Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 974-979
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010114

Hans汉斯

强*n*-Gorenstein FC-投射模

杨富霞[*]，**张翠萍**[#]

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州
Email: [*]2726271373@qq.com, [#]zhangcp@nwnu.edu.cn

收稿日期：2020年10月7日；录用日期：2020年10月22日；发布日期：2020年10月29日

摘 要

引入了强*n*-Gorenstein FC-投射模，给出了强*n*-Gorenstein FC-投射模的一些性质，证明了对任意模*M*和非负整数*n*，*R*-模*M*的Gorenstein FC-投射维数不超过*n*当且仅当*M*是强*n*-Gorenstein FC-投射模的直和因子时。

关键词

FC-投射维数，Gorenstein FC-投射维数，强*n*-Gorenstein FC-投射模

Strongly *n*-Gorenstein FC-Projective Modules

Fuxia Yang[*], **Cuiping Zhang**[#]

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: [*]2726271373@qq.com, [#]zhangcp@nwnu.edu.cn

Received: Oct. 7th, 2020; accepted: Oct. 22nd, 2020; published: Oct. 29th, 2020

Abstract

In this paper, strongly *n*-Gorenstein FC-projective modules are introduced, some properties of them are presented. For arbitrary module *M* and nonnegative integral number *n*, the Gorenstein FC-projective dimensions of *M* are not larger than *n* if and only if *M* is direct summand of a strongly *n*-Gorenstein FC-Projective module.

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 杨富霞, 张翠萍. 强 *n*-Gorenstein FC-投射模[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 974-979.
DOI: 10.12677/pm.2020.1010114

Keywords

FC-Projective Dimensions, Gorenstein FC-Projective Dimensions, Strongly *n*-Gorenstein FC-Projective Modules

1. 引言

1969 年，在双边 Noether 环上，Auslander 等在[1]中对有限生成模 M 引入了 G-维数的概念(记为 $\text{G-dim}_R(M)$)，证明了 $\text{G-dim}_R(M) \le \text{pd}_R(M)$。1995 年，Enochs 等在[2]中证明了在双边 Noether 环上，G-维数为 0 的有限生成模与 Gorenstein 投射模等价，从此 Gorenstein 同调代数得到了广泛关注。2004 年，Holm 在[3]中对任意环，讨论了 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模及其维数，使得 Gorenstein 同调代数得到了极大的发展。2009 年，Mahdou 等在[4]中引入了强 n-Gorenstein 投射，内射，平坦模，给出了它们的基本性质和等价刻画，并证明了对任意模 M 和非负整数 n，R-模 M 的 Gorenstein 投射维数不超过 n 当且仅当 M 是某个强 n-Gorenstein 投射模的直和项时。2013 年，刘仲奎等人在[5]中将该结论做到了半对偶化模上。2013 年，高等人在[6]中引入了强 Gorenstein FP-内射模的概念，并研究了其相关同调性质，对偶于上述概念，2020 年，王玉等人在[7]中引入了 Gorenstein FC-投射模，2018 年，他们又研究了强 Gorenstein FC-投射模，得到了许多对偶的结论。

受以上工作的启发，本文主要研究强 n-Gorenstein FC-投射模。证明了对任意模 M 和非负整数 n，R-模 M 的 Gorenstein FC-投射维数不超过 n 当且仅当 M 是某个强 n-Gorenstein FC-投射模的直和项时。

本文所指的环 R 均指有单位元的结合环，模均指左 R-模，$\text{pd}_R(M)$ 指 M 的投射维数，$\text{id}_R(M)$ 指 M 的内射维数。

2. 预备知识

首先回顾一些基本概念。设 n 是非负整数，在[8]中，称 R-模 Q 是 n-余表现模，如果存在 R-模的正合序列 $0 \to Q \to Q_0 \to Q_1 \to \cdots \to Q_n$，其中每个 $Q_i\,(0 \le i \le n)$ 是有限余生成内射模。R-模 Q 是 0-余表现模(1-余表现模)当且仅当 Q 是有限余生成的(有限余表现的)，每个 $(n+1)$-余表现模是 n-余表现的，反之不一定成立。

