Pure Mathematics 理论数学, 2020, 10(11), 1078-1083
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2020.1011128

Hans汉斯

多种角度探究椭圆的焦半径、焦点弦、$\angle F_1PF_2$的最大值问题

刘　越[1]**，徐冬冬**[2]

[1]河套学院数学与计算机系，内蒙古 巴彦淖尔
[2]巴彦淖尔市第一中学，内蒙古 巴彦淖尔
Email: 291350617@qq.com

收稿日期：2020年10月21日；录用日期：2020年11月11日；发布日期：2020年11月18日

摘　要

椭圆的焦半径、焦点弦、焦点三角形等相关知识是高考的难点，也是学生最容易混淆的知识点之一，只有在学生掌握相关结论的基础上才能更好地解决相关习题。本文主要运用代数、参数方程等方法以及数形结合的思想探究了焦半径、焦点弦的最值问题及焦点三角形的角$\angle F_1PF_2$最大值问题，从多个角度分析了相关问题，更有助于培养学生的发散思维能力。

关键词

椭圆，焦半径，焦点弦，焦点三角形

The Maximum of Focal Radius, Chord of Focus and Angle $\angle F_1PF_2$ of Ellipse Are Studied from Different Angles

Yue Liu[1]**, Dongdong Xu**[2]

[1]Department of Mathematics and Computer, Hetao College, Bayannur Inner Mongolia
[2]Bayannur No. 1 Middle School, Bayannur Inner Mongolia
Email: 291350617@qq.com

Received: Oct. 21st, 2020; accepted: Nov. 11th, 2020; published: Nov. 18th, 2020

Abstract

The focus radius, focus chord and focus triangle of ellipse are the difficult points in the college entrance examination. Only on the basis of students' mastery of the relevant conclusions can they

文章引用: 刘越, 徐冬冬. 多种角度探究椭圆的焦半径、焦点弦、$\angle F_1PF_2$ 的最大值问题[J]. 理论数学, 2020, 10(11): 1078-1083. DOI: 10.12677/pm.2020.1011128

better solve the relevant exercises. In this paper, the maximum of focal radius, the chord of focal point and the maximum of angle of focal triangle are studied by means of algebra, parametric equation and the thought of the combination of number and shape. It is more helpful to cultivate students' ability of divergent thinking.

Keywords

Ellipse, Focal Radius, Focus Chord, Focus Triangle

1. 椭圆的焦半径问题(椭圆上任意一点到焦点的距离)

例 1 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)的左、右焦点分别为 F_1,F_2，椭圆上任意一点 $P(x_0,y_0)$，求 $|PF_2|$ 的取值范围。

解法一 设 $F_2(c,0)$，由题意可知，$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $y_0^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2$，

$\therefore |PF_2|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^2}=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)^2}=|a-ex_0|$。

$\because 0<e<1$，$-a\le x_0\le a$，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$\therefore \begin{cases}|PF_2|=a-ex_0\\|PF_1|=a+ex_0\end{cases}$ [1]。

解法二 令 $\begin{cases}x_0=a\cos\theta\\y_0=b\sin\theta\end{cases}$，($\theta$ 为参数)

$\therefore |PF_2|=\sqrt{(a\cos\theta-c)^2+(b\sin\theta)^2}=\sqrt{(a-c\cos\theta)^2}=a-c\cos\theta$。

即 $|PF_2|=a-ea\cos\theta=a-ex_0$。

$\because |PF_1|+|PF_2|=2a$，$\therefore |PF_1|=a+ea\cos\theta=a+ex_0$，其中 $-a\le x_0\le a$。

2. 椭圆中焦点弦问题

例 2 过椭圆焦点的直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)交于 A,B 两点，求弦 $|AB|$ 的取值范围。

解法一 设直线 l 的方程为：$x=my+c$，交点坐标分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$。

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\x=my+c\end{cases}\Rightarrow y^2\left(b^2m^2+a^2\right)+2mcb^2y-b^4=0.$$

$\therefore y_1+y_2=\frac{-2mcb^2}{b^2m^2+a^2}$，$y_1y_2=\frac{-b^4}{b^2m^2+a^2}$，

$$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\frac{4m^2c^2b^4}{\left(b^2m^2+a^2\right)^2}+\frac{4b^4}{b^2m^2+a^2}}=2ab^2\cdot\frac{m^2+1}{b^2m^2+a^2}$$

$$=2ab^2\cdot\frac{\left(b^2m^2+a^2\right)\frac{1}{b^2}+1-\frac{a^2}{b^2}}{b^2m^2+a^2}=2ab^2\cdot\left(\frac{1}{b^2}-\frac{\frac{a^2}{b^2}-1}{b^2m^2+a^2}\right).$$

