xi)\mathrm{d}\xi < \infty$。

选择以下状态空间

$$X = \left\{ \boldsymbol{P} = \left(P_0, P_1(x), P_2(x), P_3(y), P_4(x), P_5(y)\right)^{\mathrm{T}} \mid P_0 \in R, P_i(x) \in L^1(R^+), P_j(y) \in L^1(R^+), i = 1,2,4; j = 3,5 \right\}$$

范数定义为$\|\boldsymbol{P}\| = |P_0| + \|P_1(x)\| + \|P_2(x)\| + \|P_3(y)\| + \|P_4(x)\| + \|P_5(y)\|$

很明显$(X, \|\cdot\|)$是一个 Banach 空间。

在 X 中定义算子 A，B 及定义域

$$A = \begin{pmatrix} -(\eta+\lambda+\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(\lambda+\beta+\alpha(x)) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(\lambda+\alpha(x)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-(\lambda+\mu(y)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\mu(y) \end{pmatrix}$$

算子 A 的定义域

$$D(A) = \left\{ \boldsymbol{P} \in X \mid \frac{\mathrm{d}P_i(x)}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}P_j(y)}{\mathrm{d}y} \in L^1(R^+), P_1(0) = \eta P_0(t), P_3(t,0) = \lambda P_0(t) + \int_0^\infty P_2(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x, \right.$$
$$\left. P_5(t,0) = \int_0^\infty P_4(t,x)\alpha(x)\mathrm{d}x, i = 1,2,4; j = 3,5 \right\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \int_0^\infty \mu(y)\mathrm{d}y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此$D(A+B) = D(A) \cap D(B) = D(A)$，在$D(A)$中$P_i(x), P_j(y)$是绝对连续的，所以系统方程可以化为 Banach 空间 X 中的抽象 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = (A+B)\boldsymbol{P}(t), t \in [0, \infty) \\ \boldsymbol{P}(0) = P_0 = (1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

3. 系统动态解的存在唯一性

定义 1 E 的子集 C 称为在 E 中共尾，若满足对每个 $f \in E$，存在 $g \in C$，使得 $f \le g$。

定理 1 $D(A+B)$在 X 中稠密。

证明 由文献[8]有 $D(A)$在 X 中是稠密的，又有 $D(A+B)=D(A)$，所以有 $D(A+B)$ 在 X 中稠密。

定理 2 [9] 算子 $A+B$ 是预解正算子。

定理 3 系统算子 $A+B$ 的对偶算子 $(A+B)^*$ 是

$$(A+B)Q^* = \begin{cases} -(\eta+\lambda+\beta)Q_0+\eta Q_1(0)+\lambda Q_3(0)+\beta Q_5(0) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\beta-\alpha(x)\right)Q_1(x)+\lambda Q_2(x)+\beta Q_4(x)+\alpha(x)Q_3(0) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_2(x)+\alpha(x)Q_3(0)+\lambda Q_4(x) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\lambda-\mu(y)\right)Q_3(y)+\mu(y)Q_0+\lambda Q_5(y) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha(x)\right)Q_4(x)+\alpha(x)Q_5(0) \\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\mu(y)\right)Q_5(y)+\mu(y)Q_3(0) \end{cases} \tag{4}$$

$$D\left((A+B)^*\right)=\left\{Q\in X^* \mid \frac{\mathrm{d}Q_i(x)}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}Q_j(y)}{\mathrm{d}y}\in L^\infty\left(R^+\right),Q_i(x),Q_j(y)\in L^\infty\left(R^+\right),i=1,2,4;\ j=3,5\right\}$$

证明 任给 $P\in D(A+B)$ 和 $Q\in X^*$，有

$$\begin{aligned}
&\left\langle (A+B)P,Q\right\rangle \\
&=\left[-(\eta+\lambda+\beta)P_0+\int_0^\infty P_3(y)\mu(y)\mathrm{d}y\right]Q_0-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\lambda+\beta+\alpha(x)\right)P_1(x)Q_1(x)\mathrm{d}x \\
&\quad-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\lambda+\alpha(x)\right)P_2(x)Q_2(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty \lambda P_1(x)Q_2(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty \beta P_1(x)Q_4(x)\mathrm{d}x \\
&\quad-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+\lambda+\mu(y)\right)P_3(y)Q_3(y)\mathrm{d}y-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\alpha(x)\right)P_4(x)Q_4(x)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_0^\infty \lambda P_2(x)Q_4(x)\mathrm{d}x-\int_0^\infty\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+\mu(y)\right)P_5(y)Q_5(y)\mathrm{d}y+\int_0^\infty \lambda P_3(y)Q_5(y)\mathrm{d}y \\
&=\left[-(\eta+\lambda+\beta)Q_0+\eta Q_1(0)+\lambda Q_3(0)+\beta Q_5(0)\right]P_0 \\
&\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\beta-\alpha(x)\right)Q_1(x)+\lambda Q_2(x)+\beta Q_4(x)\right]P_1(x)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda-\alpha(x)\right)Q_2(x)+\alpha(x)Q_3(0)+\lambda Q_4(x)\right]P_2(x)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\lambda-\mu(y)\right)Q_3(y)+\mu(y)Q_0+\lambda Q_5(y)\right]P_3(y)\mathrm{d}y \\
&\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\alpha(x)\right)Q_4(x)+\alpha(x)Q_5(0)\right]P_4(x)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_0^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}-\mu(y)\right)Q_5(y)+\mu(y)Q_3(0)\right]P_5(y)\mathrm{d}y \\
&=\left\langle P,(A+B)^*Q\right\rangle
\end{aligned}$$

