Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1061-1069
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011126

Hans汉斯

一类集合生态系统的一致持久性

刘　菁，杨喜陶

湖南科技大学数学与计算科学学院，湖南　湘潭
Email: 354641826@qq.com

收稿日期：2020年10月20日；录用日期：2020年11月10日；发布日期：2020年11月17日

摘　要

本文研究了一类集合生态系统内部双向资源交换的动力学行为，利用比较原理研究它的一致持久性，得到了该系统一致持久性的充分条件。

关键词

集合生态系统，一致持久性，时滞，比较原理

The Uniform Persistence of a Meta-Ecosystem

Jing Liu, Xitao Yang

School of Mathematics and Computational Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan Hunan
Email: 354641826@qq.com

Received: Oct. 20th, 2020; accepted: Nov. 10th, 2020; published: Nov. 17th, 2020

Abstract

In this paper we study the dynamic behavior of bi-directional resource exchange within a meta-ecosystem. By using the comparison principle, some sufficient conditions are determined that guarantee the uniform persistence of the model.

Keywords

Meta-Ecosystem, Uniform Persistence, Delay, Comparison Theorem

文章引用: 刘菁, 杨喜陶. 一类集合生态系统的一致持久性[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1061-1069.
DOI: 10.12677/pm.2020.1011126

1. 引言

生物种群的持续生存问题一直是很多生物数学家所关注的重要课题之一，很多学者研究系统的一致持久性[1]-[10]。持久性的动力系统方法为处理这类数学问题提供了非常有用的工具，例如平均 Lyapunov 函数[3]，正常或外部 Lyapunov 指数[3] [4] [5]，不变概率测度[3] [5] [6] [7]，或链递归，与莫尔斯分解或无环理论[6] [8] [9]结合使用。

最近，Messan 和 Kopp 等人为了研究集合生态系统中两个生态系统之间的双向资源交换的动态产出，在[11]中建立了如下生态模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = r_p P\left[1 - \dfrac{P}{K_p + a_p Q}\right] - b_p QP \\ \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = r_q Q\left[1 - \dfrac{Q}{K_q + a_q P}\right] - b_q QP \end{cases}$$

其中，$P(t), Q(t)$ 是在时间 t 进行资源交换的两个相邻生态系统的产出，$r_i, i = p, q$ 是生态系统中生物量的内在增长率，K_i 是在没有资源交换的情况下生态系统 i 的承载能力；a_i 表示从贡献者生态系统转移到接收系统 i 的资源数量；b_i 表示生态系统层面上供体生态系统 i 的资源枯竭率。[11]指出上述系统当

$$\beta_i = \frac{b_i}{r_i} K_j < 1\left(i \neq j\right)$$

时为一致持久的。

由于受气候、环境等因素变化的影响，r_i, K_i, a_i, b_i 不一定是常数，而是会随着时间的推移而发生变化，即为时间 t 的函数。

同时，如[12] [13]中指出，时滞现象是生物学中另外一种重要现象，说明了群体在成长或消化吸收时的延迟规律。由于种群的相互影响普遍存在滞后现象，近年来具有时滞阶段结构的生物模型得到了广泛的研究。考虑到进行双向资源交换后生物种群的发育时间，生态系统的产出受到生物种群发育情况的影响，即生态系统的资源产出对生物种群数量存在时间滞后现象。基于以上两点考虑，建立如下带有时滞的模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)\left[r_1(t) - \dfrac{r_1(t)x(t-\tau_1(t))}{K_1(t) + a_1(t)y(t)} - b_1(t)y(t)\right] \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(t)\left[r_2(t) - \dfrac{r_2(t)y(t-\tau_2(t))}{K_2(t) + a_2(t)x(t)} - b_2(t)x(t)\right] \end{cases}, \tag{1}$$