当 $m=0$ 时，$|AB|_{\min}=\dfrac{2b^2}{a}$；

当 $m\to\infty$ 时，即直线 l 的斜率 $k=\dfrac{1}{m}$ 越接近 0 时，弦 $|AB|$ 越大[2]，

$\therefore$ 当直线 l 的斜率为 0 时，$|AB|_{\max}=2a$ 。

解法二 设椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=c+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}$ (其中 t 为参)。

代入椭圆方程得 $\dfrac{(c+t\cos\theta)^2}{a^2}+\dfrac{t^2\sin^2\theta}{b^2}=1$，

即

$$t^2\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)+t\cdot 2b^2c\cos\theta-b^4=0,$$

$$t_1+t_2=-\frac{2b^2c\cos\theta}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=-\frac{2b^2c\cos\theta}{a^2-c^2\cos^2\theta},$$

$$t_1\cdot t_2=\frac{-b^4}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}=\frac{-b^4}{a^2-c^2\cos^2\theta},$$

$$|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1\cdot t_2}=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}.$$

当 $\cos^2\theta=1$ 时，$|AB|$ 有最大值 $2a$；当 $\cos^2\theta=0$ 时，$|AB|$ 有最小值 $\dfrac{2b^2}{a}$ [3]。

解法三 设过椭圆右焦点 F 的直线 l 与椭圆的交点分别为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由焦半径公式可知：

$$|AF|=a-ex_1,\ |BF|=a-ex_2,\ |AB|=|AF|+|BF|=2a-e(x_1+x_2)$$

由解法一可知：$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2c$，其中 $y_1+y_2=\dfrac{-2mcb^2}{b^2m^2+a^2}$；

$\therefore |AB|=2a-e(x_1+x_2)=2a-\dfrac{2ac^2}{b^2m^2+a^2}$ 。

当 $m=0$ 时，$|AB|_{\min}=\dfrac{2b^2}{a}$；当 m 足够大时，即直线斜率为 0 时，$|AB|_{\max}=2a$ 。

3. 椭圆上任意一点 P 与椭圆焦点 F_1, F_2 构成的角 $\angle F_1PF_2$ 最大值问题

例 3 设椭圆的标准方程为：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)，椭圆上任意一点 P 与椭圆焦点 F_1,F_2 构成的角为 $\angle F_1PF_2$；当 P 为椭圆的上顶点时(或下顶点时)，$\angle F_1PF_2$ 最大。

证法一 设椭圆上任意一点 P，焦点坐标分别为 $F_1(-c,0),F_2(c,0)$，且 $|PF_1|+|PF_2|=2a$ 。

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-4c^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{2b^2}{|PF_1|\cdot|PF_2|}-1,$$

$|PF_1|\cdot|PF_2|\le\left(\dfrac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=a^2$，当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时，等号成立 $\cos\angle F_1PF_2\ge\dfrac{2b^2}{a^2}-1$，

$\therefore$ 当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时，$\cos\angle F_1PF_2$ 有最小值，$\angle F_1PF_2$ 最大，此时点 P 为椭圆的上顶点(或下顶点)。

证法二 椭圆的参数方程为 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数)，则椭圆上的点为 $p(a\cos\theta,b\sin\theta)$ [3]；点 P 到原点 O 的距离：$|OP|=\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}=\sqrt{b^2+c^2\cos^2\theta}$。

当 $\cos^2\theta=0$ 时，即 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ (或 $\dfrac{3\pi}{2}$)时，$|OP|_{\min}=b$，此时点 P 为椭圆的上顶点(或下顶点)。