定义 2.1 [7] 设 M 是 R-模，称 M 是 FC-投射的，如果对任意的有限余表现左 R-模 Q，有 $\text{Ext}_R^1(M,Q)=0$。

定义 2.2 [7] 设 M 是 R-模，称 M 是 Gorenstein FC-投射的，如果存在 FC-投射 R-模的正合序列

$$\mathbf{X} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$$

使得 $M \cong \text{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$，且对任意内射维数有限的有限余表现 R-模 Q，$\text{Hom}_R(\mathbf{X},Q)$ 是正合的。

定义 2.3 [9]设 M 是 R-模，称 M 是强 Gorenstein FC-投射的，如果存在 FC-投射 R-模的正合序列

$$\mathbf{X} = \cdots \longrightarrow P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} \cdots$$

使得 $M \cong \text{Ker}\, f$，且对任意内射维数有限的有限余表现 R-模 Q，$\text{Hom}_R(\mathbf{X},Q)$ 是正合的。

对 R-模 M，记 M 的 FC-投射维数为 $\text{FC-pd}_R(M)$ [7]，定义如下：

$\text{FC-pd}_R(M) = \inf\{n \mid$ 存在 R-模的正合序列 $0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$，其中 P_i 是 FC-投射模，$0 \le i \le n\}$。

如果这样的 n 不存在，记 $\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M)=\infty$。

记 M 的 Gorenstein FC-投射维数为 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M)$ [7]，定义如下：

$\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M)=\inf\{n\mid$ 存在 R-模的正合序 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_0\to M\to 0$，其中，$G_i$ 是 Gorenstein FC-投射模，$0\le i\le n\}$。

如果这样的 n 不存在，记 $\mathrm{GFC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M)=\infty$。

下面我们引入强 n-Gorenstein FC-投射模的概念。

定义 2.4 设 M 是 R-模，n 是非负整数。称 M 是强 n-Gorenstein FC-投射的，如果存在 R-模的正合序列 $0\to M\to P\to M\to 0$，其中 $\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}_R(P)\le n$。且对任意内射维数有限的有限余表现 R-模 Q，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,Q)=0$。显然，强 Gorenstein FC-投射 R-模是强 0-Gorenstein FC-投射的。

3. 主要结果

称环 R 是左余凝聚的，如果每个 1-余表现 R-模是 2-余表现的。以下 R 均是左余凝聚环。

命题 3.1 设 n 是非负整数，$M_i\ (i\in I)$ 是 R-模。如果对任意的 $i\in I$，M_i 是强 n-Gorenstein FC-投射的，那么 $\oplus_{i\in I}M_i$ 是强 n-Gorenstein FC-投射的。

证明　已知对任意的 $i\in I$，M_i 是强 n-Gorenstein FC-投射模，所以存在 R-模的正合序列 $0\to M_i\to Q_i\to M_i\to 0$，其中 $\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}(Q_i)\le n$，且对任意内射维数有限的有限余表现 R-模 L，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M_i,L)=0$，因此有正合列 $0\to\oplus_{i\in I}M_i\to\oplus_{i\in I}Q_i\to\oplus_{i\in I}M_i\to 0$，由([7]命题 2.2)和([7]命题 2.7)易得，$\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}(\oplus_{i\in I}Q_i)\le n$，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(\oplus_{i\in I}M_i,L)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M_i,L)=0$。故 $\oplus_{i\in I}M_i$ 是强 n-Gorenstein FC-投射的。

命题 3.2 设 n 是非负整数，M 是 R-模，如果 M 是强 n-Gorenstein FC-投射的，那么 M 是强 m-Gorenstein FC-投射的，其中 $m(\ge n)$ 是整数。

证明　由已知存在正合序列 $0\to M\to P\to M\to 0$ (1)，其中 $\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}_R(P)\le n$，且对任意内射维数有限的有限余表现 R-模 L，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,L)=0$，显然 $\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}_R(P)\le m$，用 $\mathrm{Hom}_R(-,L)$ 作用在(1)上，由([7]命题 2.7)可得，$0=\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,L)\cong\mathrm{Ext}_R^{n+2}(M,L)\cong\cdots\cong\mathrm{Ext}_R^{m+1}(M,L)$，故 M 是强 m-Gorenstein FC-投射的。