其中 $r_i(t), K_i(t), a_i(t), b_i(t), i = 1,2$ 是定义在 R 上的非负连续有界函数。据我们所知，系统(1)的一致持久性未有相应结果，受[14] [15]启发，本文将研究这一问题。我们首先给出一些记号与定义：对定义于 R 上的非负连续有界函数 $g(t)$，令

$$g^u = \sup_{t\in R} g(t),\ g^l = \inf_{t\in R} g(t),\ g^* = \limsup_{x\to\infty} g(t),\ g_* = \liminf_{x\to\infty} g(t),\ \tau = \max\left(\tau_1^u, \tau_2^u\right)$$

$\forall\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)\in C^+=\{(\varphi_1,\varphi_2)\in C[-\tau,0],R^2\mid\varphi_i(\theta)\ge 0,\varphi_i(0)>0,i=1,2\}$，由[12]定理 2.1 知，方程有唯一满足初始条件 $x_0=\varphi$ 的解

$$x(t,0,\varphi)=(x_1(t,0,\varphi_1,\varphi_2),x_2(t,0,\varphi_1,\varphi_2))$$

且 $x_i(t,0,\varphi_1,\varphi_2)>0(\forall t>0,i=1,2)$。

2. 一致持久性

定义 1 系统(1)的解是一致持久的，如果存在正常数 $m_i,M_i(i=1,2)$，对任意 $\varphi\in C^+$ 有

$$m_1\le\liminf_{t\to\infty}x(t,0,\varphi)\le\limsup_{t\to\infty}x(t,0,\varphi)\le M_1,$$

$$m_2\le\liminf_{t\to\infty}y(t,0,\varphi)\le\limsup_{t\to\infty}y(t,0,\varphi)\le M_2.$$

为了本节主要结果的证明，先给出以下两个引理：

引理 1 $x(t),y(t)$ 是定义在 $[T,+\infty)$ 上的非负函数，如果

$$x'\le\frac{x(m-nx)}{K+ay},\tag{2}$$

则

$$\limsup_{t\to\infty}x\le\frac{m}{n},$$

其中 m,n,K,a 为正常数。

证明：令 $g(t)=K+ay$，显然 $g(t)\ge K$。

由比较原理知：

$$x\le\left[e^{-\int_T^t\frac{m}{g(s)}ds}\left(\int_T^t\frac{n}{g(u)}e^{\int_T^u\frac{m}{g(s)}ds}du+\tilde c\right)\right]^{-1},$$

其中 $\tilde c=\frac{1}{x(T)}-1$，令 $t\to+\infty$，$\limsup_{t\to\infty}x\le\frac{m}{n}$。

引理 2 $x(t),y(t)$ 是定义在 $[T,+\infty)$ 上的非负函数，如果

$$x'\ge\frac{x(m-nx)}{K+ay},\tag{3}$$

则

$$\liminf_{t\to\infty}x\ge\frac{m}{n},$$

其中 m,n,K,a 为正常数。

证明类似于引理 1，从略。

引理 3 $\exists M_1,M_2>0$，使得 $\forall\varphi\in C^+$，$\limsup_{t\to\infty}x(t,0,\varphi)\le M_1$，$\limsup_{t\to\infty}y(t,0,\varphi)\le M_2$。其中

$$M_1=\begin{cases}\dfrac{r_1^*K_1^*\exp(r_1^*\tau_1^u)}{r_{1*}},r_1^*a_1^*<K_1^*b_{1*}\\[2ex]\dfrac{(r_1^*a_1^*+K_1^*b_{1*})^2\exp(r_1^*\tau_1^u)}{4a_1^*b_{1*}r_{1*}},r_1^*a_1^*\ge K_1^*b_{1*}\end{cases},$$

$$M_2=\begin{cases}\dfrac{r_2^* K_2^* \exp\left(r_2^* \tau_2^u\right)}{r_{2*}}, r_2^* a_2^* < K_2^* b_{2*} \\ \dfrac{\left(r_2^* a_2^* + K_2^* b_{2*}\right)^2 \exp\left(r_2^* \tau_2^u\right)}{4 a_2^* b_{2*} r_{2*}}, r_2^* a_2^* \ge K_2^* b_{2*}\end{cases}.$$

