Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(10), 990-995
Published Online October 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1010116

与权函数相关的一维实变Q型空间的Carleson型刻画

陈　萱

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛
Email: cxlyuqdu@163.com

收稿日期：2020年10月8日；录用日期：2020年10月23日；发布日期：2020年10月30日

摘　要

本文介绍了与权函数相关的一维实变Q型空间 $Q_K^p(\mathbb{R})$。本文利用Poisson积分，得到了 $Q_K^p(\mathbb{R})$ 空间的Carleson型刻画。

关键词

$Q_K^p(\mathbb{R})$ 空间，Poisson积分，Carleson测度

Carleson Type Characterization of One Dimensional Real Variable Q-Type Spaces Related to Weights

Xuan Chen

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong
Email: cxlyuqdu@163.com

Received: Oct. 8th, 2020; accepted: Oct. 23rd, 2020; published: Oct. 30th, 2020

Abstract

This paper introduces one-dimensional real variable Q-type spaces $Q_K^p(\mathbb{R})$ related to weights. By the aid of Poisson integral, this paper establishes the Carleson type characterization of $Q_K^p(\mathbb{R})$.

文章引用: 陈萱. 与权函数相关的一维实变 Q 型空间的 Carleson 型刻画[J]. 理论数学, 2020, 10(10): 990-995.
DOI: 10.12677/pm.2020.1010116

Keywords

$Q_K^p(\mathbb{R})$ Space, Poisson Integral, Carleson Measure

1. 引言

近年来，Q 型空间作为有界平均振荡空间和 Campanato-Morrey 空间的推广被研究者们引入。在单位圆盘 D 上，Q 型空间 $Q_p(D)$ 最初作为解析函数空间 $BMOA(D)$ 的 Möbius 不变子空间而被引入。2006 年，Essén-Wulan-Xiao [1]推广了 $Q_p(D)$，研究了与单位圆盘 D 上的权函数 K 相关的一类 Q 型空间。随后，Bao-Wulan 在文献[2]和[3]中研究了 $Q_K(D)$ 空间相对应的实变形式 $Q_K(\mathbb{R}^n)$。关于 $Q_K(\mathbb{R}^n)$ 空间的更多研究见文献[4]和[5]。

本文将一维 $Q_K(\mathbb{R})$ 推广到一维 $Q_K^p(\mathbb{R})$，$1<p<\infty$，定义如下：

定义 1 令 $1<p<\infty$，$f\in L_{loc}^p(\mathbb{R})$。若

$$\|f\|_{Q_K^p(\mathbb{R})}^p=\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\int_I\int_I\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p}K\left(\frac{|x-y|}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,$$

则称 f 属于 $Q_K^p(\mathbb{R})$ 空间，其中 $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是一个单调递增函数，I 为 $\mathbb{R}$ 上的一个平行于坐标轴的线段，$\ell(I)$ 表示 I 的长度。当 $p=2$ 时，$Q_K^p(\mathbb{R})=Q_K(\mathbb{R})$。

对于 $Q_K^p(\mathbb{R})$ 空间非常重要的辅助函数定义为 $\varphi_K(s)=\sup_{0<t\le1}\dfrac{K(st)}{K(t)}$，$0<s<\infty$。在本文中，我们假设 φ_K 满足以下两个条件：

$$\int_1^\infty\frac{\varphi_K(s)}{s^p}\mathrm{d}s<\infty, \tag{1}$$

$$\int_0^1\frac{\varphi_K(s)}{s^{p-1}}\mathrm{d}s<\infty. \tag{2}$$

本文在第 2 节介绍了 $Q_K^p(\mathbb{R})$ 空间上的一些基本性质，在第 3 节引入了 Carleson 型测度，并利用 Poisson 积分，得到了 $Q_K^p(\mathbb{R})$ 空间的 Carleson 型刻画。

2. $Q_K^p(\mathbb{R})$ 的基本性质

$Q_K^p(\mathbb{R})$ 与 $Q_K(\mathbb{R})$ 有相同的辅助函数。在文献[2]中，我们知道 $Q_K(\mathbb{R})$ 具有平移不变性，伸缩不变性和旋转不变性。类似可证这些性质在 $Q_K^p(\mathbb{R})$ 上也成立，并且我们发现 $Q_K^p(\mathbb{R})$ 是非平凡的。

定义 1 令 $1<p<\infty$，$f\in L_{loc}^p(\mathbb{R})$。若

$$\|f\|_{Q_{1-1/p}^p(\mathbb{R})}^p=\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\int_I\int_I\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,$$

