Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1070-1077
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011127

修正的两指标Camassa-Holm方程的周期边值问题的爆破解存在条件和判别条件

孙开峰

华南理工大学数学学院，广东 广州
Email: 1023124248@qq.com

收稿日期：2020年10月20日；录用日期：2020年11月10日；发布日期：2020年11月17日

摘 要

首先，对修正的两指标Camassa-Holm方程的周期边值问题建立局部适定性。其次，得到有关该方程强解的一些爆破结果。

关键词

修正的两指标Camassa-Holm方程的周期边值问题，爆破

Existence and Discriminant Conditions of the Blow-Up Solution of the Periodic Boundary Value Problem of the Modified Two-Index Camassa-Holm Equation

Kaifeng Sun

School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 1023124248@qq.com

Received: Oct. 20th, 2020; accepted: Nov. 10th, 2020; published: Nov. 17th, 2020

Abstract

We first establish local well-posedness for a periodic modified 2-component Camassa-Holm equation. We then obtain several blow-up results of strong solutions to the equation.

文章引用: 孙开峰. 修正的两指标 Camassa-Holm 方程的周期边值问题的爆破解存在条件和判别条件[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1070-1077. DOI: 10.12677/pm.2020.1011127

Keywords

Periodic Modified Two-Component Camassa-Holm Equation, Blow-Up

1. 简介

这篇文章我们考虑如下周期边值问题(MCH2)

$$\begin{cases} y_t + u y_x + 2 y u_x = -g \rho \bar{\rho}_x, & t>0, x\in\mathbb{R} \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, & t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R} \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & x\in\mathbb{R} \\ u(t,x) = u(t,x+1), & t>0, x\in\mathbb{R} \\ \rho(t,x) = \rho(t,x+1), & t>0, x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $y = u - u_{xx}$， $\rho = (1-\partial_x^2)(\bar{\rho}-\hat{\rho})$， $u(t,x)$ 表示流动的水平速度， $\bar{\rho}(t,x)$ 表示平均密度， $\hat{\rho}$ 是一个常数。g 代表浅水波的竖直向下重力加速度，为了方便起见，本文中令 $g=1$。

令 $\gamma = \bar{\rho} - \hat{\rho}$，那么 $\gamma = G * \rho$，其中符号 $*$ 代表空间卷积， $G(x)$ 是算子 $(1-\partial_x^2)^{-1}$ 的格林函数。

$$G(x) = \frac{\cosh(x-[x]-1/2)}{2\sinh(1/2)}, \quad x\in\mathbb{S}, \quad \mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

那么方程(1.1)等价为如下方程

$$\begin{cases} u_t + u u_x + \partial_x\left(G*\left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma_x^2\right)\right), & t>0, x\in\mathbb{R} \\ \gamma_t + \gamma_x u + G*\left((u_x\gamma_x)_x + u_x\gamma\right) = 0, & t>0, x\in\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R} \\ \gamma(0,x) = \gamma_0(x), & x\in\mathbb{R} \\ u(t,x) = u(t,x+1), & t>0, x\in\mathbb{R} \\ \gamma(t,x) = \gamma(t,x+1), & t>0, x\in\mathbb{R} \end{cases} \tag{1.2}$$

该方程有守恒量

$$E(t) = \int_{\mathbb{S}} u^2 + u_x^2 + \gamma^2 + \gamma_x^2 \mathrm{d}x$$

本文主要应用 Hu、Yin [1]，Guo [2]的解法，参考 Ma、Jin [3]和 Guan、Karlsen、Yin [4]中对格林函数和第二个分量的估计，做出适应 MCH2 周期边值问题的估计。

Hu、Yin [1]给出了带有涡度的两分量的 Camassa-Holm 方程周期边值问题的爆破判别条件和存在条件，该文应用解常微分不等式的方法给出了 3 个判别定理，并且讨论了两个分量的奇偶性。Guo [2]给出两分量的 Camassa-Holm 方程周期边值问题的爆破解的判别条件，同样应用常微分方程不等式的方法，不同点在于该文对第一个分量一阶导数初值的上确界和下确界进行讨论。Ma、Jin [3]和 Guan、Karlsen、Yin