证明：记 $x(t)=x(t,0,\varphi), y(t)=y(t,0,\varphi)$。下面考虑两种情况：

情形(1)：$r_1^* a_1^* < K_1^* b_{1*}$ 时，$\exists \varepsilon_0 > 0$，当 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ 时，有

$$\left(r_1^* + \varepsilon\right)\left(a_1^* + \varepsilon\right) < \left(K_1^* + \varepsilon\right)\left(b_{1*} - \varepsilon\right). \tag{4}$$

$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \exists T_1 > 0$ 使得当 $t > T_1$ 时：

$$r_{1*} - \varepsilon < r_1(t) < r_1^* + \varepsilon,\ K_{1*} - \varepsilon < K_1(t) < K_1^* + \varepsilon \tag{5}$$

$$a_{1*} - \varepsilon < a_1(t) < a_1^* + \varepsilon,\ b_{1*} - \varepsilon < b_1(t) < b_1^* + \varepsilon \tag{6}$$

当 $t > T_1$ 时，由(1)和(5)知

$$x'(t) \le \left(r_1^* + \varepsilon\right) x(t).$$

从而

$$x(t) \le x\left(t - \tau_1(t)\right) \exp\left(\left(r_1^* + \varepsilon\right) \tau_1^u\right).$$

代入(1)，由(5)及(6)得当 $t > T_1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &\le x(t)\left[\left(r_1^* + \varepsilon\right) - \frac{\left(r_1^* - \varepsilon\right) x(t) \exp\left(-\left(r_1^* + \varepsilon\right)\tau_1^u\right)}{\left(K_1^* + \varepsilon\right) + \left(a_1^* + \varepsilon\right) y(t)} - \left(b_{1*} - \varepsilon\right) y(t)\right] \\ &= x(t) \frac{g_1(\varepsilon) + g_2(\varepsilon) y(t) - g_3(\varepsilon) y^2(t) - g_4(\varepsilon) x(t)}{\left(K_1^* + \varepsilon\right) + \left(a_1^* + \varepsilon\right) y(t)}\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&g_1(\varepsilon) = \left(r_1^* + \varepsilon\right)\left(K_1^* + \varepsilon\right), \\ &g_2(\varepsilon) = \left(r_1^* + \varepsilon\right)\left(a_1^* + \varepsilon\right) - \left(K_1^* + \varepsilon\right)\left(b_{1*} - \varepsilon\right), \\ &g_3(\varepsilon) = \left(a_1^* + \varepsilon\right)\left(b_{1*} - \varepsilon\right), \\ &g_4(\varepsilon) = \left(r_{1*} - \varepsilon\right) \exp\left(-\left(r_1^* + \varepsilon\right)\tau_1^u\right)\end{aligned}$$

从而

$$x' \le x(t) \frac{g_1(\varepsilon) - g_4(\varepsilon) x(t)}{\left(K_1^* + \varepsilon\right) + \left(a_1^* + \varepsilon\right) y(t)}.$$

由 ε 的任意性及引理 1，

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) \le \frac{r_1^* K_1^* \exp\left(r_1^* \tau_1^u\right)}{r_{1*}} = M_1.$$

情形(2)：$r_1^* a_1^* \ge K_1^* b_{1*}$ 时，$\forall \varepsilon > 0, \exists T_2 > 0$，当 $t > T_2$ 时(4)与(5)成立。此时有：

$$x' \le x(t)\frac{g_1(\varepsilon)+g_2(\varepsilon)y(t)-g_3(\varepsilon)y^2(t)-g_4(\varepsilon)x(t)}{(K_1^*+\varepsilon)+(a_1^*+\varepsilon)y(t)}$$