则称 f 属于 $Q_{1-1/p}^p(\mathbb{R})$ 空间，其中 I 为 $\mathbb{R}$ 上的一个平行于坐标轴的线段。

定理 1 令$1<p<\infty$。$Q_{1-1/p}^{p}(\mathbb{R})\subseteq Q_{K}^{p}(\mathbb{R})$，所以$Q_{K}^{p}(\mathbb{R})$是非平凡的。

证明 设 I 为$\mathbb{R}$中的一条线段，$x,y\in I$，则有$|x-y|\le l(I)$成立。因为 K 是一个增函数，所以$K\left(\frac{|x-y|}{l(I)}\right)\le K(1)$。对于$\forall f\in Q_{1-1/p}^{p}(\mathbb{R})$，下式成立

$$\iint_{I}\frac{|f(x)-f(y)|^{p}}{|x-y|^{p}}K\left(\frac{|x-y|}{l(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le K(1)\iint_{I}\frac{|f(x)-f(y)|^{p}}{|x-y|^{p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{。}$$

所以，$Q_{1-1/p}^{p}(\mathbb{R})\subseteq Q_{K}^{p}(\mathbb{R})$。由[6]可知$Q_{1-1/p}^{p}(\mathbb{R})$是非平凡的，所以$Q_{K}^{p}(\mathbb{R})$也是非平凡的。

3. $Q_{K}^{p}(\mathbb{R})$空间的 Carleson 型刻画

在本节中，我们引入了K_p-Carleson 测度，并用K_p-Carleson 测度来刻画$Q_{K}^{p}(\mathbb{R})$空间。设I是$\mathbb{R}$上任意一条平行于坐标轴的线段，$\mathbb{R}_{+}^{2}=\{(x,t):x\in\mathbb{R},t>0\}$。Carleson 方形$S(I)$定义为$S(I)=\{(x,t)\in\mathbb{R}_{+}^{2}:x\in I,0<t<\ell(I)\}$。$K_p$-Carleson 测度定义如下：

定义 4 设$\mu(\cdot,\cdot)$为$\mathbb{R}_{+}^{2}$上的一个正 Borel 测度，若

$$\sup_{I\subseteq\mathbb{R}}\int_{S(I)}K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}\mu(x,t)<\infty\text{，}$$

则称$\mu(\cdot,\cdot)$是$\mathbb{R}_{+}^{2}$上的一个K_p-Carleson 测度。

引理 1 [7] 令$1<p<\infty$，$1/p+1/q=1$，$0<b\le\infty$。设非负函数μ和ν在$(0,b)$上可测，对于所有可测函数$f\ge 0$，可得到以下 Hardy 型不等式：

(i) $\int_0^b\left(\int_0^s f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mu(s)\mathrm{d}s\le C\int_0^b f^p(s)\nu(s)\mathrm{d}s$成立，当且仅当

$$A:=\sup_{0<s<b}\left(\int_s^b\mu(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^s\nu(t)^{1-q}\mathrm{d}t\right)^{1/q}<\infty\text{，}$$

(ii) $\int_0^b\left(\int_s^b f(t)\mathrm{d}t\right)^p\mu(s)\mathrm{d}s\le C\int_0^b f^p(s)\nu(s)\mathrm{d}s$成立，当且仅当

$$B:=\sup_{0<s<b}\left(\int_0^s\mu(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_s^b\nu(t)^{1-q}\mathrm{d}t\right)^{1/q}<\infty\text{，}$$

其中C取决于p，A或者B。

设f是$\mathbb{R}$上的可测函数，且满足

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{1+|x|^2}\mathrm{d}x<\infty\text{，}\tag{3}$$

$P_t(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{t}{t^2+|x|^2}$为 Poisson 核，记$f(\cdot,\cdot)$为$f$的 Poisson 积分，$f(x,t)=\int_{\mathbb{R}}P_t(x-y)f(y)\mathrm{d}y$，$\nabla f(x,t)=\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x},\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)$。

定理 2 令$1<p<\infty$，$f\in L_{loc}^{p}(\mathbb{R})$满足(3)式。若 K 满足条件(1)和(2)，那么$f\in Q_{K}^{p}(\mathbb{R})$当且仅当$|\nabla f(x,t)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t$是$K_p$-Carleson 测度。