[4]给出 MCH2 初值问题的爆破解的判别条件，并未对周期边值问题进行讨论。受上述四篇文章的启发，本文讨论 MCH2 的周期边值问题的爆破解。

本文的安排如下。在第二节中，我们简洁给出一些必要的结论，包括方程(1.1)的局部适定性、爆破的充要条件和研究爆破解判别条件有关的一些引理。在第三节中，我们应用第二节中的引理，分别给出三种方程(1.1)解爆破的判别条件。

2. 适定性

为了文章的完整性，这一节我们回顾一些基本的结论并跳过证明。MCH2 的局部适定性能够从 Kato 半群理论[5]得到。在[4]中，该作者给予了一个适定性定理的详细描述。

定理 2.1 [4] 给定 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}\in H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})$，$s>3/2$，其中 $\mathbb{S}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，存在最大时间 $T=T(z_0)>0$，并且方程(1.2)存在唯一的强解 $z=\begin{pmatrix}u\\ \gamma\end{pmatrix}$ 使得

$$z=z(.,z_0)\in C\left(\left[0,T\right);H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})\right)\cap C^1\left(\left[0,T\right);H^{s-1}(\mathbb{S})\times H^{s-1}(\mathbb{S})\right)$$

并且强解连续依赖初值：映射

$$z_0\to z(.,z_0):H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})\to C\left(\left[0,T\right);H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})\right)\cap C^1\left(\left[0,T\right);H^{s-1}(\mathbb{S})\times H^{s-1}(\mathbb{S})\right)$$

是连续的。并且最大时间 T 与指标 s 无关。

定理 2.2 [4] 给定 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}\in H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})$，$s>3/2$，其中 $\mathbb{S}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，假设 $T=T(z_0)>0$ 是方程(1.2)强解 $z=\begin{pmatrix}u\\ \gamma\end{pmatrix}$ 存在的最大时间。如果存在 $M>0$ 使得

$$\left\|u_x(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}+\left\|\gamma_x(t,\cdot)\right\|_{L^\infty}\le M,t\in\left[0,T\right),$$

那么 $z(t,\cdot)$ 的 $H^s\times H^s$ 范数不在 $\left[0,T\right)$ 内爆破。

定理 2.3 [4] 给定 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}\in H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})$，$s>3/2$，其中 $\mathbb{S}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，假设 $T=T(z_0)>0$ 是方程(1.2)强解 $z=\begin{pmatrix}u\\ \gamma\end{pmatrix}$ 存在的最大时间。那么该方程的解在有限时间内爆破当且仅当

$$\liminf_{t\to T}\inf_{x\in\mathbb{R}}\left\{u_x(t,x)\right\}=-\infty$$

该定理给出方程(1.2)解爆破的充要条件，且在第三节中应用到定理 3.1、定理 3.2、定理 3.3 的证明过程中。

引理 2.1 [1] 给定 $z_0=\begin{pmatrix}u_0\\ \gamma_0\end{pmatrix}\in H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})$，$s>3/2$，其中 $\mathbb{S}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$，假设 $T=T(z_0)>0$ 是方程(1.2)强解 $z=\begin{pmatrix}u\\ \gamma\end{pmatrix}$ 存在的最大时间。如下初值问题

$$\begin{cases}q_t=u(t,q), & t\in\left[0,T\right)\\ q(0,x)=x, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

有唯一解

$$q \in C^1\left(\{0,T\} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$$

并且映射 $q(t,\cdot)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的单增同构，且

$$q_x(t,x) = \exp\left(\int_0^t u_x\left(s, q(s,x)\right) \mathrm{d}s\right) > 0, (t,x) \in \{0,T\} \times \mathbb{R}$$

引理 2.2 [1] 给定 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \in H^s(\mathbb{S}) \times H^s(\mathbb{S})$，$s > 3/2$，其中 $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，假设 $T = T(z_0) > 0$ 是方程(1.2)强解 $z = \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix}$ 存在的最大时间。那么我们有

$$\gamma\left(t, q(t,x)\right) q_x(t,x) = \gamma_0(x), (t,x) \in \{0,T\} \times \mathbb{R}$$