定理 4 算子 $A+B$ 生成正压缩 C_0-半群 $T(t)$。

证明 由文献[10]知 $A+B$ 生成正 C_0 半群 $T(t)$。

定理 5 系统存在唯一的非负时间依赖解 $P(t,\cdot)$，满足 $\|P(t,\cdot)\|=1,\forall t\in[0,\infty)$。

证明 由定理 4 可知系统存在这样的解 $P(t,\cdot)$，它可以表示成 $\|P(t,\cdot)\|=T(t)P_0,\forall t\in[0,\infty)$。又因为 $P(t,\cdot)$ 满足方程组(1)，所以有 $\frac{\mathrm{d}\|P(t,\cdot)\|}{\mathrm{d}t}=0$，故 $\|P(t,\cdot)\|=\|T(t)P_0\|=\|P_0\|=1,\forall t\in[0,\infty)$。

4. 系统的指数稳定性

定理 6 $\{r\in C\,|\,\mathrm{Re}\,r>0\text{或}r=ia,a\in R\setminus\{0\}\}$ 包含于系统算子 $A+B$ 的预解集 $\rho(A+B)$ 中。

证明 对任意 $G=\{g_0,g_1(x),g_2(x),g_3(y),g_4(x),g_5(y)\}$，考虑算子方程 $[rI-(A+B)]P=G$，有以下的方程组

$$\begin{cases}(r+\eta+\lambda+\beta)P_0=g_0+\int_0^\infty P_3(y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ \frac{\mathrm{d}P_1(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\lambda+\beta+\alpha(x))P_1(x)=g_1(x)\\ \frac{\mathrm{d}P_2(x)}{dx}+(r+\lambda+\alpha(x))P_2(x)=g_2(x)+\beta P_1(x)\\ \frac{\mathrm{d}P_3(y)}{\mathrm{d}y}+(r+\lambda+\mu(y))P_3(y)=g_3(y)\\ \frac{\mathrm{d}P_4(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\alpha(x))P_4(x)=g_4(x)+\lambda P_2(x)\\ \frac{\mathrm{d}P_5(y)}{\mathrm{d}y}+(r+\mu(y))P_5(y)=g_5(y)+\lambda P_3(y)\end{cases}\tag{5}$$

边界条件为

$$\begin{cases}P_1(0)=\eta P_0\\ P_2(0)=P_4(0)=0\\ P_3(0)=\lambda P_0+\beta P_0+\int_0^\infty\lambda P_1(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_1(x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_2(x)\alpha(x)\mathrm{d}x+\int_0^\infty P_5(y)\mu(y)\mathrm{d}y\\ P_5(0)=\int_0^\infty P_4(x)\alpha(x)\mathrm{d}x\end{cases}\tag{6}$$

解方程组(5)可得

$$\begin{cases}P_1(x)=P_1(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\beta+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_1(x)\\ P_2(x)=\beta xP_1(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_2(x)\\ P_3(y)=P_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\lambda+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_3(y)\\ P_4(x)=\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}-\lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\right)P_1(0)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_4(x)\\ P_5(y)=P_5(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right)P_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}+G_5(y)\end{cases}\tag{7}$$

其中

$$G_1(x)=\int_0^x g_1(\tau)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(r+\lambda+\beta+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau,\ G_2(x)=\int_0^x\left(g_2(\tau)+\beta G_1(\tau)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$

$$G_3(y)=\int_0^y g_3(\tau)\mathrm{e}^{-\int_\tau^y(r+\lambda+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau,\ G_4(x)=\int_0^x\left(g_4(\tau)+\lambda G_2(\tau)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^x(r+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$

$$G_5(y)=\int_0^y\left(g_5(\tau)+\lambda G_3(\tau)\right)\mathrm{e}^{-\int_\tau^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}\tau$$