命题 3.3 设 n 是非负整数，M 是 R-模，如果 M 的 FC-投射维数不超过 n，那么 M 是强 n-Gorenstein FC-投射的。

证明　取正合序列 $0\to M\to M\oplus M\to M\to 0$，由([7]命题 2.2)和([7]命题 2.7)得，$\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}_R(M\oplus M)\le n$，且对任意内射维数有限的有限余表现 R-模 L，$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,L)=0$。

故 M 是强 n-Gorenstein FC-投射的。

引理 3.4 设 n 是正整数，M 是强 n-Gorenstein FC-投射模 R-模，如果存在正合序列 $0\to N\to P_n\to\cdots\to P_1\to M\to 0$，其中 P_i 是投射的 $(1\le i\le n)$，那么 N 是强 Gorenstein FC-投射的。

证明　由已知存在 R-模的正合序列 $0\to M\to P\to M\to 0$，其中 $\mathrm{FC}\text{-}\mathrm{pd}_R(P)\le n$，且对任意有限余表现 R-模 L，有 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(M,L)=0$，考虑 R-模的正合交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d] & P_n\oplus P_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_1\oplus P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为 $\text{FC-pd}_R(P)\le n$，由([7]命题 2.7)得，Q 是 FC-投射 R-模，用 $\text{Hom}_R(-,L)$ 作用在正合序列 $0\to N\to P_n\to\cdots\to P_1\to M\to 0$ 上，可得 $\text{Ext}_R^1(N,L)\cong\text{Ext}_R^{n+1}(M,L)=0$。由[9]推论 3 和以上交换图的第一列可得，$N$ 是强 Gorenstein FC-投射的。

命题 3.5 设 n 是非负整数，M 是 R-模，如果 M 是强 n-Gorenstein FC-投射的，那么 $\text{GFC-pd}_R(M)\le n$。

证明 取 R-模的正合列 $0\to N\to P_n\to\cdots\to P_1\to M\to 0$，其中 P_i 是投射模，$1\le i\le n$。由引理 2.4 知，N 是强 Gorenstein FC-投射的，从而 N 是 Gorenstein FC-投射的，故 $\text{GFC-pd}_R(M)\le n$。

称环 R [7]是左 GFCP-闭的，如果 Gorenstein FC-投射 R-模对扩张是封闭的，即 R-模的正合列 $0\to N\to M\to Q\to 0$，如果 N，Q 是 Gorenstein FC-投射的，那么 M 是 Gorenstein FC-投射的。

设 X 是 R-模的类，$y\subseteq X$。称 y 是 X 的生成子，如果对任意的 $x\in X$，存在 R-模的正合列 $0\to x^1\to y\to x\to 0$，其中 $y\in Y$，$x^1\in X$。

对偶地，可以定义 X 的余生成子。

显然，FC-投模类是 Gorenstein FC-投射模类的生成子和余生成子。

由([10]定理 5.5)可得以下结论。

引理 3.6 设 R 是 GFCP-闭左余凝聚环，M 是 R-模，n 是非负整数，则以下条件等价：

(1) $\text{GFC-pd}_R(M)\le n$；

(2) 存在 R-模的正合列 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$，其中 G_n 是 GFC-投射模，$G_i(0\le i\le n-1)$ 是 FC-投射模；

(3) 存在 R-模的正合列 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$，其中 G_0 是 GFC-投射模，$G_i(1\le i\le n)$ 是 FC-投射模；

(4) 对任意的非负整数 t，$0\le t\le n$，存在 R-模的正合列 $0\to G_n\to G_{n-1}\to\cdots\to G_1\to G_0\to M\to 0$，其中 G_t 是 GFC-投射模，当 $i\ne t$ 时，G_t 是 FC-投射模。

引理 3.7 设 n 是非负整数，M 是 R-模，如果 $\text{GFC-pd}(M)\le n$，那么对任意的 $i>n$ 和任意内射维数有限的有限余表现模 L，有 $\text{Ext}_R^i(M,L)=0$。

证明 由([7]引理 2.3)和维数转移易得结论。

定理 3.8 设 R 是左 GFCP-闭环，n 是非负整数，M 是 R-模。$\text{GFC-pd}_R(M)\le n$ 当且仅当 M 是某个强 n-Gorenstein FC-投射模的直和项。