并且如果存在某个 $x_0 \in \mathbb{S}$ 使得 $\gamma_0(x_0) = 0$，那么 $\gamma\left(t, q(t,x_0)\right) = 0$ 对于所有的 $t \in [0,T)$。

引理 2.3 [1] 对任意 $f \in H^1(\mathbb{S})$，有

$$\max_{x \in [0,1]} f^2(x) \le \frac{e+1}{2(e-1)} \|f\|_{H^1(\mathbb{S})}^2$$

引理 2.4 [1] 如果 $f \in H^3(\mathbb{S})$ 使得

$$\int_{\mathbb{S}} f(x) \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}$$

那么对于任意 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\max_{x \in [0,1]} f^2(x) \le \frac{\varepsilon+2}{24} \int_{\mathbb{S}} f_x^2 \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon+2}{4\varepsilon} a_0^2$$

并且

$$\max_{x \in [0,1]} f^2(x) \le \frac{\varepsilon+2}{24} \|f\|_{H^1(\mathbb{S})}^2 + \frac{\varepsilon+2}{4\varepsilon} a_0^2$$

3. 爆破

定理 3.1 给定 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \in H^s(\mathbb{S}) \times H^s(\mathbb{S})$，$s > 3/2$，其中 $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，假设 $T = T(z_0) > 0$ 是方程(1.2)强解 $z = \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix}$ 存在的最大时间。假设 $E_0 := E(0) \ne 0$。如果存在 $K_0 = K_0(E_0) > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{S}} u_{0,x}^3 \mathrm{d}x < K_0$$

那么解在有限时间内爆破。

证明：

$\exists M > 0$，使得 $u_x(t,x) > -M$，对任意 $(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{S}$，将 $u_x^2 \partial x$ 作用于方程(1.2)第一个式子，然后应用分部积分

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}} u_x^4 \mathrm{d}x \\ &= 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2 \left(u^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma_x^2\right) \mathrm{d}x - 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2 G * \left(u^2 + \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 - \frac{1}{2}\gamma_x^2\right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

我们首先将 $\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}} u_x^4 \mathrm{d}x$ 这一项做出估计。

注意到

$$\left|\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x\right| \le \left(\int_{\mathbb{S}} u_x^4 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{S}} u_x^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

应用第一节中我们介绍了守恒量

$$\|u\|_{H^1} \le E_0$$

得到如下不等式

$$\int_{\mathbb{S}} u_x^4 \mathrm{d}x \ge \frac{1}{\|u\|_{H^1}^2}\left(\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x\right)^2 \ge \frac{1}{E_0}\left(\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x\right)^2$$

将上述估计式带入，我们得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x + \frac{1}{2E_0}\left(\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x\right)^2 \\
&\le 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2\left(u^2+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\gamma_x^2\right)\mathrm{d}x - 3\int_{\mathbb{S}} u_x^2 G*\left(u^2+\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}\gamma^2-\frac{1}{2}\gamma_x^2\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其次我们将上述不等式的右端做出估计。

由于

$$G*\left(u^2+\frac{1}{2}u_x^2\right) \ge \frac{1}{2}u^2,\quad \int_{\mathbb{S}} u_x^2 G*\gamma^2 \mathrm{d}x \ge 0,\quad \int_{\mathbb{S}} u_x^2\gamma^2 \mathrm{d}x \ge 0,$$

$$\begin{aligned}
G*\gamma_x^2(x) &= \int_{\mathbb{S}} \frac{\cosh\left(x-y-[x-y]-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\gamma_x^2(y)\mathrm{d}y \\
&\le \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{\mathbb{S}}\gamma_x^2(y)\mathrm{d}y \le \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}E_0
\end{aligned}$$

再次代入得到如下不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x + \frac{1}{2E_0}\left(\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x\right)^2 \le 3\int_{\mathbb{S}} \frac{1}{2}u_x^2u^2 + \frac{1}{2}u_x^2\gamma^2 \mathrm{d}x + \frac{3\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{1}{2}\right)}E_0^2$$