令 $F_1=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x,\ F_2=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}y,\ F_3=\int_0^\infty \mu(y)\mathrm{e}^{-\int_0^y(r+\lambda+\mu(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}y$

$$F_4=\lambda\int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x,\ F_5=\int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{e}^{-\int_0^x(r+\lambda+\alpha(\sigma))\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}x$$

$$W_0=g_0+\int_0^\infty \mu(y)G_3(y)\mathrm{d}y, W_1=0, W_2=\int_0^\infty \alpha(x)G_2(x)\mathrm{d}x, W_3=\int_0^\infty \alpha(x)G_4(x)\mathrm{d}x$$

将(7)代入 $(r+\eta+\lambda+\beta)P_0=g_0+\int_0^\infty P_3(y)\mu(y)\mathrm{d}y$ 及边界条件(6)中，得到矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} r+\eta+\lambda+\beta & 0 & -F_3 & 0 \\ -\eta & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda-\beta & F_5-F_4 & rF_2+F_3 & rF_2-1 \\ 0 & rF_1+F_4+F_5-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1(0) \\ P_3(0) \\ P_5(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix},$$

$$\text{令 } T=\begin{bmatrix} r+\eta+\lambda+\beta & 0 & -F_3 & 0 \\ -\eta & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda-\beta & F_5-F_4 & rF_2+F_3 & rF_2-1 \\ 0 & rF_1+F_4+F_5-1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

根据 T 的表达式知道矩阵 T 是不可约的，而且是按列对角占优的，$\det T\neq 0$。所以方程组 $\left[rI-(A+B)\right]P=G$ 有唯一解，即 $rI-(A+B)$ 是满射。由 $rI-(A+B)$ 是闭的，而且 $D(A+B)$ 在 X 中稠密，所以由逆算子定理可知 $\left[rI-(A+B)\right]^{-1}$ 存在并且是线性有界的。因此当 $\{r\in C\,|\,\mathrm{Re}\,r>0\text{或}r=ia,a\in R\setminus\{0\}\}$ 时，有 $r\in\rho(A+B)$。

定理 7　$r=0$ 是算子 $A+B$ 的几何重数为 1 的本征值的充要条件是 $D(r)=0$。

证明　设 $r\in C$ 是 $A+B$ 的一个本征值，P 是一个本征向量，即 $\left[rI-(A+B)\right]P=0$。从而这个问题相当于讨论以下方程组非零解的存在性

$$\begin{cases} (r+\eta+\lambda+\beta)P_0-\int_0^\infty P_3(y)\mu(y)\mathrm{d}y=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}P_1(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\lambda+\beta)P_1(x)=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}P_2(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\lambda+\alpha(x))P_2(x)-\beta P_1(x)=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}P_3(y)}{\mathrm{d}y}+(r+\lambda+\mu(y))P_3(y)=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}P_4(x)}{\mathrm{d}x}+(r+\alpha(x))P_4(x)-\lambda P_2(x)=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}P_5(y)}{\mathrm{d}y}+(r+\mu(y))P_5(y)-\lambda P_3(y)=0 \\ P_1(0)=\eta P_0 \\ P_3(0)=\lambda P_0+\int_0^\infty P_2(0)\alpha(x)\mathrm{d}x \\ P_5(0)=\int_0^\infty P_4(0)\alpha(x)\mathrm{d}x \\ P_2(0)=P_4(0)=0 \end{cases} \tag{8}$$

解微分方程组得到

$$\begin{aligned}
&P_1(x)=P_1(0)\mathrm{e}^{-(r+\lambda+\beta)x}\\
&P_2(x)=\beta P_1(0)\int_0^x \mathrm{e}^{-\int_0^\tau (r+\lambda+\beta)\mathrm{d}\xi}\cdot \mathrm{e}^{-\int_\tau^x (r+\lambda+\alpha(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\\
&P_3(y)=P_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y (r+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi}\\
&P_5(y)=P_5(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y (r+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi}+\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda y}\right)P_3(0)\mathrm{e}^{-\int_0^y (r+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi}
\end{aligned} \tag{9}$$

于是得到如下代数方程组

$$\begin{cases}
(r+\eta+\lambda+\beta)P_0-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\int_0^y (r+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}yP_3(0)=0\\
\eta P_0-P_1(0)=0\\
P_2(0)=0\\
\lambda P_0+\int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{d}xP_2(0)-P_3(0)=0\\
P_4(0)=0\\
\int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{d}xP_4(0)-P_5(0)=0
\end{cases} \tag{10}$$