以原点 O 为圆心，$|OF_2|=c$ 为半径做圆，如图 1，图 2，图 3 所示：

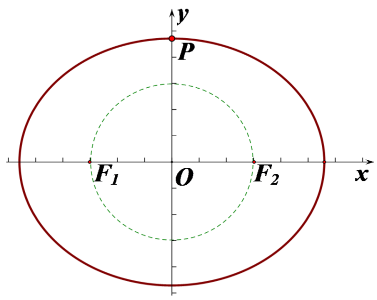

Figure 1. The radius is less than the short half axis
图 1. 半径小于短半轴

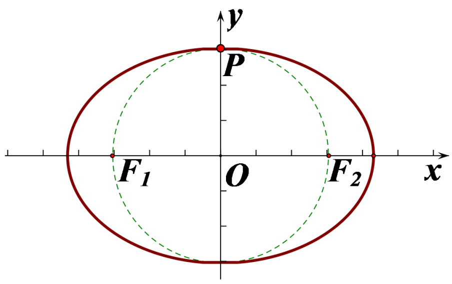

Figure 2. The radius is equal to the short half axis
图 2. 半径等于短半轴

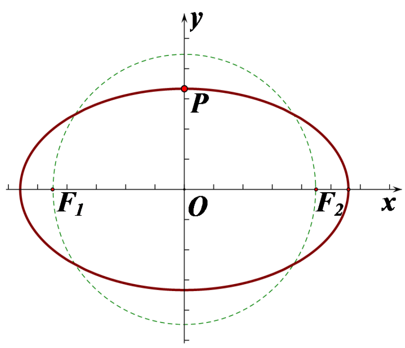

Figure 3. The radius is greater than the short half axis
图 3. 半径大于短半轴

$\because$ 点 P 为椭圆的上顶点(或下顶点时)，到圆心 O 的距离最短 $|OP|_{\min}=b$

$\therefore$ $\angle F_1PF_2$ 最大，此时点 P 为椭圆的上顶点(或下顶点)。

4. 椭圆上任意一点 P 与椭圆左右顶点 A, B 构成的角 $\angle APB$ 最大值问题

证法一 由于椭圆关于坐标轴对称，不妨设椭圆第一象限上任意一点 $p(x_0,y_0)$，左右顶点坐标分别为 $A(-a,0),B(a,0)$，记 $\angle PAB=\alpha,\angle PBA=\beta,\angle APB=\gamma$，如图 4 所示：

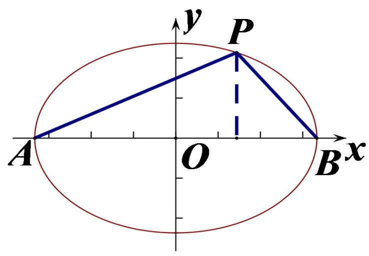

Figure 4. P is the moving point on the ellipse
图 4. P 为椭圆上动点

$$\tan\alpha=\frac{y_0}{x_0+a} \tag{1}$$

$$\tan\beta=\frac{y_0}{a-x_0} \tag{2}$$

$$\tan\gamma=\tan\left[\pi-(\alpha+\beta)\right]=-\tan(\alpha+\beta)=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \tag{3}$$

将(1)、(2)式带入(3)式整理可得：$\tan\gamma=-\frac{2ab^2}{c^2y_0}$，当 $y_0=b$ 时，$\tan\gamma=-\frac{2ab^2}{c^2y_0}$ 最大，即 $\angle APB$ 最大；此时 P 为椭圆的上顶点。

证法二 以原点为圆心，椭圆长半轴为半径做圆，如图 5 所示：有上述例 3 中的证法二可知：椭圆的上顶点到原点的距离最短。因此 P 为椭圆的上顶点时，$\angle APB$ 最大。

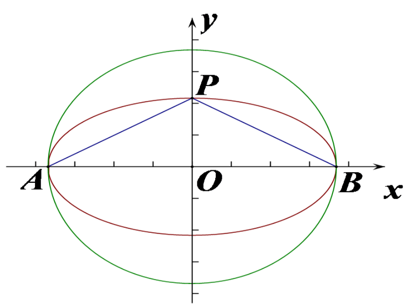

Figure 5. P is the vertex of the ellipse
图 5. P 为椭圆上顶点

5. 总结

本文在了解椭圆基础知识、参数方程等相关知识的基础上探究了焦半径、焦点弦及焦点三角形中角 $\angle F_1PF_2$ 的最大值问题；多个角度分析问题，探究相关结论，使得运用结论在解决相关习题时能快速找到突破口。

参考文献

[1] 胡云浩. 椭圆的焦半径公式及应用[J]. 中学数学研究, 2014(9): 25-27.

[2] 刘玉链, 傅沛仁. 函数的极限[M]//数学分析讲义. 第五版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[3] 吕伟泉. 数学 选修 4-4 坐标系与参数方程[M]. 北京: 人民教育出版社, 2017.