为了将上述不等式右端作出估计，我们应用 Young 不等式和引理 2.3

$$\int_{\mathbb{S}} u_x^2u^2 \mathrm{d}x \le \|u\|_{L^\infty(\mathbb{S})}\int_{\mathbb{S}} u_x^2 \mathrm{d}x \le \frac{e+1}{2(e-1)}E_0^2$$

然后我们估计 $\|\gamma(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{S})}$，注意到周期边值。应用引理 2.1 和引理 2.2，我们得到如下估计

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{S})} &= \|\gamma(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \left\|\gamma_0(\cdot)q_x^{-1}(t,\cdot)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\
&\le \|\gamma_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\mathrm{e}^{Mt} \le \|\gamma_0(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\mathrm{e}^{MT} := M_1
\end{aligned}$$

将上述两个估计代入不等式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x + \frac{1}{2E_0}\left(\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x\right)^2 \le \frac{3(e+1)}{4(e-1)}E_0^2 + \frac{3}{2}M_1^2 E_0 + \frac{3\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{1}{2}\right)}E_0^2$$

令

$$m(t) = \left(\int_{\mathbb{S}} u_x^3 \mathrm{d}x\right)^2$$

$$K = \left[\frac{3(e+1)}{4(e-1)}E_0^2 + \frac{3}{2}M_1^2 E_0 + \frac{3\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{1}{2}\right)}E_0^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

注意到如果 $m(0) < -\sqrt{2E_0}K$，那么 $m(t) < -\sqrt{2E_0}K$。

从而，我们解出上面的常微分不等式得到

$$\frac{m(0)+\sqrt{2E_0}K}{m(0)-\sqrt{2E_0}K}\mathrm{e}^{\sqrt{2/E_0}Kt} - 1 \le \frac{2\sqrt{2E_0}K}{m(t)-\sqrt{2E_0}K} \le 0$$

由于

$$0 < \frac{m(0)+\sqrt{2E_0}K}{m(0)-\sqrt{2E_0}K} < 1$$

那么存在 T_1 满足

$$0 < T_1 < \frac{1}{\sqrt{2/E_0}K}\ln\left(\frac{m(0)-\sqrt{2E_0}K}{m(0)+\sqrt{2E_0}K}\right)$$

使得

$$\lim_{t\uparrow T_1} m(t) = -\infty$$

这与假设 $\exists M > 0$，使得 $u_x(t,x) > -M$，对任意 $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{S}$，相矛盾。

令 $K_0 = \sqrt{2E_0}K$，应用定理 2.2，我们推断出解在有限时间内爆破，完成了定理的证明。

接下来我们给出第二个爆破结论。

定理 3.2 给定 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \in H^s(\mathbb{S})\times H^s(\mathbb{S})$，$s > 3/2$，其中 $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，假设 $T = T(z_0) > 0$ 是方程(1.2)强解 $z = \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix}$ 存在的最大时间。假设存在某个 $x_0 \in \mathbb{S}$ 使得 $\gamma_0(x_0) = 0$，并且存在 $K_0 = K_0(E_0) > 0$

$$u_0'(x_0) < K_0$$

那么解在有限时间内爆破。

证明：

设

$$m(t) = u_x(t, q(t, x_0))$$

$$h(t) = \gamma(t, q(t, x_0))$$

将 $m(t)$ 微分，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)=(u_{tx}+u_{xx}u)\left(t,q(t,x_0)\right)$$

对公式(1.2)两侧求导，代入 $\left(t,q(t,x_0)\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)=&-\frac{1}{2}m^2(t)+u^2\left(t,q(t,x_0)\right)+\frac{1}{2}h^2(t)-\frac{1}{2}\gamma_x^2\left(t,q(t,x_0)\right)\\&-G*\left[u^2\left(t,q(t,x_0)\right)+\frac{1}{2}u_x^2\left(t,q(t,x_0)\right)+\frac{1}{2}h^2(t)-\frac{1}{2}\gamma_x^2\left(t,q(t,x_0)\right)\right]\end{aligned}$$

应用以下不等式

$$G*\left(u^2+\frac{1}{2}u_x^2\right)\geq\frac{1}{2}u^2$$

$$G*\gamma_x^2\leq\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)}E_0$$

并且注意到 $h(0)=\gamma\left(0,q(t,x_0)\right)=0$。根据引理 2.2，我们有 $h(t)=0$，对于 $t\in[0,T)$。