$$= x(t)\frac{g_1(\varepsilon)-g_3(\varepsilon)\left(y(t)-\dfrac{g_2(\varepsilon)}{2g_3(\varepsilon)}\right)^2+\dfrac{g_2^2(\varepsilon)}{4g_3(\varepsilon)}-g_4(\varepsilon)x(t)}{(K_1^*+\varepsilon)+(a_1^*+\varepsilon)y(t)}$$

$$\le x(t)\frac{g_1(\varepsilon)+\dfrac{g_2^2(\varepsilon)}{4g_3(\varepsilon)}-g_4(\varepsilon)x(t)}{(K_1^*+\varepsilon)+(a_1^*+\varepsilon)y(t)}$$

由 ε 的任意性及引理 1，

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) \le \frac{(r_1^*a_1^*+K_1^*b_{1*})^2\exp(r_1^*\tau_1^u)}{4a_1^*b_{1*}r_{1*}} = M_1 .$$

综上所述：

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) \le M_1 = \begin{cases}\dfrac{r_1^*K_1^*\exp(r_1^*\tau_1^u)}{r_{1*}}, r_1^*a_1^* < K_1^*b_{1*}\\ \dfrac{(r_1^*a_1^*+K_1^*b_{1*})^2\exp(r_1^*\tau_1^u)}{4a_1^*b_{1*}r_{1*}}, r_1^*a_1^* \ge K_1^*b_{1*}\end{cases} .$$

同理可得

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) \le M_2 = \begin{cases}\dfrac{r_2^*K_2^*\exp(r_2^*\tau_2^u)}{r_{2*}}, r_2^*a_2^* < K_2^*b_{2*}\\ \dfrac{(r_2^*a_2^*+K_2^*b_{2*})^2\exp(r_2^*\tau_2^u)}{4a_2^*b_{2*}r_{2*}}, r_2^*a_2^* \ge K_2^*b_{2*}\end{cases} .$$

引理 4 记 $s_1 = \dfrac{r_2^*K_2^*\exp(r_2^*\tau_2^u)}{r_{2*}}, s_2 = \dfrac{r_1^*K_1^*\exp(r_1^*\tau_1^u)}{r_{1*}}$。当

$$r_{i*} - b_i^* s_i > 0\ (i=1,2) \tag{7}$$

时，$\exists \eta_i > 0 (i=1,2)$，使得 $\forall \varphi \in C^+, \limsup_{t\to\infty} x(t,0,\varphi) \ge \eta_1, \limsup_{t\to\infty} y(t,0,\varphi) \ge \eta_2$。

证明：由(7)知存在 $\eta_1 > 0$，使得

$$\frac{(r_{1*}-b_1^*s_1(\eta_1))K_{1*}\exp\left(r_{1*}-\dfrac{r_1^*M_1}{K_{1*}}-b_1^*s_1(\eta_1)\right)\tau_1^l}{r_1^*} > \eta_1 . \tag{8}$$

其中 $s_1(\eta_1) = \dfrac{r_2^*(K_2^*+a_2^*\eta_1)\exp(r_2^*\tau_2^u)}{r_{2*}}$。

我们断言：对这个 η_1，对任意 $\varphi \in C^+$，有 $\limsup_{t\to\infty} x(t,0,\varphi) \ge \eta_1$。

若 $\exists \varphi \in C^+$，使得 $\limsup_{t\to\infty} x(t,0,\varphi) < \eta_1$。记 $x(t) = x(t,0,\varphi), y(t) = y(t,0,\varphi)$。则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得当 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ 时，$\exists T_3 > 0$，当 $T_3 > 0$ 时有(5)与(6)成立且 $x(t) < \eta_1 + \varepsilon$。

由(1)得：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \le y(t)\left(r_2^* + \varepsilon\right),$$

$$y(t) \le y\left(t - \tau_2(t)\right)\exp\left(\left(r_2^* + \varepsilon\right)\tau_2^u\right). \tag{9}$$