证明 当 $n=0$ 时，即证明 M 是 Gorenstein FC-投射的当且仅当 M 是某个强 Gorenstein FC-投射 R-模的直和项。

($\Rightarrow$) 设 M 是 Gorenstein FC-投射 R-模，则存在 FC-投射 R-模的正合序列

$$\mathbf{X}=\cdots\longrightarrow P_0\xrightarrow{f_0}P_1\xrightarrow{f_1}P_2\xrightarrow{f_2}P_3\longrightarrow\cdots$$

使 $M\cong\text{Ker}\,f_0$，且对任意内射维数有限的有限余表现 R-模 Q，$\text{Hom}_R(\mathbf{X},Q)$ 是正合的。记复形 $\mathbf{X}$ 的 m 次平移为 $\Sigma^m(X)$。

$$\mathbf{X}=\cdots\longrightarrow P_0\xrightarrow{f_0}P_1\xrightarrow{f_1}P_2\xrightarrow{f_2}P_3\longrightarrow\cdots$$

$$\Sigma^1(\mathbf{X})=\cdots\longrightarrow P_1\xrightarrow{f_1}P_2\xrightarrow{f_2}P_3\xrightarrow{f_3}P_4\longrightarrow\cdots$$

$$\Sigma^2(\mathbf{X})=\cdots\longrightarrow P_2\xrightarrow{f_2}P_3\xrightarrow{f_3}P_4\xrightarrow{f_4}P_5\longrightarrow\cdots$$

$$\cdots$$

$$\Sigma^m(\mathbf{X})=\cdots\longrightarrow P_m\xrightarrow{f_m}P_{m+1}\xrightarrow{f_{m+1}}P_{m+2}\xrightarrow{f_{m+2}}P_{m+3}\longrightarrow\cdots$$

对上述正合列作直和得正合列

$$\oplus_{i\in I}\Sigma^i(\mathbf{X})=\cdots\longrightarrow\oplus_{i\in I}P_i\xrightarrow{\oplus_{i\in I}f_i}\oplus_{i\in I}P_i\xrightarrow{\oplus_{i\in I}f_i}\oplus_{i\in I}P_i\longrightarrow\cdots$$

令 $N=\operatorname{Ker}(\oplus_{i\in I}f_i)=\oplus_{i\in I}\operatorname{Ker}(f_i)$，则 M 是 N 的直和项，$\operatorname{Hom}_R\left(\oplus_{i\in I}\Sigma^i(\mathbf{X}),Q\right)\cong\prod_{i\in I}\operatorname{Hom}_R\left(\Sigma^i(\mathbf{X}),Q\right)$是正合的，由([7]命题 2.2)可得，$\oplus_{i\in I}P_i$是 FC-投射的，从而 N 是强 Gorenstein FC-投射模。

$(\Leftarrow)$ 设 N 是强 Gorenstein FC-投射 R-模，M 是 N 的直和项，则 N 是 Gorenstein FC-投射的，由([7]推论 4.5)可得，M 是 Gorenstein FC-投射的。

假设 $\text{GFC-pd}_R(M)\le n\ne 0$。

$(\Rightarrow)$ 由引理 3.6 知，存在 R-模的正合列 $0\to K\to G\to M\to 0$，其中 G 是 Gorenstein FC-投射模，$\text{FC-pd}_R(K)\le n-1$，从而有 R-模的正合列 $0\to G\to P\to G^0\to 0$，其中 P 是 FC-投射 R-模，G^0 是 Gorenstein FC-投射 R-模，考虑 $G\to M$ 和 $G\to P$ 的推出图[11]：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & K \arrow[d] \arrow[r, equal] & K \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & G^0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & G^0 \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

由正合列 $0\to K\to P\to D\to 0$ 知，$\text{FC-pd}_R(D)\le n$，设 M 的 Gorenstein FC-投射分解为 $0\to G_n\to P_n\to\cdots\to P_1\to M\to 0$，其中 P_i 是 FC-投射模$(1\le i\le n)$，G_n 是 Gorenstein FC-投射的，令 $G_i=\operatorname{Ker}(P_i\to P_{i-1})$，其中 $P_0=M$，$i\ge 1$，则有

$$0\to G_1\to P_1\to M\to 0$$
$$0\to G_2\to P_2\to G_1\to 0$$
$$\cdots$$
$$0\to G_n\to P_n\to G_{n-1}\to 0$$