故(10)有非零解的充分必要条件是系数行列式为零。计算(10)的系数行列式

$$D(r)=\begin{vmatrix}
r+\eta+\lambda+\beta & 0 & 0 & \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\int_0^y (r+\lambda+\mu(\xi))\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}y & 0 & 0\\
\eta & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\lambda & 0 & \int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{d}x & -1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \int_0^\infty \alpha(x)\mathrm{d}x & -1
\end{vmatrix}$$

当 $D(r)=0$ 时，$r=0$ 是 $A+B$ 的本征值。反过来若 $r=0$ 使得 $D(r)=0$，则方程(10)有非零解

$$\left(p_0,p_1(0),p_2(0),p_3(0),p_4(0),p_5(0)\right):\begin{cases}
P_1(0)=\eta P_0\\
P_2(0)=0\\
P_3(0)=\lambda P_0\\
P_4(0)=0\\
P_5(0)=0
\end{cases} \tag{11}$$

所以 $\left(p_0,p_1(0),p_2(0),p_3(0),p_4(0),p_5(0)\right)\in D(A+B)$ 是方程(1)的一个解，从而(10)给出相应于 r 的 $A+B$ 的本征函数。令 $\hat{P}=\frac{P}{\|P\|},\hat{P}=\left(\hat{P}_1(x),\hat{P}_2(x),\hat{P}_3(y),\hat{P}_4(x),\hat{P}_5(y)\right)$ 是 $A+B$ 的非负本征向量，即非负稳定解。其中这个向量是本征值 0 所对应的。因此 0 在 X 中的几何重数是 1。

定理 8 $(A+B)^*$ 的代数重数为 1 的本征值是 0，且 $(1,1,1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 为 0 的对应的特征向量。

证明 考虑方程 $(A+B)^*Q=0$。由定理 3 有

$$\begin{cases}(\eta+\lambda+\beta)Q_0=\eta Q_1(0)+\beta Q_3(0)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_1(x)=(\lambda+\beta)Q_1(x)-\beta Q_2(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_2(x)=(\lambda+\alpha(x))Q_2(x)-\alpha(x)Q_3(0)-\lambda Q_4(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}Q_3(y)=(\lambda+\mu(y))Q_3(y)-\mu(y)Q_0-\lambda Q_5(y)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q_4(x)=\alpha(x)Q_4(x)-\alpha(x)Q_5(0)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}Q_5(y)=\mu(y)Q_5(y)-\mu(y)Q_3(0)\end{cases} \tag{12}$$

解上述方程组有 $Q_0=Q_1(x)=Q_2(x)=Q_3(y)=Q_4(x)=Q_5(y)$。

显然 $Q\in D\left((A+B)^*\right)$，所以 0 是 $(A+B)^*$ 的本征值，而且几何重数是 1，把 $Q=(1,1,1,1,1,1)$ 代入方程组(12)成立，因此 $Q=(1,1,1,1,1,1)$ 是 0 的对应特征向量。

定理 9 系统(1)的时间依赖解是强收敛于稳定解的，即 $\lim_{t\to\infty}P(t,\cdot)=\hat{P}$，并且有 $\left\|P(t,\cdot)-\hat{P}\right\|\le M\mathrm{e}^{-\lambda t}$，这里的 M 是某一个合适的常数。

参考文献

[1] 曹晋华, 程侃.可靠性数学引论[M]. 北京: 科学出版社, 1986.

[2] 郭卫华, 徐厚宝, 朱广田. 两部件并联维修系统解的渐进稳定性[J]. 系统工程理论与实践, 2006, 26(12): 62-68.

[3] 郭卫华, 党艳霞, 高超. 两不同部件并联可修复系统指数稳定性分析[J]. 2009(2): 108-114.

[4] 张欣. 电站两辅助设备冷贮备系统的可靠性分析[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(10): 2615-2622.

[5] 任寒景, 张玉峰, 张欣. 含同原因故障和一冷储备部件的系统稳定性[J]. 应用泛函分析学报, 2016, 18(1): 41-49.

[6] 杨会崇. 修理工带休假的两同型部件冷贮备可修系统[J]. 数学理论与应用, 2009, 29(1): 23-28.

[7] 陈永燕, 郑海鹰. 冷贮备可修系统的一个新模型及其可靠性分析[J]. 浙江大学学报(理学版), 2011, 38(3): 274-278.

[8] 郭卫华. 两相同部件温储备可修的人机系统解的性质分析[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(7): 88-95.

[9] ZHANG, X. (2015) Reliability Analysis of a Cold Standby Repairable System with Repairman Extra Work. *Journal of Systems Science and Complexity*, **28**, 1015-1032. https://doi.org/10.1007/s11424-015-4081-5

[10] 霍慧霞, 原文志. 一类冷贮备可修系统的指数稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(1): 185-191.