由(1)，(9)得：当 $t > T$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \le y(t)\left(\left(r_2^* + \varepsilon\right) - \frac{\left(r_{2*} - \varepsilon\right)\exp\left(-\left(r_2^* + \varepsilon\right)\tau_2^u\right)y(t)}{\left(K_2^* + \varepsilon\right) + \left(a_2^* + \varepsilon\right)\left(\eta_1 + \varepsilon\right)}\right).$$

由比较原理及 ε 的任意性可知：

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) \le \frac{r_2^*\left(K_2^* + a_2^*\eta_1\right)\exp\left(r_2^*\tau_2^u\right)}{r_{2*}} = s_1(\eta_1). \tag{10}$$

由(1)，(10)得：$\exists T_1 > T$，当 $t > T_1$ 时

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ge x(t)\left(\left(r_{1*} - \varepsilon\right) - \frac{\left(r_1^* + \varepsilon\right)M_1}{\left(K_{1*} - \varepsilon\right)} - \left(b_1^* + \varepsilon\right)\left(s_1(\eta_1) + \varepsilon\right)\right),$$

$$x(t) \ge x\left(t - \tau_1(t)\right)\exp\left(\left(r_{1*} - \varepsilon\right) - \frac{\left(r_1^* + \varepsilon\right)\left(M_1 + \varepsilon\right)}{\left(K_{1*} - \varepsilon\right)} - \left(b_1^* + \varepsilon\right)\left(s_1(\eta_1) + \varepsilon\right)\right)\tau_1^l. \tag{11}$$

由(1)，(11)得：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ge x(t)\left(\left(r_{1*} - \varepsilon\right) - \frac{h(\varepsilon)x(t)}{K_{1*} - \varepsilon} - \left(b_1^* + \varepsilon\right)\left(s_1(\eta_1) + \varepsilon\right)\right),$$

其中

$$h(\varepsilon) = \left(r_1^* + \varepsilon\right)\exp\left(-\left(\left(r_{1*} - \varepsilon\right) - \frac{\left(r_1^* + \varepsilon\right)\left(M_1 + \varepsilon\right)}{K_{1*} - \varepsilon} - \left(b_1^* + \varepsilon\right)\left(s_1(\eta_1) + \varepsilon\right)\right)\tau_1^l\right)$$

由比较原理及 ε 的任意性可知：

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) \ge \frac{\left(r_{1*} - b_1^* s_1(\eta_1)\right)K_{1*}\exp\left(r_{1*} - \frac{r_1^* M_1}{K_{1*}} - b_1^* s_1(\eta_1)\right)\tau_1^l}{r_1^*} > \eta_1.$$

这与(8)及假设 $\limsup_{t\to\infty} x(t,0,\varphi) < \eta_1$ 矛盾。从而 $\limsup_{t\to\infty} x(t,0,\varphi) \ge \eta_1$。同理存在 $\eta_2 > 0$，使得 $\forall \varphi \in C^+, \limsup_{t\to\infty} y(t,0,\varphi) \ge \eta_2$。

定理 1 当(7)成立时，系统(1)的解是一致持久的。

证明：要证存在 $m_1 > 0$ 使得 $\forall \varphi \in C^+$，

$$\liminf_{t\to\infty} x(t,0,\varphi) > m_1. \tag{12}$$

由(7)知，存在 $\varepsilon > 0$，使得

$$\left(r_{2*}-\varepsilon\right)-\frac{\left(r_1^*+\varepsilon\right)\varepsilon}{\left(K_{1*}-\varepsilon\right)}-\left(b_2^*+\varepsilon\right)\left(\frac{r_{1*}-\varepsilon}{\left(r_1^*+\varepsilon\right)\left(K_1^*+\varepsilon\right)\exp\left(\left(r_1^*+\varepsilon\right)\left(\tau_1^u+\varepsilon\right)\right)}\right)^{-1}>0. \tag{13}$$