证明 若K满足条件(1)和(2)，类似[2]中引理 7 和引理 8 的证明，可推出以下式子成立：

$$\sup_{0<s<1}\left(\int_s^1 t^{-p}K(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^s (K(t))^{1/(1-p)}\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}<\infty, \tag{4}$$

$$\sup_{0<s<\infty}\left(\int_0^s K(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_s^\infty t^{p/(1-p)}(K(t))^{1/(1-p)}\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}<\infty。 \tag{5}$$

(i) 充分性。设 I 是一条线段， $f(x,t)$ 为 f 的 Poisson 积分。由三角不等式可得

$$\sup_I\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\frac{1}{|y|^p}\int_I\left|f(x+y)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\lesssim M_1+M_2+M_3,$$

其中，

$$\begin{cases}M_1=\sup_I\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\frac{1}{|y|^p}\int_I\left|f(x,|y|)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ M_2=\sup_I\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\frac{1}{|y|^p}\int_I\left|f(x+y,|y|)-f(x+y)\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\\ M_3=\sup_I\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\frac{1}{|y|^p}\int_I\left|f(x+y,|y|)-f(x,|y|)\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{cases}$$

对于 M_1，由 Minkowski 不等式可得

$$\left(\int_I\left|f(x,|y|)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}=\left(\int_I\left(\int_0^{|y|}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\le\int_0^{|y|}\left(\int_I\left|\nabla f(x,t)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}t。$$

所以，由(4)和引理 1 可推出

$$\begin{aligned}M_1&\le\sup_I\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\frac{1}{|y|^p}\left(\int_0^{|y|}\left(\int_I\left|\nabla f(x,t)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}y\\&\le\sup_I\int_0^1\frac{\ell(I)K(r)}{r^p}\left(\int_0^r\left(\int_I\left|\nabla f(x,\ell(I)s)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}s\right)^p\mathrm{d}r\\&\lesssim\sup_I\ell(I)\int_0^1\left(\int_I\left|\nabla f(x,\ell(I)r)\right|^p\mathrm{d}x\right)K(r)\mathrm{d}r\\&\lesssim\sup_I\int_{S(I)}\left|\nabla f(x,t)\right|^pK\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<\infty.\end{aligned}$$

对于 M_2， 得到 $M_2\le\sup_I\int_{|y|<\ell(I)}K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right)\frac{1}{|y|^p}\int_{3I}\left|f(x,|y|)-f(x)\right|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\lesssim M_1<\infty$。

由 Minkowski 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\int_I\left|f(x+y,|y|)-f(x,|y|)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}&\le\left(\int_I\left(\int_0^{|y|}\left|\nabla f\left(x+\frac{ty}{|y|},|y|\right)\right|\mathrm{d}t\right)^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\&\le\int_0^{|y|}\left(\int_I\left|\nabla f\left(x+\frac{ty}{|y|},|y|\right)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\mathrm{d}t\\&\le|y|\left(\int_{3I}\left|\nabla f(x,|y|)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

所以，

$$M_3 \le \sup_I \int_{|y|<\ell(I)} K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right) \int_{3I} \left|\nabla f\left(x,|y|\right)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \lesssim \sup_I \int_{S(I)} \left|\nabla f\left(x,t\right)\right|^p K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t < \infty \text{。}$$

综上所述，$\sup_I \int_{|y|<\ell(I)} K\left(\frac{|y|}{\ell(I)}\right) \frac{1}{|y|^p} \int_I \left|f(x+y)-f(x)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$。所以，$f \in Q_K^p(\mathbb{R})$。

(ii) 必要性。设 I 和 J 是 $\mathbb{R}$ 上以 x_0 为中心的线段，$\ell(J)=3\ell(I)$。由(4)可推出

$$\sup_{0<s<1} \left(\int_s^1 t^{-2p} K(t)\mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_0^s t^{p/(p-1)} \left(K(t)\right)^{1/(1-p)} \mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p} < \infty. \tag{6}$$

由引理 1，(5)和(6)，类似[2]中引理 12 的证明，我们可以得到

$$\int_{S(I)} \left|\nabla f(x,t)\right|^p K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \lesssim A_1 + A_2 + A_3 \text{，}$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \int_{|y|\le\ell(I)} \int_{x\in J} \dfrac{\left|f(x)-f(x+y)\right|^p}{|y|^p} K\left(\dfrac{|y|}{\ell(J)}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \\ A_2 = \left(\int_0^1 K(t)\mathrm{d}t + \int_{1/8}^\infty \dfrac{K(t)}{t^p}\mathrm{d}t\right) \left(\ell(J)\right)^{1-p} \int_{y\in J} \left|f(y)-f_J\right|^p \mathrm{d}y, \\ A_3 = \left(\ell(J)\right)^2 \int_0^1 K(t)\mathrm{d}t \left(\int_{\mathbb{R}\setminus(2/3)J} \dfrac{\left|f(y)-f_J\right|}{|y|^2} \mathrm{d}y\right)^p. \end{cases}$$