且 $\text{GFC-pd}_R(G_i)\le n-1$，$1\le i\le n$。

设 G_n 的 FC-投射分解为$\cdots\to P_{n+2}\to P_{n+1}\to G_n\to 0$，从而得正合列 $0\to G_{i+1}\to P_{i+1}\to G_i\to 0$，其中 G_i 是 Gorenstein FC-投射的，$i\ge n$，在正合列 $0\to M\to D\to G^0\to 0$ 中，G^0 是 Gorenstein FC-投射的，所以存在 R-模的正合列 $0\to G^0\to P^1\to P^2\to\cdots$，其中 P^i 是 FC-投射的，令 $G^i=\operatorname{Im}\left(P^i\to P^{i+1}\right)$，进而有正合列 $0\to G^i\to P^{i+1}\to G^{i+1}\to 0$，$i\ge 0$。从而有正合列

$$\cdots$$
$$0\to G^1\to P^2\to G^2\to 0$$
$$0\to G^0\to P^1\to G^1\to 0$$
$$0\to M\to D\to G^0\to 0$$
$$0\to G_1\to P_1\to M\to 0$$
$$0\to G_2\to P_2\to G_1\to 0$$
$$\cdots$$

将上述序列作直和得到正合列

$$0 \to N \to Q \to N \to 0,$$

其中 $N = \oplus_{i\geq 1} G_i \oplus M \oplus_{i\geq 0} G^i$，$Q = \oplus_{i\geq 1} P_i \oplus D \oplus_{i\geq 1} P^i$，则 M 是 N 的直和项，由([7]命题 5.5)知，$\text{GFC-pd}_R(N) = \text{Sup}\{\text{GFC-pd}_R(G_i), \text{GFC-pd}_R(G^i), \text{GFC-pd}_R(M) \mid i \in I\} \leq n$，$\text{FC-pd}_R(Q) = \text{Sup}\{\text{FC-pd}_R(P_i), \text{FC-pd}_R(P^i), \text{FC-pd}_R(D) \mid i \in I\} \leq n$，由引理 3.7 知，对任意内射维数有限的有限余表现模 Q，都有 $\text{Ext}_R^{n+1}(N,Q) = 0$，因此 N 是强 n-Gorenstein FC-投射模。

($\Leftarrow$) 设 N 是强 n-Gorenstein FC-投射 R-模，且 $N = M \oplus Q$，由命题 3.5 可得，$\text{GFC-pd}_R(N) \leq n$。又由([7]命题 5.5)可得，$\text{GFC-pd}_R(N) = \text{Sup}\{\text{GFC-pd}_R(M), \text{GFC-pd}_R(Q)\}$，所以 $\text{GFC-pd}_R(M) \leq n$。

基金项目

国家自然科学基金项目(11361051)。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Societyc*, Amer. Math. Soc, Providence, RI, Vol. 94. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[4] Mahdou, N. and Tamekkante, M. (2009) Strongly n-Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **143**, 235-251.

[5] 刘仲奎，刘妍平．强 n-Gorenstein C-投射模和内射模[J]．西北师范大学学报(自然科学版), 2013, 49(4): 1.

[6] Gao, Z. and Jenda, H. (2013) On Strongly Gorenstein FP-Injective Modules. *Communications in Algebra*, **25**, 3035-3044. https://doi.org/10.1080/00927872.2012.672601

[7] Wang, Y. and Zhou, D.X. (2020) Gorenstein FC-Projective Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **19**, Article ID 2050066. https://doi.org/10.1142/S0219498820500668

[8] Xue, W.M. (1999) On N-Presented Modulesand Almost Excellent Extensions. *Communications in Algebra*, **27**, 1091-1102. https://doi.org/10.1080/00927879908826483

[9] 王玉，周德旭．关于强 Gorenstein FC-投射模[J]．福建师范大学学报(自然科学版), 2018, 34(5): 18-24.

[10] Huang, Z.Y. (2013) Proper Resolutions and Gorenstein Categories. *Journal of Algebra*, **393**, 142-169. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.07.008

[11] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. In: *de Gruyter Expositions Mathematics*, Vol. 30, Walter de Gruyter, Berlin.