对这个 $\varepsilon>0$，$\exists T_1$ 使得当 $t>T_1$ 时 (5) 与 (6) 成立。若 (12) 不成立，则存在 $\varphi_n\in C^+$ 使得 $\liminf_{t\to\infty}x\left(t,0,\varphi_n\right)<\frac{1}{n^2}$。存在 $N_0>0$ 使得 $\frac{1}{N_0}<\eta_1$ (η_1 为引理 4 所给)。当 $n>N_0$ 时，由引理 4，存在 $0<\tau_1^{(n)}<t_1^{(n)}<\tau_2^{(n)}<\cdots<\tau_k^{(n)}<t_k^{(n)}<\cdots$ 使得 $\lim_{k\to\infty}\tau_k^{(n)}=\infty$，

$$x\left(\tau_k^{(n)},0,\varphi_n\right)=\frac{1}{n},\ x\left(t_k^{(n)},0,\varphi_n\right)=\frac{1}{n^2}. \tag{14}$$

且 $\frac{1}{n^2}<x\left(t,0,\varphi_n\right)<\frac{1}{n},\tau_k^{(n)}<t<t_k^{(n)}$。由引理 3，存在 $T\left(\varphi_n\right)>0$ 使得当 $t>T\left(\varphi_n\right)$ 时 $x\left(t,0,\varphi_n\right)<2M_1,y\left(t,0,\varphi_n\right)<2M_2$。从而当 $t>T\left(\varphi_n\right)+\tau$ 时有

$$x'\left(t,0,\varphi_n\right)>x\left(t,0,\varphi_n\right)\left(-\frac{2r_1^uM_1}{K_1^l}-2b_1^uM_2\right)\triangleq-\beta_1x\left(t,0,\varphi_n\right). \tag{15}$$

存在 $K_1^{(n)}$，当 $k>K_1^{(n)}$ 时 $\tau_k^{(n)}>\max\left(T\left(\varphi_n\right),T_1\right)$。由(14)与(15)知

$$t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}>\frac{\ln n}{\beta_1},\ k>K_1^{(n)}.$$

由(1)知 $y'\left(t,0,\varphi_n\right)<\left(r_2^*+\varepsilon\right)y\left(t,0,\varphi_n\right),t\geq T_1$。
从而 $y\left(t,0,\varphi_n\right)\leq y\left(t-\tau_2\left(t\right),0,\varphi_n\right)\exp\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\tau_2^*+\varepsilon\right)$。故有 $\forall t\in\left(\tau_k^{(n)},t_k^{(n)}\right)$，

$$y'\left(t,0,\varphi_n\right)\leq y\left(t,0,\varphi_n\right)\left(\left(r_2^*+\varepsilon\right)-\frac{\left(r_{2*}-\varepsilon\right)\exp-\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\tau_2^*+\varepsilon\right)}{\left(K_2^*+\varepsilon\right)+\left(a_2^*+\varepsilon\right)\frac{1}{n}}y\left(t,0,\varphi_n\right)\right).$$

由此得

$$\begin{aligned}y\left(t,0,\varphi_n\right)\leq&\left(\left(\frac{1}{y\left(\tau_k^{(n)}\right)}-\frac{\left(r_{2*}-\varepsilon\right)\exp-\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\tau_2^*+\varepsilon\right)}{\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\left(K_2^*+\varepsilon\right)+\left(a_2^*+\varepsilon\right)\frac{1}{n}\right)}\right)\exp-\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(t-\tau_k^{(n)}\right)\right.\\&\left.+\frac{\left(r_{2*}-\varepsilon\right)\exp-\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\tau_2^*+\varepsilon\right)}{\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\left(K_2^*+\varepsilon\right)+\left(a_2^*+\varepsilon\right)\frac{1}{n}\right)}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{16}$$