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m(t)\leq-\frac{1}{2}m^2(t)+\frac{e+1}{4(e-1)}E_0+\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{1}{2}\right)}E_0$$

令

$$K^2=\frac{e+1}{4(e-1)}E_0+\frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{1}{2}\right)}E_0$$

注意到如果 $m(0)<-\sqrt{2}K$，那么 $m(t)<-\sqrt{2}K$。

解上面不等式得到

$$\frac{m(0)+\sqrt{2}K}{m(0)-\sqrt{2}K}\mathrm{e}^{\sqrt{2}Kt}-1\leq\frac{2\sqrt{2}K}{m(t)-\sqrt{2}K}\leq0$$

由于

$$0<\frac{m(0)+\sqrt{2E_0}K}{m(0)-\sqrt{2E_0}K}<1$$

那么存在 T_1 满足

$$0<T_1<\frac{1}{\sqrt{2/E_0}K}\ln\left(\frac{m(0)-\sqrt{2E_0}K}{m(0)+\sqrt{2E_0}K}\right)$$

使得

$$\lim_{t \uparrow T_1} m(t) = -\infty$$

令 $K_0 = \sqrt{2}K$，我们推断出解在有限时间内爆破。

类似定理 3.2 的证明过程，我们应用引理 2.4 的估计得到定理 3.3。

定理 3.3 给定 $z_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ \gamma_0 \end{pmatrix} \in H^s(\mathbb{S}) \times H^s(\mathbb{S})$，$s > 3$，其中 $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，假设 $T = T(z_0) > 0$ 是方程(1.2)强解 $z = \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix}$ 存在的最大时间。假设

$$\int_{\mathbb{S}} u_0 \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}$$

且存在某个 $x_0 \in \mathbb{S}$ 使得 $\gamma_0(x_0) = 0$，对 $\forall \varepsilon > 0$，有

$$u_0'(x_0) < -\sqrt{\frac{\varepsilon+2}{24} E_0 + \frac{\varepsilon+2}{4\varepsilon} a_0^2 + \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}\right)} E_0}$$

那么解在有限时间内爆破。

证明：由于守恒量，我们有如下等式

$$\int_{\mathbb{S}} u \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{S}} u_0 \mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}$$

根据守恒律，类似定理 3.2 证明过程，代入引理 2.4，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(t) \le -\frac{1}{2} m^2(t) + \frac{\varepsilon+2}{48} E_0 + \frac{\varepsilon+2}{8\varepsilon} a_0^2 + \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{1}{2}\right)} E_0$$

令

$$K = \sqrt{\frac{\varepsilon+2}{48} E_0 + \frac{\varepsilon+2}{8\varepsilon} a_0^2 + \frac{\cosh\left(\frac{1}{2}\right)}{4\sin\left(\frac{1}{2}\right)} E_0}$$

根据上面定理 3.2 的结果，可以得出解在有限时间内爆破，完成定理的证明。

参考文献

[1] Hu, Q. and Yin, Z. (2011) Global Existence and Blow-Up Phenomena for a Periodic 2-Component Camassa-Holm Equation with Vorticity. arXiv:1103.1500 [math.AP] https://doi.org/10.1063/1.3644346

[2] Guo, F. (2014) Breaking Waves for the Periodic Two-Component Camassa-Holm System. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **142**, 2407-2415. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-2014-11949-6

[3] Ma, C., Jin, L. and Jin, Y. (2014) Two Blow-Up Criteria of Solutions to a Modified Two-Component Camassa-Holm System. *Journal of inequalities and Applications*, **2014**, Article Number: 54. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-54

[4] Guan, C., Karlsen, K.H. and Yin, Z. (2010) Well-Posedness and Blow-Up Phenomena for a Modified Two-Component Camassa-Holm Equation. *Contemporary Mathematics*, **526**, 199-220. https://doi.org/10.1090/conm/526/10382

[5] Kato, T. (1974) Spectral Theory and Differential Equations. *Proceedings of the Symposium*, Dundee, Scotland, 1-19 July 1974, 25-70.