显然，$A_1 \lesssim \|f\|_{Q_K^p(\mathbb{R})}^p$。若 $\delta>0$ 足够的小，$z\in I$ 且 $\min\{|x-z|,|y-z|\}>\delta\ell(I)$，易得

$$C_\delta K(\delta)|I| \le \int_I \min\left(K\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right), K\left(\frac{|y-z|}{\ell(I)}\right)\right) \mathrm{d}z \text{。}$$

则

$$\begin{aligned} A_2 &\lesssim \left(\ell(J)\right)^{-p-1} \int_J \int_J \left|f(x)-f(y)\right|^p \left(\int_I \min\left\{K\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right), K\left(\frac{|y-z|}{\ell(I)}\right)\right\} \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\lesssim \int_J \int_J \frac{\left|f(x)-f(z)\right|^p}{|x-z|^p} K\left(\frac{|x-z|}{\ell(I)}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z \lesssim \|f\|_{Q_K^p(\mathbb{R})}^p. \end{aligned}$$

对于 A_3，有

$$\begin{aligned} A_3 &\lesssim \left(\ell(J)\right)^2 \left(\sum_{k=1}^\infty \int_{2^k\ell(J)\le|x-x_0|<2^{k+1}\ell(J)} \frac{\left|f(x)-f_J\right|}{|x-x_0|^2} \mathrm{d}x\right)^p \\ &\le \left(\ell(J)\right)^2 \left\{\sum_{k=1}^\infty \left(2^k\ell(J)\right)^{-2} \int_{2^{k+1}J} \left|f(x)-f_{2^{k+1}J}\right| \mathrm{d}x \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=0}^k \left(2^k\ell(J)\right)^{-2} \int_{2^{k+1}J} \left|f_{2^{i+1}J} - f_{2^iJ}\right| \mathrm{d}x \right\}^p \\ &\lesssim \left(\sum_{k=1}^\infty 2^{-2k/p} \|f\|_{Q_K^p(\mathbb{R})} + \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=0}^k 2^{-k} \cdot 2^{i(1-2/p)} \|f\|_{Q_K^p(\mathbb{R})}\right)^p \\ &\lesssim \|f\|_{Q_K^p(\mathbb{R})}^p. \end{aligned}$$

所以，

$$\int_{S(I)}|\nabla f(x,t)|^{p}K\left(\frac{t}{\ell(I)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\lesssim\|f\|_{Q_K^p(\mathbb{R})}^{p}。$$

致　谢

作者衷心感谢李澎涛教授对这一课题的指导和建议。

参考文献

[1] Essén, M., Wulan, H. and Xiao, J. (2006) Several Function-Theoretic Characterizations of Möbius Invariant Q_K Spaces. *Journal of Function Analysis*, **230**, 78-115. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2005.07.004

[2] Bao, G. and Wulan, H. (2014) Q_K Spaces of Several Real Variables. *Abstract and Applied Analysis*, **2014**, 1-14. https://doi.org/10.1155/2014/931937

[3] 鲍官龙, 乌兰哈斯. $Q_K(\mathbb{R}^n)$空间的 John-Nirenberg 型不等式与小波刻画[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45(11): 97-110.

[4] Essén, M. and Wulan, H. (2002) On Analytic and Meromorphic Function and Spaces of Q_K-Type. *Illinois Journal of Mathematics*, **46**, 1233-1258. https://doi.org/10.1215/ijm/1258138477

[5] Wulan, H. and Zhou, J. (2014) Decomposition Theorems for Q_K Spaces and Applications. *Forum Mathematicum*, **26**, 467-495. https://doi.org/10.1515/form.2011.174

[6] Yang, D. and Yuan, W. (2008) A New Class of Function Spaces Connecting Triebel-Lizorkin Spaces and Q Spaces. *Journal of Functional Analysis*, **255**, 2760-2809. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.09.005

[7] Kufner, A. and Persson, L.-E. (2003) Weighted Inequalities of Hardy Type. World Scientific Publishing, River Edge, NJ, USA. https://doi.org/10.1142/5129