当 $k>K_1^{(n)}$ 且 $t-\tau_k^{(n)}>\frac{t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}}{2}>\frac{\ln n}{2\beta_1}$ 时，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2M_2}-\frac{\left(r_{2*}-\varepsilon\right)\exp-\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\tau_2^*+\varepsilon\right)}{\left(r_2^*+\varepsilon\right)\left(\left(K_2^*+\varepsilon\right)+\left(a_2^*+\varepsilon\right)\frac{1}{n}\right)}\right)\frac{1}{n^{\frac{r_2^*+\varepsilon}{2\beta}}}=0.$$

存在 $N_1 > N_0$，当 $n > N_1$ 时 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 且

$$\left|\left(\frac{1}{2M_2} - \frac{(r_{2*}-\varepsilon)\exp-(r_2^*+\varepsilon)(\tau_2^*+\varepsilon)}{(r_2^*+\varepsilon)\left((K_2^*+\varepsilon)+(a_2^*+\varepsilon)\frac{1}{n}\right)}\right)\frac{1}{n^{\frac{r_2^*+\varepsilon}{2\beta}}}\right| < \varepsilon. \tag{17}$$

从而当 $n > N_1, k > K_1^{(n)}, t-\tau_k^{(n)} > \frac{t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}}{2}$ 时，由(16)与(17)知

$$y(t,0,\varphi_n) < \left(\frac{(r_{2*}-\varepsilon)\exp-(r_2^*+\varepsilon)(\tau_2^*+\varepsilon)}{(r_2^*+\varepsilon)\left((K_2^*+\varepsilon)+(a_2^*+\varepsilon)\frac{1}{n}\right)} - \varepsilon\right)^{-1}.$$

从而由(13)，当 $n > N_1$ 且 $k > K_1^{(n)}$，$t \in \left(\tau_k^{(n)} > \frac{t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}}{2}, t_k^{(n)}\right)$ 时，

$$x'(t,0,\varphi_n) > x(t,0,\varphi_n)\left(r_{1*}-\varepsilon-\frac{(r_1^*+\varepsilon)\varepsilon}{K_{1*}-\varepsilon}-(b_1^*+\varepsilon)\left(\frac{(r_{2*}-\varepsilon)\exp-(r_2^*+\varepsilon)(\tau_2^*+\varepsilon)}{(r_2^*+\varepsilon)\left((K_2^*+\varepsilon)+(a_2^*+\varepsilon)\varepsilon\right)} - \varepsilon\right)^{-1}\right) > 0$$

故有 $x\left(t_k^{(n)},0,\varphi_n\right) > x\left(\tau_k^{(n)}+\frac{t_k^{(n)}-\tau_k^{(n)}}{2},0,\varphi_n\right) > \frac{1}{n^2}$。矛盾。故(12)成立。同理，存在 $m_2 > 0$ 使得 $\forall\varphi \in C^+, \liminf_{t\to\infty} y(t,0,\varphi) > m_2$。

注：当 $\tau = 0$ 且 $r_i(t), K_i(t), a_i(t), b_i(t), i = 1,2$ 为常数时，此时定理 1 的条件

$$r_{1*} - b_1^*\frac{r_2^*K_2^*\exp\left(r_2^*\tau_2^u\right)}{r_{2*}} > 0,\ \ r_{2*} - b_2^*\frac{r_1^*K_1^*\exp\left(r_1^*\tau_1^u\right)}{r_{1*}} > 0$$

变为

$$b_1K_2 - r_1 < 0,\ \ b_2K_1 - r_2 < 0.$$

这与[1]中的一致持久的条件相同，因此，我们的结果是合理的。

下面我们给出一个例子来验证我们的理论结果。

例：考虑系统 x, y 的一致持久性：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)\left[(0.17+0.01\sin t) - \dfrac{(0.25+0.01\sin t)x\left(t-\mathrm{e}^{-5\pi+\pi\sin t}\right)}{0.9+0.1\cos t+(0.4+0.1\sin t)y(t)} - (0.11+0.01\sin t)y(t)\right] \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(t)\left[(0.22+0.01\sin t) - \dfrac{(0.22+0.01\sin t)y\left(t-\mathrm{e}^{-6\pi+\pi\cos t}\right)}{1+0.1\cos t+(0.4+0.1\sin t)x(t)} - (0.15+0.01\cos t)x(t)\right] \end{cases}$$

证明：由原方程组可得：

$$r_1^* = 0.18, r_{1*} = 0.16, r_2^* = 0.23, r_{2*} = 0.21,$$

$$b_1^* = 0.12, b_2^* = 0.16, K_1^* = 1, K_2^* = 1.1, \tau_1^u = \mathrm{e}^{-4\pi}, \tau_2^u = \mathrm{e}^{-5\pi}.$$

带入数值求得 $r_{1*}-b_1^*\dfrac{r_2^*K_2^*\exp\left(r_2^*\tau_2^u\right)}{r_{2*}}>0$，$r_{2*}-b_2^*\dfrac{r_1^*K_1^*\exp\left(r_1^*\tau_1^u\right)}{r_{1*}}>0$。

根据定理 1，从而原方程组是一致持久的。

参考文献

[1] Freedman, H.I. and Waltman, P. (1977) Mathematical Analysis of Some Three-Species Food-Chain Models. *Mathematical Biosciences*, **33**, 257-276. https://doi.org/10.1016/0025-5564(77)90142-0

[2] Gard, T.C. (1980) Persistence in Food-Chains with General Interactions. *Mathematical Biosciences*, **51**, 165-174. https://doi.org/10.1016/0025-5564(80)90096-6

[3] Garay, B.M. and Hofbauer, J. (2003) Robust Permanence for Ecological Differential Equations, Minimax, and Discretizations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **34**, 1007-1039. https://doi.org/10.1137/S0036141001392815

[4] Ashwin, P., Buescu, J. and Stewart, I. (1996) From Attractor to Chaotic Saddle: A Tale of Transverse Instability. *Nonlinearity*, **9**, 703-737. https://doi.org/10.1088/0951-7715/9/3/006

[5] Schreiber, S. (2000) Criteria for Cr Robust Permanence. *Journal of Differential Equations*, **162**, 400-426. https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3719

[6] Hirsch, M.W., Smith, H.L. and Zhao, X.-Q. (2001) Chain Transitivity, Attractivity and Strong Repellors for Semidynamical Systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **13**, 107-131. https://doi.org/10.1023/A:1009044515567

[7] Hofbauer, J. and Schreiber, S.J. (2010) Robust Permanence for Structured Populations. *Journal of Differential Equations*, **248**, 1955-1971. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.11.010

[8] Smith, H.L. and Zhao, X.-Q. (2001) Robust Persistence for Semidynamical Systems. *Nonlinear Analysis*, **47**, 6169-6179. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00678-2

[9] Thieme, H.R. (1993) Persistence under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model). *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **24**, 407-435. https://doi.org/10.1137/0524026

[10] Thieme, H.R. (2000) Uniform Persistence and Permanence for Non-Autonomous Semiflows in Population Biology. *Mathematician Bios*, **166**, 173-201. https://doi.org/10.1016/S0025-5564(00)00018-3

[11] Messan, M.R., Kopp, D., Allen, D.C. and Kang, Y. (2018) Dynamics Implications of Bi-Directional Exchange within a Meta-Ecosystem. *Mathematical Biosciences*, **301**, 167-184. https://doi.org/10.1016/j.mbs.2018.05.006

[12] Hale, J.K. (1977) Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2

[13] Kuang, Y. (1993) Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Academic, New York.

[14] Yang, X.T. (2006) Uniform Persistence for a Predator-Prey System with Delays. *Applied Mathematics and Computation*, **173**, 523-534. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.057

[15] 蒋燕, 杨喜陶. 一类非自治密度依赖的时滞捕食者–食饵系统的一致持久性[J]. 湖南文理学院学报(自然科学版), 2017(29): 9-12.